Tema 7. Aproximación de la distribución Binomial a la Normal

Indice

1. Problemas de la distribución binomial

Supongamos una distribución binomial B(n,p) con un número muy grande de n; por ejemplo lanzamos un tiro libre 200 veces siendo la probabilidad de encestar del 40%, es decir B(n=200,p=0,4). Si nos planteamos cual es la probabilidad de encestar más de 100 lanzamientos tendremos que calcular 100 términos, siendo aburrido y muy laborioso:

P(x>100)=p(x=100)+p(x=101)+…+ …+p(x=199)+p(x=200)=

$=\binom{200}{100}\cdot 0{,}4^{100}\cdot 0{,}6^{100}+\binom{200}{101}\cdot 0{,}4^{101}\cdot 0{,}6^{99}+\cdots+\binom{200}{199}\cdot 0{,}4^{199}\cdot 0{,}6^{1}+\binom{200}{200}\cdot 0{,}4^{200}\cdot 0{,}6^{1}.$

Surge así la pregunta natural: ¿no se podría calcular esta probabilidad sin tener que recurrir a la formula de distribución binomial 100 veces?. Resulta que si se puede, el Teorema de Movire-Laplace nos muestra que de forma aproximada podemos aproximar esta probabilidad utilizando la distribución normal.

2. Aproximación de la binomial a la normal

Teorema de Movire-Laplace: si X es una variable discreta que sigue una distribución binomial de parámetros n y p, B(n,p) y se cumple que n>10, n·p>5 y n·q>5 resulta una aproximación bastante buena suponer que la variable X' (recordemos que en la binomial μ=n·p y $\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot q}$) se aproxima a la variable normal N(n·p, $\sqrt{n\cdot p\cdot q}$).

Resulta mucho más sencillo trabajar con la variable normal X' que con la binomial X, pues recordemos que los valores de la normal están tabulados.

Corrección de continuidad o de Yates: cuando aproximamos una distribución binomial mediante una normal, estamos convirtiendo una variable X discreta (toma un número determinado de valores) en una continua X' (toma valores en un intervalo).

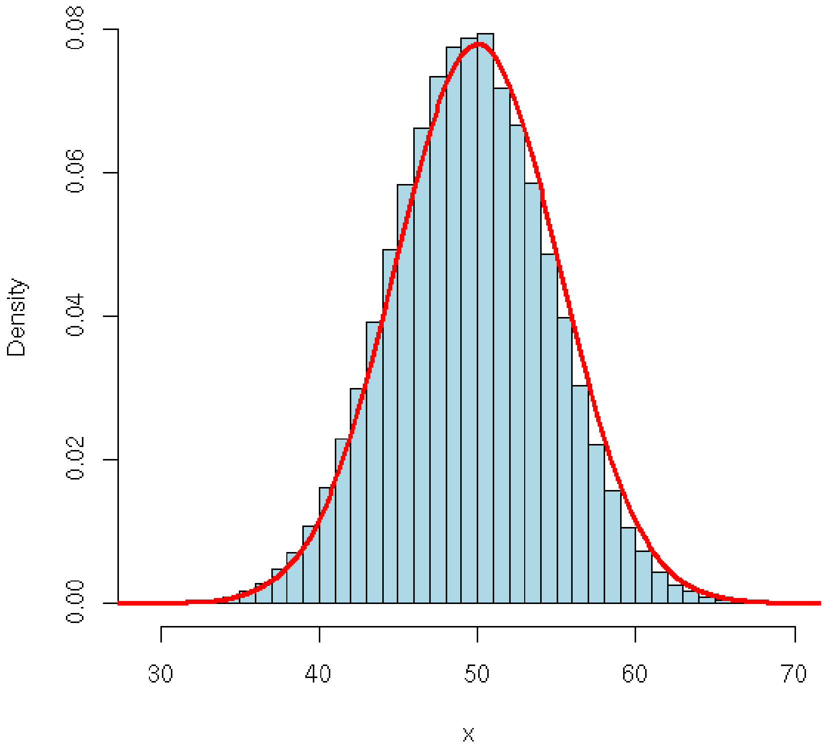
Los valores de la probabilidad para valores fijos de la variable continua son cero (ya que sería el área de un punto), y necesitamos definir un intervalo. Para evitar este problema en la aproximación de los valores fijos estos se corrigen (corrección de continuidad o de Yates) sustituyéndolos por un intervalo centrado en el punto y de valor unidad. En el siguiente esquema se muestran todas las situaciones posibles:

$X \Rightarrow B(n,p)$ y $X' \Rightarrow N(n\cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot q})$

- $P(X=a)=P(a-0{,}5 \leq X' \leq a+0{,}5)$
- $P(X \leq a)=P(X' \leq a+0{,}5)$ (para que contenga al punto a)
- $P(X<a)= P(X' \leq a-0{,}5)$ (para que no contenga al punto a)
- $P(X>a)=P(X' \geq a+0{,}5)$ (para que no contenga al punto a)
- $P(X \geq a)=P(X' \geq a-0{,}5)$ (para que contenga al punto a)

  $P(a \leq X<b)=P(a-0{,}5 \leq X' \leq b+0{,}5)$ (para que contenga al punto a y no a b)

Binomial n=100 p=0,5 y N(n·p, $\sqrt{n \cdot p \cdot q}$)



Ejemplos:

Problema 1) Se efectúan 15 lanzamientos de una moneda. Calcular la probabilidad de que ocurran los siguientes sucesos

a) salgan entre 8 y 12 caras

b) Salgan menos de 6 caras

Solución

a) X=nº caras→B(15,0,5)

Si calculamos el problema de forma exacta el problema tenemos que sumar 5 términos P(8≤X≤12)=P(x=8)+p(x=9)+p(x=10)+p(x=11)+p(x=12)=0,4963

Aproximando con la distribución normal (μ=n·p=7.5;σ=$\sqrt{n\cdot p\cdot q}$=1,94):

X'→N(7.5,194): P(8≤X≤12)=P(7,5≤X'≤12,5)=P($\frac{7.5-7.5}{1,94}\leq Z\leq\frac{12.5-7.5}{1,94}$) $=P(0\leq Z\leq 2.6)=0{,}497$

b) Exacto: P(X<6)=P(x=5)+P(x=4)+P(x=3)+P(x=2)+P(x=1)+P(x=0)=0,1508

Aproximación: P(X'≤5.5)=P($Z\leq\frac{5.5-7.5}{1,94}$)=P(Z≤-1,03)=1-P(Z≤1,03)=0,1515

Problema 2) Un examen tipo test consta de 38 preguntas a contestar verdadero o falso. El examen se aprueba si se contesta correctamente al menos 20 preguntas. Un alumno responde al examen lanzando al aire una moneda y contestando verdadero si sale cara y falso si sale cruz. Halla

a) La probabilidad de aprobar el examen

b) Probabilidad de acertar más de 24 y menos de 31.

Solución

a) X=nº aciertos→ B(38,0.5). Se cumple μ=n·p=19; σ=$\sqrt{n\cdot p\cdot q}$=3,1. La aproximación es X'→ N(19,3.1)

P(X≥20)=P(X'≥19,5)=P(Z≥$\frac{19,5-19}{3,1}$)=P(Z≥0.16)=1-P(Z≤0.16)=0.4364

b) P(24<X<31)=P(24,5≤X'≤30.5)=P($\frac{24,5-19}{3,1}\leq Z\leq\frac{30,5-19}{3,1}$) $=P(1.77\leq Z\leq 3{,}71)=$

$=0.0384$

__**Ejercicios Propuestos:**__

P1) Un cierto equipo electrónico está formado por 100 componentes conectados. Si cada componente tiene una probabilidad de 0.02 de romperse cunado el equipo es lanzado en un cohete, hallar la probabilidad de que al hacerlo se rompan 10 o más componentes.

P2) Supongamos que un tirador tiene probabilidad de 0.4 de acertar en la diana. Hallar la probabilidad de que después de realizar 20 disparos halla acertado al menos 4 lanzamientos. Hacerlo mediante la distribución binomial y la aproximación normal y comparar los resultados.

P3) Una máquina produce componentes que son defectuosos en un 10%. Se elige al azar una muestra de estos 50 componentes. Calcular las probabilidades de que a) como mucho 6 componentes estén defectuosos, b) tenga 3 o más componentes defectuosos.