Tema 5. Variables aleatorias discretas. Distribución Binomial

Indice

1. Distribuciones de probabilidad discreta.

Una ***variable aleatoria*** se dice ***discreta*** cuando sólo puede tomar un número finito de valores o por lo menos cuantizables, de forma que podemos asignar a cada suceso un número natural.

La idea de las distribuciones de probabilidad es modelar las distribuciones estadísticas de frecuencia, de tal forma que según sean las variables estadísticas tenemos:

- ***Distribuciones discretas:*** si la variable estadística es discreta, como nº de hermanos, valores en un lanzamiento a una diana, etc.
- ***Distribuciones continuas:*** si la variable estadística es continua, como los metros cuadrados de una casa, la altura de los miembros de una organización, etc

En este tema nos centraremos en las distribuciones discretas.

Veamos en la siguiente tabla la analogía entre estadística descriptiva y distribuciones probabilísticas:

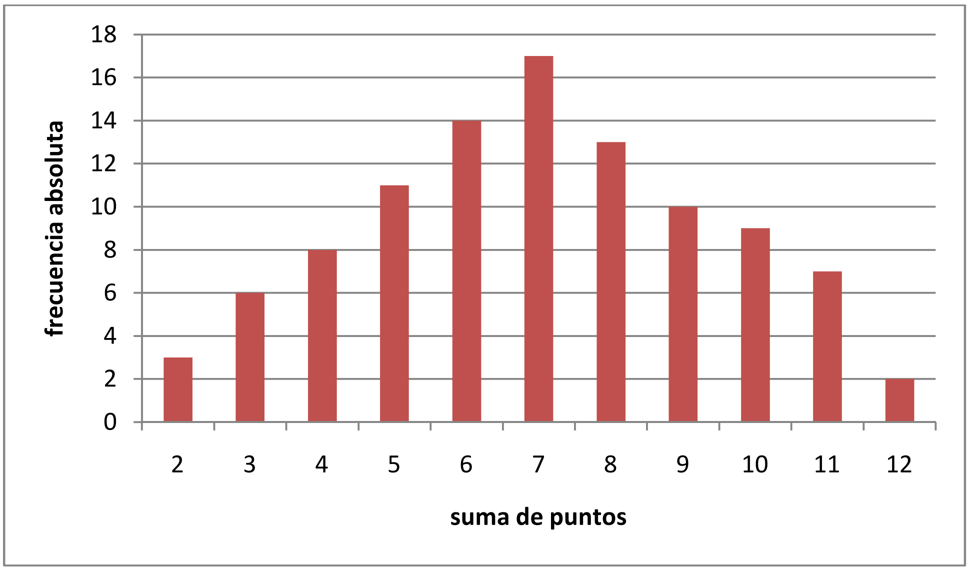
ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA	DISTRIBUCIÓN PROBABILÍSTICA
Valores de una variable estadística sobre una población.	Espacio Muestral Ω
Variables estadísticas: Discreta Continua	Variables aleatorias: Discreta Continua
Distribución de frecuencias relativas (vble. discreta) Diagrama de barras	Ley de distribución de probabilidades (Vble discreta) Diagrama de barras
Distribución de frecuencias relativas (vble. continua) Polígono de frecuencias	Función densidad de probabilidad f(x) (Vble continua)

Ejemplo

1) ***Distribución estadística discreta:*** Para ver la semejanza supongamos el siguiente experimento: lanzamos 100 veces dos dados y apuntamos la suma de los puntos obtenidos en la siguiente tabla:

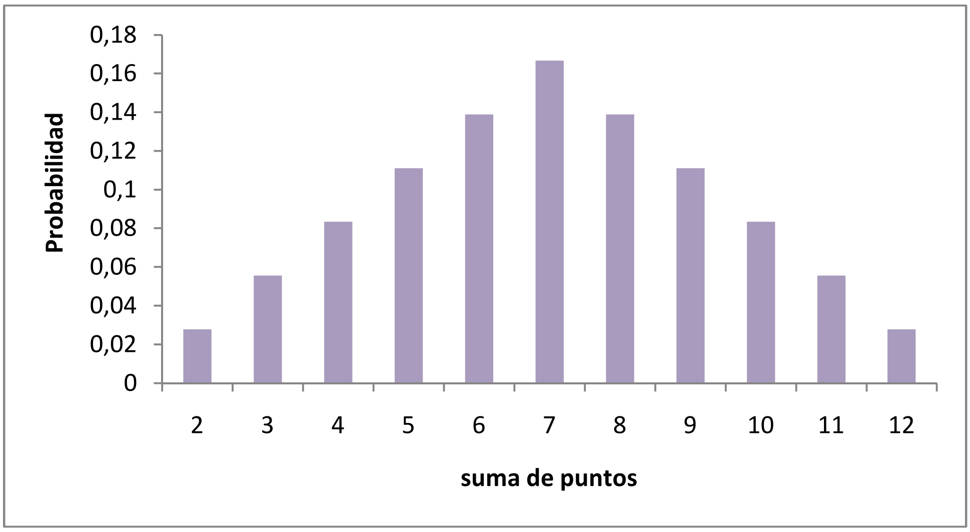
Suma de puntos	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Frecuencias absoluta	3	6	8	11	14	17	13	10	9	7	2
Frecuencia relativa	0,03	0,06	0,08	0,11	0,14	0,17	0,13	0,1	0,09	0,07	0,02

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{N} = 6{,}99 \qquad \sigma = \sqrt{\overline{x_i^2} - \left(\overline{x_i}\right)^2} = \sqrt{\frac{5483}{100} - 6{,}99^2} = 2{,}44$$



2) *Distribución de probabilidad discreta:* en el experimento anterior (lanzar 2 dados y sumar la puntuación) el espacio muestral Ω={1,2,3,…12} y sus probabilidades serán:

Espacio muestral	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Sucesos equiprobables	(1,1)	(1,2) (2,1)	(1,3) (2,2) (3,1)	(1,4) (2,3) (3,2) (4,1)	(1,5) (2,4) (3,3) (4,2) (5,1)	(1,6) (2,5) (3,4) (4,3) (5,2) (6,1)	(2,6) (3,5) (4,4) (5,3) (6,2)	(3,6) (4,5) (5,4) (6,3)	(4,6) (5,5) (5,4)	(5,6) (6,5)	(6,6)
Probabilidad	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36



Parámetros:

Media o esperanza: $\mu = \sum x_i \cdot p(x_i)$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\sum (x_i - \mu)^2 \cdot p(x_i)} = \sqrt{x_i^{\;2} \cdot p(x_i) - \mu^2}$

Ejemplo 1: Lanzamos los dardos a una diana con 6 valores numerados del 1 al 6 y con la siguiente función de probabilidad:

Número	1	2	3	4	5	6
Probabilidad	0,32	0,28	a	0,12	0,06	0,01

a) Hallar el valor de a para que se trate de una distribución de probabilidad

b) Calcular p(x>3), p(x≤4) y p(2<x≤4)

c) Calcular la esperanza y la desviación típica

d) Representar el diagrama de barras

Solución:

a) Debe de cumplir que las sumas de las probabilidades sea uno, luego a=1-(0,32+0,28+0,12+0,06+0,01)=0,21

b) p(x>3)=p(x=4)+p(x=5)+p(x=6)=0,19

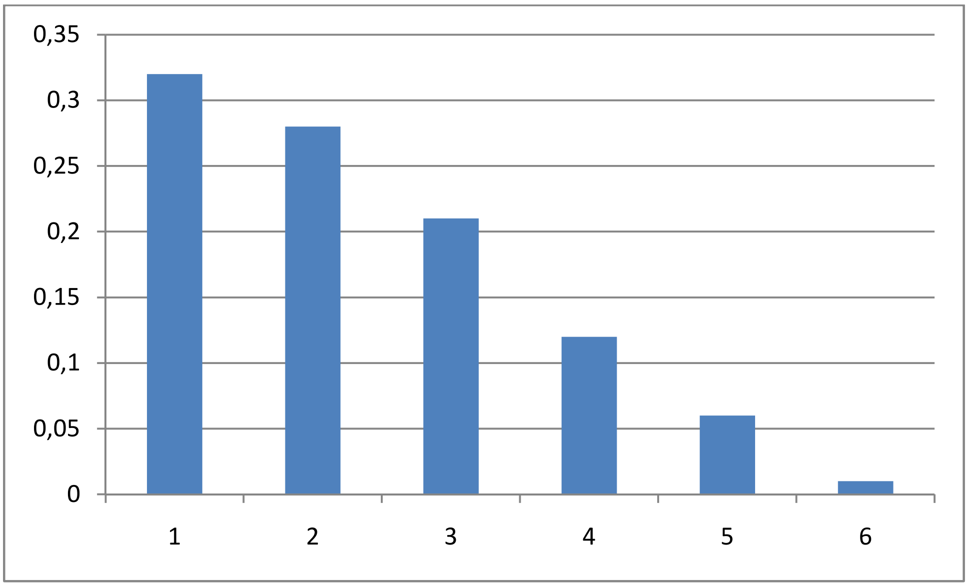
p(x≤4)=p(x=1)+p(x=2)+p(x=3)+p(x=4)=0,93

p(2<x<4)=p(x=3)+p(x=4)=0,33

c) $\mu = 1{\cdot}0{,}32 + 2{\cdot}0{,}28 + 3{\cdot}0{,}21 + 4{\cdot}0{,}12 + 5{\cdot}0{,}06 + 6{\cdot}0{,}01 = 2{,}35$

$\sigma = \sqrt{7{,}11 - 2{,}35^2} = 1{,}26$

d)



2. Distribución binomial o de Bernoulli

La distribución de probabilidad discreta más usada es la distribución binomial o de Bernoulli. Veamos en qué consiste:

2.1. Características de la distribución binomial.

Una distribución binomial es la que cumple las siguientes características:

- Repetimos un experimento n veces de forma idéntica.
- En cada experimento sólo puede haber dos posibles resultados que llamaremos A=éxito, $\bar{A}$=fracaso (ejemplo meter o no un tiro libre). La probabilidad de A la definimos como p(A)=p y la de $\bar{A}$ como p($\bar{A}$)=q=1-p.
- Cada experimento es independiente de los anteriores (el resultado no depende de lo ocurrido anteriormente)

Variable aleatoria binomial: es la que expresa el número éxitos observados en las n experiencias que siguen el modelo de una distribución binomial. Es una variable discreta, que llamaremos X, pues toma los valores, 0,1,2,3…,n-1,n.

Las distribuciones binomiales vienen definidas por el número de experimentos, n, y la probabilidad de acierto, p. Así se designa por ***B(n,p)*** a la distribución binomial con n experimentos y probabilidad p de éxito.

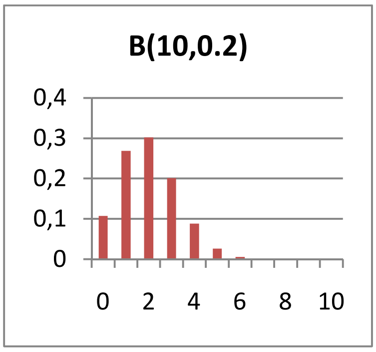
2.2. Función de probabilidad de la probabilidad binomial.

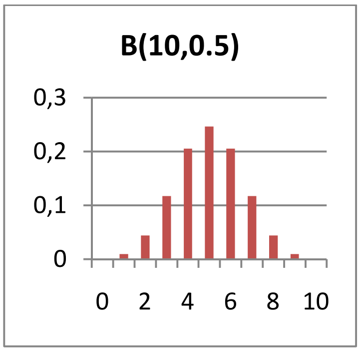
Para ver la probabilidad de que en un experimento necesitamos un poco de combinatoria. Si queremos ver la probabilidad de que en una distribución binomial B(n,p) ocurra r veces A (éxito), es decir X=r tenemos que considerar:

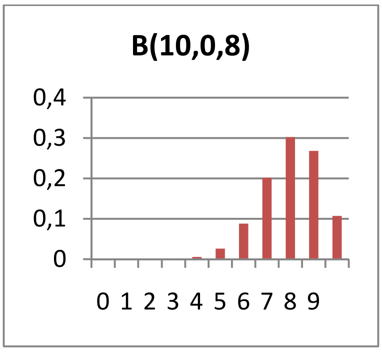
- La probabilidad de que ocurra X=r conocido el orden en el que ocurren los r éxitos y los n-r éxitos (por ejemplo $\overbrace{A,...,A}^{r\ veces},\overbrace{\bar{A},...,\bar{A}}^{n-r\ veces}$) será p($A,...,A,\bar{A},...,\bar{A}$)=$p^r \cdot q^{n-r}$
- Tenemos que ver las distintas formas que tenemos de ordenar los r aciertos y n-r fallos en n experimentos (variaciones con repetición): $VR_n^{r,n-r}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}=\dbinom{n}{r}$

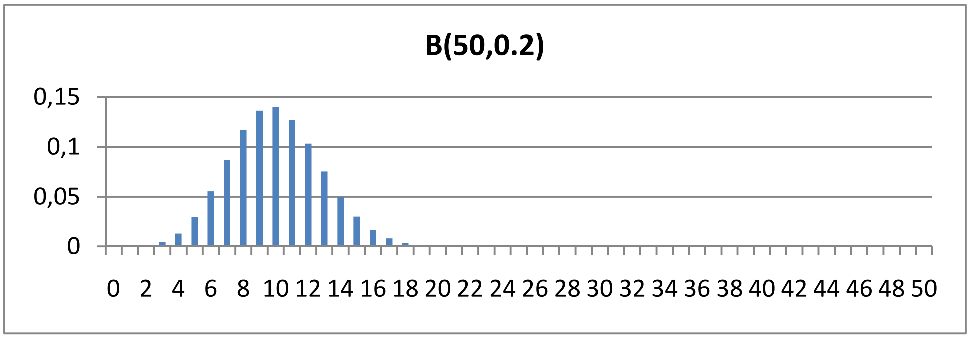
A partir de estas dos consideraciones es fácil ver que la ***probabilidad de que obtener r éxitos es:*** $p(X=r)=\dbinom{n}{r}\cdot p^r\cdot q^{n-r}$

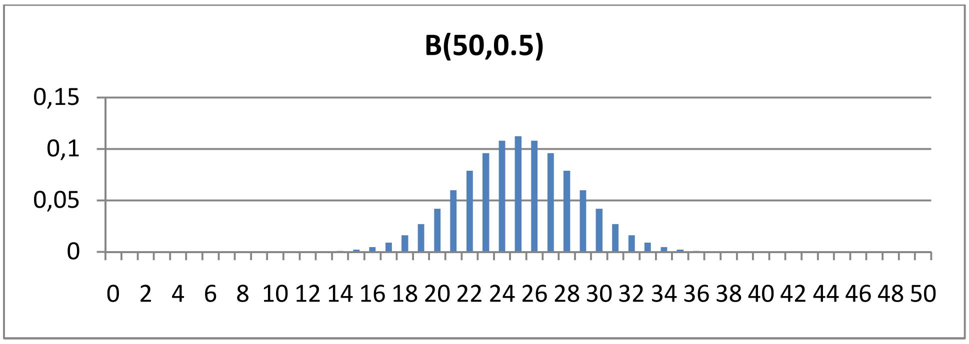
Veamos algunas de los diagramas de probabilidad de las distribuciones binomiales en función de los valores de n y p:











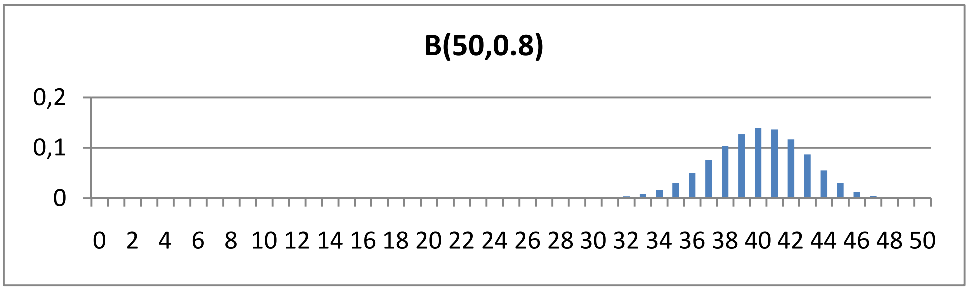


Tabla de Distribuciones binomiales:

Tabla de la distribución binomial

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k\cdot q^{n-k}$$

		p												
n	k	.01	.05	.10	.15	.20	.25	.30	1/3	.35	.40	.45	.49	.50
2	0	.9801	.9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4444	.4225	.3600	.3025	.2601	.2500
	1	.0198	.0950	.1800	.2550	.3200	.3750	.4200	.4444	.4550	.4800	.4950	.4998	.5000
	2	.0001	.0025	.0100	.0225	.0400	.0625	.0900	.1111	.1125	.1600	.2025	.2401	.2500
3	0	.9703	.8574	.7290	.6141	.5120	.4219	.3430	.2963	.2746	.2160	.1664	.1327	.1250
	1	.0294	.1354	.2430	.3251	.3840	.4219	.4410	.4444	.4436	.4320	.4084	.3823	.3750
	2	.0003	.0071	.0270	.0574	.0960	.1406	.1890	.2222	.2389	.2880	.3341	.3674	.3750
	3	.0000	.0001	.0010	.0034	.0080	.0156	.0270	.0370	.0429	.0640	.0911	.1176	.1250
4	0	.9606	.8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1975	.1785	.1296	.0915	.0677	.0625
	1	.0388	.1715	.2916	.3685	.4096	.4219	.4116	.3951	.3845	.3456	.2995	.2600	.2500
	2	.0006	.0135	.0486	.0975	.1536	.2109	.2646	.2963	.3105	.3456	.3675	.3747	.3750
	3	.0000	.0005	.0036	.0115	.0256	.0469	.0756	.0988	.1115	.1536	.2005	.2400	.2500
	4	.0000	.0000	.0001	.0005	.0016	.0039	.0081	.0123	.0150	.0256	.0410	.0576	.0625
5	0	.9510	.7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1317	.1160	.0778	.0503	.0345	.0312
	1	.0480	.2036	.3280	.3915	.4096	.3955	.3602	.3292	.3124	.2592	.2059	.1657	.1562
	2	.0010	.0214	.0729	.1382	.2048	.2637	.3087	.3292	.3364	.3456	.3369	.3185	.3125
	3	.0000	.0011	.0081	.0244	.0512	.0879	.1323	.1646	.1811	.2304	.2757	.3060	.3125
	4	.0000	.0000	.0004	.0022	.0064	.0146	.0284	.0412	.0488	.0768	.1128	.1470	.1562
	5	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0024	.0041	.0053	.0102	.0185	.0285	.0312
6	0	.9415	.7351	.5314	.3771	.2621	.1780	.1176	.0878	.0754	.0467	.0277	.0176	.0156
	1	.0571	.2321	.3543	.3993	.3932	.3560	.3025	.2634	.2437	.1866	.1359	.1014	.0938
	2	.0014	.0305	.0984	.1762	.2458	.2966	.3241	.3292	.3280	.3110	.2780	.2437	.2344
	3	.0000	.0021	.0146	.0415	.0819	.1318	.1852	.2195	.2355	.2765	.3032	.3121	.3125
	4	.0000	.0001	.0012	.0055	.0154	.0330	.0595	.0823	.0951	.1382	.1861	.2249	.2344
	5	.0000	.0000	.0001	.0004	.0015	.0044	.0102	.0165	.0205	.0369	.0609	.0864	.0938
	6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0014	.0018	.0041	.0083	.0139	.0156
7	0	.9321	.6983	.4783	.3206	.2097	.1335	.0824	.0585	.0490	.0280	.0152	.0090	.0078
	1	.0659	.2573	.3720	.3960	.3670	.3115	.2471	.2048	.1848	.1306	.0872	.0603	.0547
	2	.0020	.0406	.1240	.2097	.2753	.3115	.3177	.3073	.2985	.2613	.2140	.1740	.1641
	3	.0000	.0036	.0230	.0617	.1147	.1730	.2269	.2561	.2679	.2903	.2918	.2786	.2734
	4	.0000	.0002	.0026	.0109	.0287	.0577	.0972	.1280	.1442	.1935	.2388	.2676	.2734
	5	.0000	.0000	.0002	.0012	.0043	.0115	.0250	.0384	.0466	.0774	.1172	.1543	.1641
	6	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0013	.0036	.0064	.0084	.0172	.0320	.0494	.0547
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0005	.0006	.0016	.0037	.0068	.0078
8	0	.9227	.6634	.4305	.2725	.1678	.1001	.0576	.0390	.0319	.0168	.0084	.0046	.0039
	1	.0746	.2793	.3826	.3847	.3355	.2670	.1977	.1561	.1373	.0896	.0548	.0352	.0312
	2	.0026	.0515	.1488	.2376	.2936	.3115	.2965	.2731	.2587	.2090	.1569	.1183	.1094
	3	.0001	.0054	.0331	.0839	.1468	.2076	.2541	.2731	.2786	.2787	.2568	.2273	.2188
	4	.0000	.0004	.0046	.0185	.0459	.0865	.1361	.1707	.1875	.2322	.2627	.2730	.2734
	5	.0000	.0000	.0004	.0026	.0092	.0231	.0467	.0683	.0808	.1239	.1719	.2098	.2188
	6	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011	.0038	.0100	.0171	.0217	.0413	.0703	.1008	.1094
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0012	.0024	.0033	.0079	.0164	.0277	.0312
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0002	.0007	.0017	.0033	.0039
9	0	.9135	.6302	.3874	.2316	.1342	.0751	.0404	.0260	.0207	.0101	.0046	.0023	.0020
	1	.0830	.2985	.3874	.3679	.3020	.2253	.1556	.1171	.1004	.0605	.0339	.0202	.0176
	2	.0034	.0629	.1722	.2597	.3020	.3003	.2668	.2341	.2162	.1612	.1110	.0776	.0703
	3	.0001	.0077	.0446	.1069	.1762	.2336	.2668	.2731	.2716	.2508	.2119	.1739	.1641
	4	.0000	.0006	.0074	.0283	.0661	.1168	.1715	.2048	.2194	.2508	.2600	.2506	.2461
	5	.0000	.0000	.0008	.0050	.0165	.0389	.0735	.1024	.1181	.1672	.2128	.2408	.2461
	6	.0000	.0000	.0001	.0006	.0028	.0087	.0210	.0341	.0424	.0743	.1160	.1542	.1641
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0012	.0039	.0073	.0098	.0212	.0407	.0635	.0703
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0009	.0013	.0035	.0083	.0153	.0176
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0003	.0008	.0016	.0020
10	0	.9044	.5987	.3487	.1969	.1074	.0563	.0282	.0173	.0135	.0060	.0025	.0012	.0010
	1	.0914	.3151	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0867	.0725	.0403	.0207	.0114	.0098
	2	.0042	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1951	.1757	.1209	.0763	.0495	.0439
	3	.0001	.0105	.0574	.1298	.2013	.2503	.2668	.2601	.2522	.2150	.1665	.1267	.1172
	4	.0000	.0010	.0112	.0401	.0881	.1460	.2001	.2276	.2377	.2508	.2384	.2130	.2051
	5	.0000	.0001	.0015	.0085	.0264	.0584	.1029	.1366	.1536	.2007	.2340	.2456	.2461
	6	.0000	.0000	.0001	.0012	.0055	.0162	.0368	.0569	.0689	.1115	.1596	.1966	.2051
	7	.0000	.0000	.0000	.0001	.0008	.0031	.0090	.0163	.0212	.0425	.0746	.1080	.1172
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0014	.0030	.0043	.0106	.0229	.0389	.0439
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0005	.0016	.0042	.0083	.0098
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0008	.0010

Ejemplo: P(x=2) en B(3,0.25)

Nota: si p>0,5 se puede usar →1-p tomando x=n-r. Por ejemplo en una Binomial donde p=0,8 y n=10 P(x=2)=0,001 (hemos usado x=8 y p=0,8)

2.3. Parámetros de la distribución binomial.

El valor esperado, esperanza matemática o media es:

$$\mu = n\cdot p$$

La desviación típica viene dada por:

$$\sigma = \sqrt{n\cdot p\cdot q}$$

Ejercicios resueltos:

1. Se supone que la probabilidad de nacer un niño es de 0,5. Cacular la probabilidad de que en una familia de 6 hijos se cumpla:
    a. Todos varones
    b. Al menos dos varones
    c. Tres varones
    d. Calcular la media y la desviación típica

Solución:

Tenemos n=6, A=Varón y $\bar{A}$=mujer→ p(A)=p=0,5 y p($\bar{A}$)=q=1-0,5=0,5. Luego es una binomial B(6,0.5).

a. P(X=6)= $\binom{6}{6}0{,}5^6\cdot 0{,}5^0=0{,}015625$

b. P(X≥2)=1-P(X<2)=1-(P(x=0)+P(X=1))=1- $\binom{6}{0}0{,}5^0\cdot 0{,}5^6-\binom{6}{1}0{,}5^1\cdot 0{,}5^5$ =0,890625

c. P(X=3)= $\binom{6}{3}0{,}5^3\cdot 0{,}5^3=0{,}3125$

d. $\mu=n\cdot p=6\cdot 0{,}5=3$; $\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot q}=\sqrt{6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5}=1{,}225$

2. Tomamos al azar una ficha de dominó y consideramos la variable aleaoria que describe la suma de puntos de la ficha. Calcular la función de probabilidad, su esperanza y su desviación típica:

Solución: E={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}

Espacio muestral	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Sucesos equiprobables	(0,0)	(1,0)	(1,1) (2,0)	(0,3) (1,2)	(0,4) (1,3) (2,2)	(0,5) (1,4) (2,3)	(0,6) (1,5) (2,4) (3,3)	(1,6) (2,5) (3,4)	(2,6) (3,5) (4,4)	(3,6) (4,5)	(4,6) (5,5)	(5,6)	(6,6)
Probabilidad	1/28	1/28	2/28	2/28	3/28	3/28	4/28	3/28	3/28	2/28	2/28	1/28	1/28

$$\mu=0\cdot\frac{1}{28}+1\cdot\frac{1}{28}+2\cdot\frac{2}{28}+3\cdot\frac{2}{28}+4\cdot\frac{3}{28}+5\cdot\frac{3}{28}+6\cdot\frac{4}{28}+7\cdot\frac{3}{28}+8\cdot\frac{3}{28}+9\cdot\frac{2}{28}+10\cdot\frac{2}{28}+11\cdot\frac{1}{28}+12\cdot\frac{1}{28}=6$$

$$\sigma=\sqrt{0\cdot\frac{1}{28}+1\cdot\frac{1}{28}+4\cdot\frac{2}{28}+9\cdot\frac{2}{28}+16\cdot\frac{3}{28}+25\cdot\frac{3}{28}+36\cdot\frac{4}{28}+49\cdot\frac{3}{28}+64\cdot\frac{3}{28}+81\cdot\frac{2}{28}+100\cdot\frac{2}{28}+121\cdot\frac{1}{28}+144\cdot\frac{1}{28}-6^2}=3$$

3. Hallar a, b y c de una función de probabilidad de una variable discreta aleatoria X:

X	0	1	2	3	4	5
P(X)	0,01	a	b	c	0,1	0,09

Sabiendo que la media es 2,45 y $P(2 \leq X \leq 3)=0,6$

Solución

Tenemos tres ecuaciones:

(1) 0,01+a+b+c++0,1+0,09=1 → (1) a+b+c=0,8

(2) μ =0+a+2b+3c+0,4+0,45=2,45 → (2) a+2b+3c=1,6

(3) $P(2 \leq X \leq 3)=0,6=b+c$ → (3) b+c= 0,6

Solución: a=0,2; b=0,4; c=0,2

4. La probabilidad de que un estudiante de un centro escolar obtenga el título de Bachillerato es de 0,7. Calcular las probabilidades de que de un grupo de diez estudiantes a) los diez acaben bachillerato y b)al menos dos acaben bachillerato

Solución: B(10,0.7)

a) $P(X=10)=\binom{10}{10}\cdot 0,7^{10}\cdot 0,3^{0}=0,0282$

b) $P(X\geq 2)=1-(P(X=0)+P(X=1))=1-\binom{10}{0}\cdot 0,7^{0}\cdot 0,3^{10}-\binom{10}{1}\cdot 0,7^{1}\cdot 0,3^{9}=0,99985$

5. Un juego consiste en lanzar dos dados al aire y apostar 1€ llevándose 5€ si se saca una pareja (mismo número en ambos dados). ¿es justo el juego?.

E={11,12,…,66} (36 opciones)
+5€→A=ganar={11,22,33,44,55,66} p(A)=6/36=1/6
-1€→$\bar{A}$=perder p($\bar{A}$)=5/6
Valor esperado de dinero ganado/perdido: $\mu=5\cdot 1/6+(-1)\cdot 5/6=0$€. El juego es justo

Ejercicios propuestos:

1. En una caseta de feria hay una diana con 20 números y el feriante dice "el juego más justo de la feria". Pagando 1€ se lanza un dardo a la diana, si se acierta en el 1 se gana 7€, si es en el 2, 3 o 4 se gana 3€ y en el caso contrario se gana 0,25€. ¿dice la verdad el feriante?
2. Una empresa de estadística te ofrece dos tipos de contratos para un trabajo de encuestador. Después de hacer un minucioso estudio concluyes que:
    a. Contrato 1: tienes una probabilidad de ganar 100 € de 0.9 y de perder 50€ de 0.1
    b. Contrato 2: tienes una probabilidad de ganar 150 € de 0.7 y de perder 100€ de 0.3

    ¿Qué contrato aceptarías?
3. Tráfico ha observado que el 60% de los accidentes de tráfico se producen por conductores que han sobrepasado el nivel de alcohol permitido. En un fin de semana se produjeron 4 accidentes de tráfico. Encontrar la distribución de probabilidad asociada a la variable aleatoria X="nº de conductores que han sobrepasado el límite de alcohol permitido". Hallar $P(X<4)$, la media y la desviación típica.
4. Se tiene una moneda trucada de forma que la probabilidad de sacar cara es cuatro veces la de sacar cruz. Se lanza 6 veces la moneda, calcular las probabilidades a) obtener dos veces cruz, b) Obtener a lo sumo dos veces cruz.
5. El 4% de los disquetes que fabrica una empresa son defectuosos. Los disquetes se distribuyen en cajas de 10 unidades. Hallar la probabilidad de que una caja teng como mínimo 8 discos buenos. ¿cual es el valor esperado desdiscon buenos que tiene la caja?
6. La probabilidad de que un alumno de primero de Bachillerato estudie Matemáticas I es de 0,4. Calcular la probabilidad de que en un grupo de 20 alumnos elegidos al azar haya exactamente 7 que no estudien Matemáticas I.