Tema 8. Matrices.

1. Definiciones, de Matrices y tipos de Matrices

El concepto de Matriz es sencillo, es una tabla con m filas y n columnas de números reales ordenados ($m,n\in N$). Veamos una definición más matemática de las matrices

Definición: se llama matriz de dimensión mxn al conjunto de números reales dispuestos en m filas y n columnas de la siguiente forma:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ con a_{ij}=elemento de la matriz A situado en la fila i y columna j

Muchas veces la matriz A se denota también como $A=(a_{ij})$

Definición: El conjunto de todas las matrices con n filas y m columnas se denota como $\boldsymbol{M_{nxm}(R)}$.

Así $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow A\in M_{2x3}(R)$

Definición: dimensión de una matriz es el número de filas y columnas de la misma, en ejemplo anterior A es de dimensión 2x3

<u>Tipos de matrices:</u>

1. ***Matrices cuadradas:*** son las matrices que tienen igual número de filas que de columnas (m=n), y que como veremos son las únicas que pueden multiplicarse entre si. El conjunto de todas las matrices cuadradas con n filas y columnas se denotan como $M_{nxn}(R)$ o $M_n(R)$.

   Ejemplo: $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B\in M_{2x2}(R)$ ó $B\in M_2(R)$

   Elementos de las matrices cuadradas:
   - <u>Diagonal principal</u>: elementos de la forma a_{ii}, es decir en la diagonal que va desde a_{11} hasta a_{nn}
   - <u>Diagonal secundaria</u>: elementos de la forma a_{ij} donde i+j=n+1, es decir los elementos en la diagonal que va desde a_{1n} hasta a_{n1}

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 1 \\ 8 & 9 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

—— Diagonal principal i=j

- - - - Diagonal secundaria i+j=4+1=5

2. ***Matrices triangulares superiores e inferiores:*** son las matrices cuadradas tal que:
   - *Superior:* elementos debajo diagonal principal son nulos $a_{ij}=0$ si $i>j$
   - *Inferior:* elementos encima de la diagonal principal son nulos $a_{ij}=0$ si $i<j$

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 2\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix} \text{ triangular superior } B=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ -3 & 4 & 5\end{pmatrix} \text{ triangular inferior}$$

3. ***Matrices diagonales***: matrices cuadradas donde todos los elementos fuera de la diagonal son cero.

$$D=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 10 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -5\end{pmatrix}$$

4. ***Matriz escalar:*** matriz diagonal en el que todos los términos de la diagonal son iguales:

$$E=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

5. ***Matriz unidad o matriz identidad:*** matriz escalar cuyos elementos son 1. Se denota como I o Id:

$$I=Id=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \text{ (matriz identidad de orden 2)}$$

$$I=Id=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \text{(matriz identidad de orden 3)}$$

$$I=Id=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \text{(matriz identidad de orden 4)}$$

6. ***Matriz columna:*** toda matriz con una sola columna→ $M_{mx1}(R)$

$$C=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -3\end{pmatrix} \quad C\in M_{3x1}(R)$$

7. ***Matriz fila:*** toda matriz con una única fila → $M_{1xn}(R)$

$$F=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\end{pmatrix} \; F\in M_{1x3}(R)$$

Anotaciones:

- Toda matriz diagonal es triangular, tanto superior como inferior, pues los elementos por encima y por debajo de la diagonal son nulos.

- Toda matriz escalar es diagonal

- La matriz identidad es una matriz escalar

Ejercicios,

1. Escribir matrices de los siguientes tipos:

a) De dimensión 3x2
b) Cuadrada de dimensión 4
c) Triangular inferior de dimensión 3
d) Diagonal de dimensión 4
e) ¿Qué tipo de matriz es de dimensión 1x1? Pon un ejemplo. ¿Cuál será la matriz identidad de dimensión 1?

2.Decir que tipo de matrices y de que dimensión son las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Soluciones:

1.

a. $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 0 \\ -3 & 8 & 11 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

e. 1 fila y una columna → los números reales $M_{1x1}(R)=R$, ejemplos 2,-1.3, y la identidad es 1.

2.

a. Matriz cuadrada, triangular superior, dimensión 3x3($M_{3x3}(R)$) o cuadrada de dimensión 3.
b. Matriz columna de dimensión 4x1 ($M_{4x1}(R)$)
c. Matriz rectangular de dimensión 2x3 ($M_{2x3}(R)$)
d. Matriz cuadrada, escalar de dimensión 3x3 ($M_{3x3}(R)$) o simplemente matriz cuadrada de dimensión 3.

2. Operaciones con matrices

2.1 Igualdad de matrices

Definición: dos matrices M y N se dicen que son iguales (M=N) si se cumplen:
- misma dimensión
- elementos que ocupan el mismo lugar son iguales.

2.2 Suma de matrices

Solo se pueden sumar matrices de la misma dimensión, veamos en que consiste la suma de matrices:

Definición: la suma de dos matrices de dimensión A y B es otra matriz que se denota como A+B con misma dimensión que las otras dos y definida como $A+B=(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})$, es decir A+B se obtiene sumando los elementos que ocupan la misma posición en las dos matrices. Veamos un ejemplo de dos matrices $A,B\in M_{2x3}(R)$

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$$

Propiedades de la suma de matrices: como la suma de matrices definidas a partir de la suma de números reales cumple las mismas propiedades que estos, es decir:

- Asociativa: A+(B+C)=(A+B) +C
- Elemento neutro A+0=A, con O la matriz de igual dimensión que A con todos coeficientes igual a cero
- Elemento opuesto: A+(-A)=0, con $(-A)=(-a_{ij})$ es decir los elementos opuestos a los de la matriz A. Ejemplo:
$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ -A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$
- Conmutativa: A+B=B+A

2.3 Producto de una matriz por un número (escalar)

Definición: Sea $k\in R$ (escalar) y $A=(a_{ij})$ una matriz de dimensión mxn ($A\in M_{mxn}(R)$) el producto de k por A es otra matriz $k\cdot A$ de misma dimensión tal que:

$k\cdot A=k(a_{ij})=(k\cdot a_{ij})$, es decir la matriz $k\cdot A$ se obtiene de multiplicar por k cada elemento de la matriz A.

Veamos un ejemplo cuando $A\in M_{3x3}(R)$: $k\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}$

Propiedades:

- $k(A+B)=kA+kB$

  $$3\cdot\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 21 \end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

- $(k+t)\cdot A=k\cdot A+t\cdot A$

- $k(tA)=(kt)\cdot A$

- $1\cdot A=A$

Ejercicio: sacar factor común un escalar de las siguientes matrices de forma que éstas se simplifiquen

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 \\ 0 & 4 & 16 \\ 12 & 0 & 0 \end{pmatrix}=4\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} 36 & 12 \\ -48 & 48 \end{pmatrix}=12\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}=11\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=11\cdot Id$$

Nota: siempre que de forma sencilla se pueda sacar factor común, simplificando la matriz, se recomienda sacar éste, ya que se simplifican los cálculos, especialmente en la multiplicación de matrices, como veremos en el apartado siguiente.

Ver actividades resueltas de la página 13.

Ejercicio 1 pag 30

$$\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+5 & 7+a+b \\ -2+c+d & 3d+4 \end{pmatrix}$$

2a=a+5 → a=5
2b=7+a+b → b=12
2c=-2+c+d → c=d-2 →c=-6
2d=3d+4 → d=-4

Ejercicio 2 pag 30

A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

a) A+B=$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

b) A-B-C=$\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

c) 3A+5B-6C=$\begin{pmatrix} 29 & -15 \\ 7 & -25 \end{pmatrix}$

Ejercicio 11 pag 30

a) $\left.\begin{array}{l} (1)\ 2X+Y=A \\ (2)\ X-3Y=B \end{array}\right\}$

(1)-2·(2) → Y+6Y=A-2B → Y=1/7(A-2B)=$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 9 & 8 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

X=B+3Y=$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\left.\begin{array}{l} (1)\ X+Y=A \\ (2)\ X-Y=B \end{array}\right\}$

(1)+(2)→ 2X=A+B → X=1/2(A+B)=$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Y=A-X=$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\left.\begin{array}{l} (1)\ 2X+Y=A \\ (2)\ X+2Y=B \end{array}\right\}$

(1)-2(2)→ -3Y=A-2B → Y=-1/3(A-2B)= $-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}$

X=B-2Y=$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$

3. Producto de Matrices

El producto de matrices es una operación más compleja que las anteriores. Para poder multiplicar dos matrices es necesario que el nº de columnas de la primera matriz del producto sea igual al nº de filas de la segunda matriz. Veamos la definición del producto de matrices:

Definición: El producto de la matriz $A=(a_{ij})\in M_{mxn}$ y $B=(b_{ij})\in M_{nxp}$ es otra matriz $C=A\cdot B\in M_{mxp}$, con igual nº de filas que A y de columnas que B, tal que el elemento de la matriz C que ocupa la fila i y columna j, c_{ij} se obtiene multiplicando la fila i-esima de la primera matriz con la columna j-ésima de la segunda.

Resulta más sencillo comprender el producto de matrices a partir de varios ejemplos:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot0+3\cdot(-1)\\4\cdot1+5\cdot0+6\cdot(-1)\\7\cdot1+8\cdot0+9(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

3x3 3x1 3x1

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\3&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2(-1)+3\cdot3&1\cdot0+2\cdot2+3\cdot(-4)\\4\cdot1+5\cdot(-1)+6\cdot3&4\cdot0+5\cdot2+6\cdot(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&-8\\17&-14\end{pmatrix}$$

2x3 3x2 2x2

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$$

No se puede multiplicar, pues la primera matriz tiene 3 columnas y la segunda 2 filas.

Veamos la utilidad de sacar factor común en el producto de matrices con un ejemplo:

$$\begin{pmatrix}50&0\\100&50\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&30\\30&-90\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}50\cdot0+30\cdot0&50\cdot30+0\cdot(-90)\\100\cdot0+30\cdot50&30\cdot100+50\cdot(-90)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1500\\1500&-1500\end{pmatrix}$$

Más simple→ $50\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\cdot30\begin{pmatrix}0&1\\1&-3\end{pmatrix}=1500\begin{pmatrix}1\cdot0+0\cdot1&1\cdot1+0\cdot(-3)\\0\cdot2+1\cdot1&1\cdot2+1(-3)\end{pmatrix}=1500\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}$

Ejercicio 4 pag 30, ver que productos son posibles:

$A\in M_{3x3}$, $B\in M_{3x1}$, $C\in M_{2x3}$, solo posibles los siguientes productos:

$$A\cdot B=\underset{3x3}{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}}\cdot\underset{3x1}{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}1+4+3\\1+2+1\\0+2-1\end{pmatrix}=\underset{3x1}{\begin{pmatrix}8\\4\\1\end{pmatrix}}$$

$$C\cdot A=\underset{2x3}{\begin{pmatrix}2&1&0\\3&4&5\end{pmatrix}}\cdot\underset{3x3}{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}2+1+0&4+1+0&6+1+0\\3+4+0&6+4+5&9+4-5\end{pmatrix}=\underset{2x3}{\begin{pmatrix}3&5&7\\7&15&8\end{pmatrix}}$$

$$C\cdot B=\underset{2x3}{\begin{pmatrix}2&1&0\\3&4&5\end{pmatrix}}\cdot\underset{3x1}{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}2+2++0\\3+8+5\end{pmatrix}=\underset{2x1}{\begin{pmatrix}4\\16\end{pmatrix}}=4\cdot\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$$

Ejercicio: multiplicar A·B y B·A, ¿Qué ocurre?

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\ B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&0&0\\1&2&3\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&0&0\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&6&8\\20&12&14\\32&18&20\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&0&0\\1&2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&-6&-6\\2&4&6\\30&36&42\end{pmatrix}$$

Notese que en las matrices cuadradas, no siempre cumplen que A·B≠B·A, es decir no se cumple la propiedad conmutativa del producto de matrices.

Existen algún tipo de matrices que si conmutan, A·B=B·A, si esto ocurre se dice que A y B conmutan

Ejercicio 3 pagina 15

$$A^2=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\2&1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\2&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&2\\2&2&0\\0&4&2\end{pmatrix}$$ nótese que no coincide con elevar al cuadrado cada término de A

$$B^2=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 5 & 2\\ -1 & 0 & -2\\ -2 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^2-B^2=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 5 & 2\\ -1 & 0 & 2\\ -2 & 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$(A+B)^2=(A+B)\cdot(A+B)=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ -1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ -1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 15 & 5\\ -1 & 4 & 0\\ -1 & 12 & 7\end{pmatrix}$$

$$(A-B)^2=(A-B)\cdot(A-B)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 2\\ 3 & 0 & -4\\ -3 & 4 & -1\end{pmatrix}$$

Nota: al no ser conmutativo el producto de las matrices se cumple que las desigualdad notable no son ciertas cuando A y B son matrices →

$(A+B)^2=A^2+B^2+AB+BA\neq A^2+B^2+2AB$

$(A-B)^2=A^2+B^2-AB-BA\neq A^2+B^2-2AB$

Ejercicio 5 página 15

a) $\begin{pmatrix}1 & x\\ 2 & y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+3x & y+4x\\ 2x+3y & 2y+4y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}4x=0\\ y+4x=0\\ 2x+3y=0\\ 6y=0\end{cases}\rightarrow$ **x=y=0**

b) $\begin{pmatrix}5 & x\\ y & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-x & 2\\ 5 & -y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5x+5x & 10-xy\\ 10-xy & 2y-2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 10-xy\\ 10-xy & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\rightarrow$

10-xy=0→ **x·y=10**

Ejercicio 5 página 30

a) Falsa AB≠BA $(A+B)^2=A^2+B^2+AB+BA\neq A^2+B^2+2AB$

b) Falsa AB≠BA $(A-B)^2=A^2+B^2-AB-BA\neq A^2+B^2+2AB$

c) Falsa AB≠BA $(A+B)(A-B)=A^2-B^2-AB+BA$

Ejercicio 6 página 30

a) Si conmutan se cumple que AB=BA →

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}x+z & y+t\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & x+y\\ z & z+t\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{c}x+z=x\\ y+t=x+y\\ z=z\\ t=z+t\end{array}\right\}\ z=0, x=t, y\ cualquiera\rightarrow\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & x\end{pmatrix} conmuta\,con\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ \forall x,y\in R$$

b)

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} b+c & c & 0 \\ e+f & f & 0 \\ h+i & i & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ a+d & b+e & c+f \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{c} b+c=0 \\ c=0 \\ e+f=a \\ f=b \\ c=0 \\ h+i=a+d \\ 0=0 \\ i=b+e \\ 0=c+f \end{array}\right\}\rightarrow c=0, b=0, f=0, e=a=i, d=h\rightarrow\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & a & 0 \\ g & d & a \end{pmatrix} \textit{conmuta con} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \forall a,d,g\in R$$

Ejercicio 9 página 30

Veamos lo que vale A^2, A^3, y a partir de sus valores busquemos el valor de A^n:

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-Id$$

$A^3=A\cdot A^2=A\cdot(-Id)=-A$

$A^4=A^2\cdot A^2=(-Id)(-Id)=Id$

$A^5=A^4\cdot A=Id\cdot(A)=A$

…

$$A^n=\begin{cases} A & n=1+4i \quad \textit{el resto de dividir } n \textit{ entre } 4 \textit{ es } 1 \\ -Id & n=2+4i \quad \textit{el resto de dividir } n \textit{ entre } 4 \textit{ es } 2 \\ -A & n=3+4i \quad \textit{el resto de dividir } n \textit{ entre } 4 \textit{ es } 3 \\ Id & n=4i \quad \textit{el resto de dividir } n \textit{ entre } 4 \textit{ es } 0 \end{cases}$$

Así $A^{50}=-Id$ ya que el resto de dividir 50 entre 4 es 2.

$A^{97}=A$ ya que el resto de dividir 97 entre 4 es 1

Ejercicio 12 página 31

a)

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+1 & 1+1 \\ 1+1 & 1+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=2\cdot A$$

$$A^3=A^2\cdot A=2A\cdot A=2\cdot A^2=2\cdot 2\cdot A=4\cdot A=\begin{pmatrix} 2^2 & 2^2 \\ 2^2 & 2^2 \end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3\cdot A=4\cdot A\cdot A=8\cdot A$$

…

$$A^n=2^{n-1}\cdot A=\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

b)

$$A^2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2+1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3\cdot A=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3+1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}$$

…

$$A^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$$

d)

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

…

$$A^n=\begin{pmatrix}1&0&n\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Ejercicio 16 página 31

c) Si A y B conmutan → A·B=B·A
si A y C conmutan → A·C=C·A
(B·C)·A=B·(C·A)=B·(A·C)=(B·A)·C=(A·B)·C=A·(B·C)

Ejercicio 21 página 31

Sea $A\in M_{mxn}(R)$ y $B\in M_{pxq}(R)$.
Si existe A·B → n=p
Si existe B·A → q=m
Sólo existe A·B y B·A si $A\in M_{mxn}$ y $B\in M_{nxm}$. Un caso particular es cuando m=n, es decir las dos matrices son matrices cuadradas.

4. Transposición de Matrices. Matriz simétricas y antisimétricas

Definición: sea una matriz $A\in M_{mxn}(R)$ se llama matriz transpuesta y se escribe como $A^t\in M_{nxm}(R)$ que resulta de cambiar las filas por las columnas.

Ejemplos:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\quad A^t=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \quad B^t=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{pmatrix} \quad C^t=\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\2 & 5 & 8\\3 & 6 & 9\end{pmatrix}$$

Propiedades:

1. $(A^t)^t=A$
2. $(A+B)^t=A^t+B^t$
3. $(k\cdot A)^t=kA^t$
4. $(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t$

Las transposiciones de matrices nos permiten definir dos tipos de matrices: simétricas y antisimétricas. Definámoslas:

Matrices simétricas: es toda matriz cuadrada $A\in M_{nxn}(R)$ tal que coincide con su transpuesta A^t → $A=A^t$, es decir los elementos simétricos respecto a la diagonal son iguales, veamos un ejemplo de dimensión 3:

$$A=\begin{pmatrix}a & x & y\\x & b & z\\y & z & c\end{pmatrix} \quad A^t=\begin{pmatrix}a & x & y\\x & b & z\\y & z & c\end{pmatrix}$$

Matrices antisimétricas: es toda matriz cuadrada $A\in M_{nxn}(R)$ tal que coincide con el opuesto de su transpuesta $-A^t$ → $A=-A^t$, es decir los elementos simétricos respecto a la diagonal son opuestos, y los de la diagonal son cero. Veamos un ejemplo de dimensión 3:

$$A=\begin{pmatrix}0 & x & y\\-x & 0 & z\\-y & -z & 0\end{pmatrix} \quad A^t=\begin{pmatrix}0 & -x & -y\\x & 0 & -z\\y & z & 0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0 & x & y\\-x & 0 & z\\-y & -z & 0\end{pmatrix}=-A$$

Ejercicios:

1. Demostrar las propiedades de matrices determinantes a partir de las siguientes matrices:

A=$\begin{pmatrix}-1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$ y B=$\begin{pmatrix}1 & 3\\4 & 5\end{pmatrix}$

P1: $\left(A^t\right)^t=\begin{pmatrix}-1 & 3\\2 & 4\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}-1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$

P2: $(A+B)^t=\left(\begin{pmatrix}-1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 3\\4 & 5\end{pmatrix}\right)^t=\begin{pmatrix}0 & 5\\7 & 9\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}0 & 7\\5 & 9\end{pmatrix}=A^t+B^t=\begin{pmatrix}-1 & 3\\2 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 4\\3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 7\\5 & 9\end{pmatrix}$

P3: (k·A)^t=$\left(k\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\right)^t=\begin{pmatrix}-k & 2k\\ 3k & 4k\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}-k & 3k\\ 2k & 4k\end{pmatrix}\leftrightarrow kA^t=k\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k & 3k\\ 2k & 4k\end{pmatrix}$

P4:(A·B)^t=$\left(\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}\right)^t=\begin{pmatrix}7 & 7\\ 19 & 29\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}7 & 19\\ 7 & 29\end{pmatrix}\leftrightarrow B^t\cdot A^t=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 19\\ 7 & 29\end{pmatrix}$

2. Escribir una matriz simétrica y antismétrica de dimensión 2,3 y 4.

$$simétrica\quad S=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\qquad antismétrica\quad A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

$$simétrica\quad S=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -3 & 9\\ 3 & 9 & 5\end{pmatrix}\qquad antismétrica\quad A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ -2 & 0 & 9\\ -3 & -9 & 0\end{pmatrix}$$

$$simétrica\quad S=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 3 & 6 & 2\\ 4 & 6 & 2 & 0\\ 5 & 2 & 0 & 7\end{pmatrix}\quad antisimétrica\quad A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 4 & 5\\ -2 & -4 & 0 & 6\\ -3 & -5 & -6 & 0\end{pmatrix}$$

3. Encontrar todas las matrices A, antisimétricas y S simétricas de orden 2 que verifican A^2=Id

Si A es antisimétrica es de la siguiente forma $A=\begin{pmatrix}0 & x\\ -x & 0\end{pmatrix}$, ∀x∈R

$A^2=\begin{pmatrix}0 & x\\ -x & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & x\\ -x & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x^2 & 0\\ 0 & -x^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ → $-x^2=1$ imposible, es decir no hay ninguna matriz antismétrica de orden 2 que al cuadrado sea igual a la Id.

Si S es simétrica es de la siguiente forma $S=\begin{pmatrix}y & x\\ x & z\end{pmatrix}$, ∀x,y,z∈R

$S^2=\begin{pmatrix}y & x\\ x & z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y & x\\ x & z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2+y^2 & yx+xz\\ yx+xz & x^2+z^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ →

$\left.\begin{array}{l}(1)\ x^2+y^2=1\\ (2)\ x^2+z^2=1\\ (3)\ yx+xz=0\end{array}\right\}$ de la ecuación 3 obtenemos x(y+z)=0 → x=0 o y=-z

caso 1: x=0 → y=±1, z=±1

$S_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, S_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, S_3=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, S_4=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

caso 2: y=-z → $x^2+y^2=1$ x=$\pm\sqrt{1-y^2}$

$S_5=\begin{pmatrix}y & \sqrt{1-y^2}\\ \sqrt{1-y^2} & -y\end{pmatrix},\quad S_6=\begin{pmatrix}y & -\sqrt{1-y^2}\\ -\sqrt{1-y^2} & -y\end{pmatrix}$ se cumple siempre que $-1\le y\le 1$ (radicando positivo).

4. Descomponer toda matriz cuadrada como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica

Sea $B\in M_{nxn}$ la matriz cuadrada, veamos las siguientes matrices:

S=$\frac{B+B^t}{2}$ → demostremos que es simétrica $S^t=\left(\frac{B+B^t}{2}\right)^t=\frac{B^t+B}{2}=S$

A=$\frac{B-B^t}{2}$ → demostremos que es antisimétrica $A^t=\left(\frac{B-B^t}{2}\right)^t=\frac{B^t-B}{2}=-\frac{B-B^t}{2}=-A$

Tendremos que comprobar que la suma de A y S suman B:

$A+S=\frac{B-B^t}{2}+\frac{B+B^t}{2}=B$

5. Matriz inversa

5.1 Definición

Definición: la matriz inversa de una matriz cuadrada $A\in M_{nxn}(R)$ es otra matriz cuadrada de misma dimensión que se denota como $A^{-1}\in M_{nxn}(R)$ tal que se cumple:
$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=Id$ con $Id\in M_{nxn}(R)$

No todas las matrices cuadradas tienen inversa, así las matrices que tiene inversa se llaman **matrices regulares** y las que no tienen inversa se denominan **matrices singulares.**

5.2 Calculo de la inversa

El método más sencillo para el cálculo de la inversa lo veremos en el tema siguiente, cuando definamos el determinante de las matrices.

Para matrices 2x2 podemos calcular la inversa a partir de la definición:
Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix} \quad A^{-1}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$$

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2x+2z & 2y+2t\\ 3x+7z & 3y+7t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Tenemos 4 ecuaciones con 4 incógnitas, donde son dos pares de ecuaciones cruzadas:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ 2x+2z=1\\ (2)\ 2y+2t=0\\ (3)\ 3x+7z=0\\ (4)\ 3y+7t=1\end{array}\right\}$$

Los sistemas son:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ 2x+2z=1\\(3)\ 3x+7z=0\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}(2)\ 2y+2t=0\\(4)\ 3y+7t=1\end{array}\right\}$$

Las soluciones son x=7/8, y=-1/4, z=-3/8 y t=1/4, con lo que $A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}7 & -2\\-3 & 2\end{pmatrix}$

Comprobación: $A\cdot A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}8 & 0\\0 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=Id$

Ejercicio 17. Calcular la inversa de las siguientes matrices

a) $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\2 & 0\end{pmatrix}$ $A^{-1}=\begin{pmatrix}x & y\\z & t\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0 & 1\\2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z & t\\2x & 2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

(1) z=1
(2) t=0
(3) 2x=0
(4) 2y=1

Soluciones x=t=0 y=1/2 z=1 → $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\1 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\2 & 0\end{pmatrix}$

Comprobación: $A\cdot A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=Id$

b) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$ $A^{-1}=\begin{pmatrix}x & y\\z & t\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2z & y+2t\\3x+4z & 3y+4t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ x+2z=1\\(2)\ y+2t=0\\(3)\ 3x+4z=0\\(4)\ 3y+4t=1\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ x+2z=1\\(3)\ 3x+4z=0\end{array}\right\}\qquad x=-2,\ z=3/2$$

$$\left.\begin{array}{l}(2)\ y+2t=0\\(4)\ 3y+4t=1\end{array}\right\}\qquad y=1,\ t=-1/2$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$$

c) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 8\end{pmatrix}$ $A^{-1}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2z & y+2t\\ 4x+8z & 4y+8t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

(1) x+2z=1
(2) y+2t=0
(3) 4x+8z=0
(4) 4y+8t=1

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ x+2z=1\\ (3)\ 4x+8z=0\end{array}\right\}\text{ no solución}$$

$$\left.\begin{array}{l}(2)\ y+2t=0\\ (4)\ 4y+8t=1\end{array}\right\}\text{ no solución}$$

Luego la matriz A no tiene inversa, por lo que es una matriz singular .

6. Resolución de ecuaciones matriciales

6.1 Definición

Definición: son ecuaciones algebraicas donde los coeficientes y las incógnitas son matrices.

Ejemplos

(PAU JUN 2004 PRUEBA A, C-4) → $X\cdot B+B=B^{-1}$ siendo $B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

(PAU SEP 2004 PRUEBA B, C-1)→ $P^{-1}\cdot B\cdot P=A$ siendo $P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

6.2 Resolución de ecuaciones.

Tenemos que obtener la matriz incógnita, que generalmente se denota como X, despejándola de la igualdad. Para conseguirlo tenemos las siguientes reglas:

1) Si una matriz está sumando a un lado de la igualdad pasa restando al otro lado de la igualdad y al revés.
   X+B=C → X=C-B
   X-B=C → X=C+B

2) Si multiplicamos una matriz por la izquierda a un lado de la igualdad también lo tenemos que hacer en el otro lado de la igualdad por la izquierda. Iden por la derecha.
   $A\cdot X=B \rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B \rightarrow Id\cdot X=A^{-1}\cdot B \rightarrow X=A^{-1}\cdot B$
   $X\cdot A=B \rightarrow X\cdot A\cdot A^{-1}=B\cdot A^{-1} \rightarrow X\cdot Id=B\cdot A^{-1} \rightarrow X=B\cdot A^{-1}$

Ejemplo: veamos la resolución de los dos anteriores ejemplos:

(PAU JUN 2004 PRUEBA A, C-4)

$X\cdot B+B=B^{-1} \xrightarrow{\text{pasamos } B \text{ otro miembro}} X\cdot B=B^{-1}-B \xrightarrow{\text{multiplicamos por } B^{-1} \text{ a la derecha}} X\cdot B\cdot B^{-1}=(B^{-1}-B)\cdot B^{-1}$

$X\cdot Id=(B^{-1}-B)\cdot B^{-1} \rightarrow X=B^{-1}\cdot B^{-1}-B\cdot B^{-1}= B^{-1}\cdot B^{-1}-Id$

Calculando B^{-1} tenemos que $B^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ con lo que $X=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}=4\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(PAU SEP 2004 PRUEBA B, C-1)

$P^{-1}\cdot B\cdot P=A \xrightarrow{\text{multiplicamos por } P \text{ por la izquierda}} P\cdot P^{-1}\cdot B\cdot P=P\cdot A \rightarrow Id\cdot B\cdot P=A\cdot P \rightarrow B\cdot P=P\cdot A$

$\xrightarrow{\text{multiplicamos por } P^{-1} \text{ por la derecha}} B\cdot P\cdot P^{-1}=P\cdot A\cdot P^{-1} \rightarrow B=P\cdot A\cdot P^{-1}$

Calculando $P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ tenemos que la matriz B buscada es:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicios: actividades propuestas en la PAU:

Junio 2006. Prueba A C-1

$A\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot A$ → es equivalente a ver las matrices que conmutan con $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Por resolución de ecuaciones no podemos obtenerla, ya que no podemos despejar A, ya que para eliminarla del primer miembro deberíamos multiplicar por A^{-1}, pero entonces tendríamos A y A^{-1} en el segundo miembro.

Para solucionar esto definamos la matriz X como $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Multiplicando por A tenemos: $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x+y & y \\ z+t & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \\ x+z & y+t \end{pmatrix} \rightarrow$

(1) x+y=x → y=0
(2) y=y
(3) z+t=x+z →t=x
(4)y+t=t →y=0

Luego A será toda matriz $A=\begin{pmatrix} x & 0 \\ z & x \end{pmatrix}$ $\forall x,z\in R$.

Comprobación:

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ z & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ x+z & x \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ x+z & x \end{pmatrix}$$

Junio 2005. Prueba B C-1

$XC+A=C+A^2$ siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$XC+A=C+A^2 \xrightarrow{\textit{pasamos A al otro miembro}} XC=C+A^2-A \xrightarrow{\textit{multiplicamos por } C^{-1} \textit{ por la derecha}}$
$XC\cdot C^{-1}=(C+A^2-A)\cdot C^{-1} \rightarrow X=(C+A^2-A)\cdot C^{-1} \rightarrow X=Id+(A^2-A)\cdot C^{-1}$

Calculemos $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=A$. Luego sustituyendo $A^2=A$ en la ecuación matricial tenemos:

$X=Id+(A-A)\cdot C^{-1}=Id$

$X=Id=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Actividades resueltas del libro, pag 29, 4 y 5→ mirar.

Ejercicio 31

Las matrices A tal que $A^2=A$ se llaman idelpotentes :

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ba+bc \\ ab+bc & c^2+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ a^2+b^2=a \\ (2)\ ba+bc=b \\ (3)\ ba+bc=b \\ (4)\ c^2+b^2=c \end{array}\right\} \rightarrow \text{(2) y (3) son iguales } b=b(a+c) \rightarrow \text{caso 1: } a=1-c \text{ ; caso 2 } b=0$$

Caso 1 a=1-c

Sustituyendo en (1) $(1-c)^2+b^2=(1-c)$ → $b=\pm\sqrt{c-c^2}$

A=$\begin{pmatrix} 1-c & \pm\sqrt{c-c^2} \\ \pm\sqrt{c-c^2} & c \end{pmatrix}$ ∀ c∈[0,1] (que son los valores de c donde radicando positivo)

$A_1=\begin{pmatrix} 1-c & \sqrt{c-c^2} \\ \sqrt{c-c^2} & c \end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix} 1-c & -\sqrt{c-c^2} \\ -\sqrt{c-c^2} & c \end{pmatrix}$

Caso 2 b=0

Sustituyendo en (1) → $a^2=a$ a=1,0

Sustituyendo en (4) → $c^2=c$ c=1,0

Esto nos genera 4 soluciones:

$A_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_5=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_6=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 32

$(A-kId)^2=0$

$$(A-kId)=\begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix}$$

$$(A-kI)^2=\begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} k^2-1 & 2k-2 & 4k-4 \\ 2k-2 & k^2-1 & 4k-4 \\ -2k+2 & -2k+2 & 5-6k+k^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos 9 ecuaciones con una incógnita, todas las ecuaciones tienen una solución común **k=1.**

Ejercicio 33

$B(2A+Id)=AXA+B \xrightarrow{\text{pasamos } B \text{ otro miembro}} B(2A+Id)-B=AXA \rightarrow 2BA=AXA$

$\xrightarrow{\text{multiplicamos por } A^{-1} \text{ por izquierda}} 2A^{-1}BA= A^{-1}AXA \rightarrow 2A^{-1}BA = XA \xrightarrow{\text{multiplicamos } A^{-1} \text{ por la derecha}}$

$2A^{-1}BA\,A^{-1}= XAA^{-1} \rightarrow 2A^{-1}B = X$

Calculando A^{-1} tenemos $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$

$$X=2A^{-1}B=2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -8 & 14 \\ -6 & -18 & 32 \\ 4 & 14 & -26 \end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix} -1 & -4 & 7 \\ -3 & -9 & 16 \\ 2 & 7 & -13 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 36

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$$

$$A^2\text{-}A\text{-}2Id=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$A^2\text{-}A\text{-}2Id=0 \rightarrow A^2\text{-}A=2Id \rightarrow A(A\text{-}Id)=2Id \rightarrow A\dfrac{(A - Id)}{2}=Id \rightarrow A^{-1}=\dfrac{(A - Id)}{2}$

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

Ejercicio 39

a) $A=\begin{pmatrix}x&0\\0&y\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}z&0\\0&t\end{pmatrix} \rightarrow A\cdot B=\begin{pmatrix}xz&0\\0&yt\end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}xz&0\\0&yt\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}x&0\\0&y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x&0\\0&y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2&0\\0&y^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \rightarrow x^2=1,\ y^2=1 \rightarrow x=\pm1,\ y=\pm1$

Luego hay 4 soluciones: $A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$