

$$3) \tau = \{A \subseteq Q : x \in A \rightarrow -x \in A\}$$

a) Demostrar que es topología (Q, τ)
 tiene que cumplir 3 condiciones:

$$\textcircled{1} \quad \underline{Q, Q^c \in \tau}$$

• $Q \in \tau$ ya que cualquier $x \in Q$
 es claro que también $-x \in Q$

$$\bullet Q^c = \emptyset \in \tau$$

$$\textcircled{2} \quad \underline{\text{La unión de cualquier familia de elementos de } \tau \text{ pertenece a } \tau}$$

Consideramos una familia $\{A_k\}, k \in J$
 elementos de τ (conjuntos que cumplen que
 si $x \in A_k \rightarrow -x \in A_k$) y la unión de todos
 ellos $\rightarrow \bigcup_{k \in J} A_k$

En la unión $x \in \bigcup A_k \Leftrightarrow \exists k \in J : x \in A_k$

$$x \in J$$

Como $x \in A_k$, y $A_k \in \mathcal{C} \rightarrow x \in A_k$

Si $x \in A_k \leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in J} A_k$.

Entonces $\bigcup_{k \in J} A_k \in \mathcal{C}$ pues $\forall x \in \bigcup_{k \in J} A_k \rightarrow$

$x \in \bigcup_{k \in J} A_k$ y por tanto $\bigcup_{k \in J} A_k \in \mathcal{C}$

③ La intersección finita de elementos de $\mathcal{C}$ pertenece también a $\mathcal{C}$

Sea una familia finita de elementos de $\mathcal{C}$ (conjuntos)

$\{A_k\}_{k=1,2,3,\dots,n}$. La intersección es

$\bigcap_{k=1}^n A_k$ veamos que es también de $\mathcal{C}$:

$x \in \bigcap_{k=1}^n A_k \leftrightarrow \forall k \in \{1,2,\dots,n\}$ tal que

$x \in A_k$ (pertenece todos conjuntos)

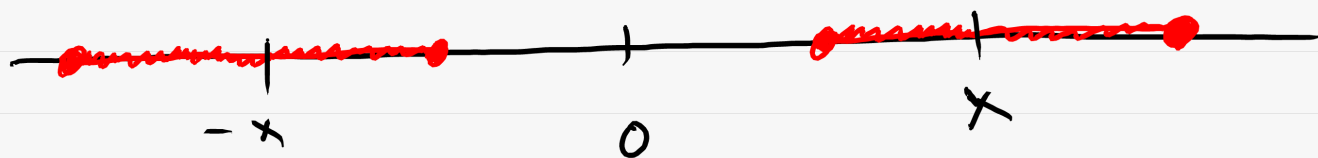
Como todo $A_k \in \mathcal{C} \rightarrow -x \in A_k \quad \forall k=1 \dots n$

y por tanto $-x \in \bigcap_{k=1 \dots n} A_k$

Esto implica que $\bigcap_{k=1 \dots n} A_k \in \mathcal{C}$

Luego $\mathcal{C}$ cumple los 3 requisitos de topología.

b) Cerrados en dicha topología.



Son conjuntos cerrados formado por la unión de dos conjuntos cerrados simétricos, pues la unión de cerrados es cerrado