

⑥ a) $a < b$, $x \in [a, b]$

$$\forall n \in \mathbb{Z} \rightarrow \exists \text{ único } \left\{ \begin{array}{l} K_n < 2^n \\ K_n \geq 0 \end{array} \right. :$$

$$a + K_n \cdot \frac{b-a}{2^n} \leq x < a + (K_n+1) \frac{b-a}{2^n}$$

$$\bullet \frac{K_n (b-a)}{2^n} \leq x - a \rightarrow K_n \leq \left(\frac{x-a}{b-a} \right) 2^n$$

$$\bullet a + (K_n+1) \frac{b-a}{2^n} > x \rightarrow K_n > \left(\frac{x-a}{b-a} \right) 2^n - 1$$

$$\left(\frac{x-a}{b-a} \right) 2^n - 1 < K_n \leq \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \cdot 2^n$$

$$\alpha = \frac{x-a}{b-a} < 1 \quad \text{porque } x < b$$

$$\alpha \cdot 2^n - 1 < K_n \leq \alpha \cdot 2^n$$

$$\alpha \cdot 2^n = \beta \in \mathbb{K} \quad \beta \notin \mathbb{Z}$$

$$\left. \begin{array}{l} \beta - 1 < \kappa_n \leq \beta \\ \kappa_n \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \kappa_n \in (\beta - 1, \beta] \\ \kappa_n \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \text{Rango} = 1$$

En un intervalo de rango 1 sólo puede haber un n° natural pues la distancia entre 2 naturales es de 1



$$b) \quad x \in [a, b] \quad x = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \text{ donde}$$

$$u_n = a + \kappa_n \frac{b-a}{2^n} \quad (0 \leq \kappa_n < 2^n)$$

Por a) se cumple:

$$a + k_n \frac{b-a}{2^n} \leq x < a + (k_n+1) \frac{b-a}{2^n}$$

Podemos poner la desigualdad a función de U_n :

$$U_n \leq x < U_n + \frac{b-a}{2^n}$$

$$0 \leq x - U_n < \frac{b-a}{2^n}$$

Tomando límites $0 \leq x - \lim_{n \rightarrow \infty} U_n \leq 0$

Por la regla del Sandwich:

$$x - \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0 \rightarrow x = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n$$