

Ejercicios de Repaso. Números (2)

1. Calcular la suma de todas las fracciones irreducibles de denominador 3 comprendidas entre p y q (Andalucía 1983)
2. Hallar el interior, $\text{int}(A)$, la adherencia, $\text{adh}(A)$, el conjunto de puntos aislados $\text{Aisl}(A)$ el conjunto A' de puntos de acumulación, la frontera interna, $F_i(A)$, la frontera externa, $F_e(A)$, y la frontera, $F(A)$, del conjunto A en los siguientes casos:

a) $A = [2, 3) \cup (5, 6] \cup \left\{4 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$

b) $A = [-2, 0) \cup (0, 2) \cup \left\{\frac{10}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$

c) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{\pm 1}{n}, n \in \mathbb{N}^*, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$

d) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{\pm 1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*, |x| + |y| \leq 1\right\}$

Razonar si A es abierto, cerrado, acotado o compacto (Galicia 2002)

3. En el conjunto $\mathbb{Q}$ de los racionales consideramos $\tau = \{A \subseteq \mathbb{Q} : x \in A \Rightarrow -x \in A\}$
 - a) Demostrar que τ es topología para $\mathbb{Q}$
 - b) Determinar cuales son los cerrados de dicha topología (Extremadura 1998)
4. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Consideremos la siguiente clase de subconjuntos de X: $T = \{\emptyset, X, \{1\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4, 5\}\}$.
 - a) Demostrar que T es una topología de X
 - b) Determinar los subconjuntos cerrados de X (Madrid 1990)
5. Si $a > 0$ es una aproximación de una media positiva con un error relativo menor que R, ¿en qué intervalo se encuentra el valor exacto de x? (Canarias 2000).
6. Sean a y b números reales tales que $a < b$. Sea x un elemento de $[a, b]$. Se pide: a) demostrar que para cada entero n existe un único entero k_n no negativo y no superior a 2^n , que verifica $a + k_n \cdot (b-a)/2^n \leq x < a + (k_n+1) \cdot (b-a)/2^n$. b) deducir que todo elemento x del intervalo $[a, b]$, es límite de la sucesión $\{u_n\}$ donde los elementos de $u_n = a + k_n \cdot (b-a)/2^n$ ($0 \leq k_n \leq 2^n$). (Madrid 1989)