Tema 1.EL NUMERO NATURAL. SISTEMAS DE NUMERACIÓN.

1. Introducción.

- Concepto intuitivo de número natural.
 - Niño de 5 años sabe su edad.
 - Concepto numero natural se puede remontar a los albores de la raza humana.
- La complicación de los naturales es su representación simbólica.
 - En la actualidad tribus no distinguen entre la unidad y más de la unidad
 - Dificultad de expresar ∞ números con un número finito de símbolos.
 - Al principio de los tiempos identificaban los números con correspondencias biunívocas (7 bisones $\rightarrow$ 7 muescas, 3 dedos $\rightarrow$ 3 lobos...).
 - La importancia del código decimal es debida a los 10 dedos de las manos.
- Cuando nos referimos a números naturales hay que darse cuenta de dos aspectos:
 - Cardinal: emparejamiento de conjuntos (5 dedos=5 años)
 - Ordinal: principio de sucesión y conceptos siguiente y anterior.
 - Ambos conceptos relacionados entre sí (para saber el cardinal de un conjunto lo que hacemos es contar, es decir ordenarlos del primero al último).
- El concepto intuitivo de N es sencillo, no tanto su construcción matemática. Dos vías:
 - Axiomática: seguido por Peano y Schopenhaver. Basado en concepto ordinal de los N. Un N es conocido si conocemos los anteriores
 - Teoría de clases: Cantor y Rusell. Basado en el concepto cardinal de los N.
- En el tema desarrollaremos la vía axiomática desarrollada por Peano (fines s XIX)

2. Construcción axiomática de los N y sus operaciones.

2.1. Sistema axiomático de Peano.

- Nota: supondremos conocidos los símbolos para los números $\{0,1,2,\dots\}$ cuya notación estudiaremos más adelante en los sistemas de numeración.
- Para construir N tenemos 5 axiomas:
 - Ax1: El cero (ausencia de todo) pertenece a N
 - Ax2: Todo natural n tiene sucesor que denotamos como n^+ ($\forall n \in \mathbb{N} \exists n^+ \in \mathbb{N}$)
 - Ax3: El cero no es sucesor de ningún N
 - Ax4: Si dos N tienen mismo sucesor estos son el mismo. ($n^+=m^+ \rightarrow n=m$)
 - Ax5: Si un subconjunto, $A \subseteq \mathbb{N}$, contiene al cero y al sucesor de cualquier natural entonces es $A=\mathbb{N}$.
 - Nota: llamamos σ a la aplicación sucesor: $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\} : \sigma(n) = n^+$
- Observaciones:
 - Peano considero el 1 como el primer N y no el 0.
 - El Ax1 nos garantiza que $\mathbb{N} \neq \emptyset$
 - Mediante Ax2 podemos construir de forma iterativa los N
 - Los Ax3 y Ax4 nos garantiza que los N sea infinitos y únicos:
 - N podía ser $\mathbb{N} = \{0, 0^+ = 1, 1^+ = 0\}$. Pero 0 no sucesor de ninguno (ax3).
 - $\mathbb{N} = \{0, 1 = 0^+, 2 = 1^+, 1 = 2^+\}$ Pero (ax4) entonces $0^+ = 2^+ \rightarrow 0 = 2 = 1^+$ (no ax3)
 - La aplicación σ es inyectiva por el ax4: $0 \xrightarrow{\sigma} 1 \xrightarrow{\sigma} 2 \xrightarrow{\sigma} 3 \xrightarrow{\sigma} \dots$

- Como σ inyectiva existe $\sigma^{-1}:N^* \rightarrow N$ que es la aplicación predecesor.
- Ax5: principio de inducción que utilizaremos para muchas demostraciones.

2.2. Principio de Inducción.

- Se utiliza en demostraciones para propiedades relacionadas con N : $\{\mathcal{P}_n = \{P_1, P_2, \dots\}\}$
- Principio de inducción: La propiedad $\mathcal{P}_n$ cierta si:
 - La proposición P_0 es cierta
 - Supuesta cierta P_n demostramos que también lo es P_{n+1}
- Demostración: Sea $U = \{n: P_n \text{ se cumple}\}$ pero $U=N$ por Ax5 y por tanto $\mathcal{P}_n$ cierta.
- Ejemplo grafico: fichas del domino. Hacer dibujo.
- Nota: a veces inducción no empieza en 0

2.3. Suma o adición en N.

- Definición de la suma en N : aplicación que relaciona dos N con otro N :
 $+: N \times N \rightarrow N$
 $n, m \rightarrow +(n, m) = n + m$
- Axiomas que definen la suma (+):
 - $n + 0 = n$
 - $n + m^+ = (n + m)^+$
- La suma de dos números se hace de forma recurrente.
 - Eje: $n + 2 = n + 1^+ = (n + 1)^+ = (n + 0^+)^+ = (n^+)^+$. Luego $n + 2$ sucesor del sucesor de n
- Propiedades (importante el orden pues unas se demuestran a partir anteriores):
 - Suma bien definida: a) $n + m \in N$ y b) $+$ es única. Demostrar por inducción.
 - Elemento neutro: $n + 0 = n$ Demostrar por inducción.
 - Asociativa: $(n + m) + p = n + (m + p)$ Demostrar por inducción.
 - Conmutativa: $n + m = m + n$ Demostrar por inducción.
 - Ley cancelativa: $n + m = n + p \rightarrow m = p$. Demostrar por inducción.

2.4. Producto o multiplicación en N.

- Definición del producto N : aplicación que relaciona dos N con otro N
 $\bullet: N \times N \rightarrow N$
 $n, m \rightarrow (n, m) = n \cdot m$
- Axiomas que definen el producto ($\bullet$):
 - $n \cdot 0 = 0$
 - $n \cdot m^+ = n \cdot m + n$
- El producto de dos números se hace de forma recurrente a partir de la suma.
- Eje: $n \cdot 2 = n \cdot 1^+ = n \cdot 1 + n = n + n \cdot 0^+ = n + n + n \cdot 0 = n + n + 0 = n + n$.
- Propiedades (importante el orden pues unas se demuestran a partir anteriores):
 - Producto bien definido: a) $n \cdot m \in N$ y b) $\bullet$ es único. Demostrar por inducción.
 - Distributivo con la suma
 - $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$ Demostrar por inducción sobre p
 - $(m + n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p$. Demostrar por inducción sobre p
 - Elemento absorbente: $n \cdot 0 = 0$. Demostrar por inducción
 - Elemento neutro: $n \cdot 1 = n$. Demostrar por inducción
 - Asociativa: $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$. Demostrar inducción sobre p (utilizar distrib).
 - Conmutativa: $n \cdot m = m \cdot n$ Demostrar por inducción.
 - No divisores del 0: $m \cdot n = 0 \rightarrow m = 0$ y/o $n = 0$. (Dem por reducción absurdo)
 - Ley cancelativa: $m \cdot p = n \cdot p \rightarrow m = n$ si $n \neq 0$. Demostrar por inducción sobre p.
 - Elemento simétrico: $m \cdot n = 1 \rightarrow m = n = 1$. Demostrar por reducción a lo absurdo

2.5. Orden de N.

- Sean a y $b \in \mathbb{N}$: a menor que b o b mayor que a si existe $c \in \mathbb{N}^*$: $a+c=b$. Se dice $a < b$
- Esta relación es de orden estricto:
 - Antirreflexiva: $a \not< a$. Pues $a+c=a \rightarrow c=0 \notin \mathbb{N}^*$
 - Antisimétrica: $a < b \rightarrow b \not< a$. Reducción a lo absurdo
 - Transitiva: $a < b, b < d \rightarrow a < d$. Por definición de $<$.
- Sean a y $b \in \mathbb{N}$: a menor o igual que b o b mayor que a si existe $c \in \mathbb{N}$: $a+c=b$. ($a \leq b$)
- Esta relación es de orden total:
 - Reflexiva: $a \leq a$. Pues $a+c=a \rightarrow c=0 \in \mathbb{N}$
 - Antisimétrica: $a \leq b \rightarrow b \leq a \rightarrow a = b$. Definición de $\leq$
 - Transitiva: $a \leq b, b \leq d \rightarrow a \leq d$. Por definición de $\leq$.

2.6. Resta y división.

- Las operaciones de la resta o diferencia y de la división o cociente se define a partir de la suma y del producto
- Resta: La resta de $m, n \in \mathbb{N}$ ($m-n$) es otro $p \in \mathbb{N}$: $m=n+p$
- Propiedades: la resta no bien definida en $\mathbb{N}$: si $n > m$ no se puede restar en $\mathbb{N}$ (necesidad de los enteros)
- División: El cociente de m entre $n \neq 0$ ($m:n$) es otro $p \in \mathbb{N}$: $m=n \cdot p$
- Propiedades: el cociente no bien definido en $\mathbb{N}$: si m no es múltiplo de n no se puede dividir en $\mathbb{N}$.

3. Sistemas de numeración

3.1. Conceptos generales.

- Numero N son infinitos. No podemos asignar un símbolo para cada uno de ellos.
- Sistema de numeración: conjunto de reglas por el cual mediante número finito de signos representamos todos los N .
- Base de un sistema: numero de símbolos utilizados para la representación de los N .
 - La más importante código 10 (dedos manos)
 - Código binario (ordenadores)
 - Código 60 (numeración Babilónica)
 - Código 20 (numeración Maya)
- Clasificación de sistemas de numeración
 - Sistema de numeración aditivo: se acumulan los símbolos de todas las unidades, decenas...hasta completar el número. Numeración egipcia, griega. No importa orden Ver ejemplo
 - Sistema de numeración híbridos: combinan principio aditivo y multiplicativo. Orden fundamental. Sistema de numeración Chino. Ejemplo
 - Sistema de numeración posicionales: la posición de la cifra nos indica si son unidades, decenas, centenas...Mucho más efectivos. Babilónico, maya. Ejem

3.2. Teorema fundamental de la numeración.

- Teorema: dada una base $p \in \mathbb{N}$ y $p > 1$, con p signos cada uno de ellos representa los primeros p N ($0, 1, \dots, p-1$). Todo natural n puede expresarse de forma única como: $n = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot p + \dots + \alpha_k \cdot p^k$ con $\alpha_i \in \{0, \dots, p-1\}$. Demostrar existencia y unicidad.
- Ejemplos en base 10, y 12 del numero 7331
- Expresión ordenada de un numero en una base: $n = \alpha_0 + \alpha_1 p + \dots + \alpha_k p^k = \alpha_k \alpha_{k-1} \dots \alpha_0 |_p$
Ejemplo: $7331 = 4 \cdot 12^3 + a \cdot 12^2 + 9 \cdot 12 + b = 42ab|_{12}$ (nota $a=10, b=11$)

3.3. Propiedades de la numeración.

- Proposición 1: Si $n = \alpha_k \alpha_{k-1} \dots \alpha_0 \text{p}$ le multiplicamos por p^s el resultado en base p se obtiene añadiendo s ceros al final de $n \rightarrow n \cdot p^s = \alpha_k \alpha_{k-1} \dots \alpha_0 \underbrace{0 \dots 0}_{s \text{ ceros}} \text{p}$. Demostración
- Proposición 2: si un $n \in \mathbb{N}$ en base p tiene s cifras $p^{s-1} \leq n < p^s$. De forma reciproca si un $n \in \mathbb{N}$ cumple $p^{s-1} \leq n < p^s \rightarrow$ tiene s cifras. Demostración
- Proposición 3: Sea $n \in \mathbb{N}$ con s cifras y $m \in \mathbb{N}$ con k cifras, se cumple q si $s > k \rightarrow n > m$

3.4. Cambio de base.

- Estructura matemática en base 10, no nos resulta sencillo multiplicar y dividir en otra base. Por esto para pasar de una base distinta de 10 a otra base distinta de 10 se recomienda expresar el numero en base 10 como paso intermedio
- Base arbitraria $\rightarrow$ Base 10: multiplicando (definición de sistema numeración) Ejemplo
- Base 10 $\rightarrow$ Base arbitraria: dividiendo y cogiendo los restos Ejemplo
- Base arbitraria $\rightarrow$ base arbitraria. Apoyándose en la base decimal

4. Contexto del tema con secundaria y bachillerato

- Los Naturales y sus operaciones son trabajados ya desde primaria. Se estudian en 1º de la ESO y se repasan en 2º de la ESO.