

7) $\left. \begin{array}{l} 2a \\ a^2 + 5b^2 \end{array} \right\} \in \mathbb{Z}$

① Si $a \in \mathbb{Z}$, $a^2 \in \mathbb{Z}$ y por tanto para que $a^2 + 5b^2 \in \mathbb{Z}$ tiene que cumplirse $5b^2 \in \mathbb{Z}$

Como $b \in \mathbb{Q} \rightarrow b = \frac{p}{q}$ ($\text{mcd}(p, q) = 1$)

$$5b^2 = 5 \frac{p^2}{q^2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow q^2 = 5 \rightarrow$$

$$q^2 = 25 \rightarrow q = 5 \cdot k \rightarrow q^2 = 25k^2$$

$$5 \cdot \frac{p^2}{k^2 \cdot 25} = \frac{p^2}{5 \cdot k^2} \in \mathbb{Z} \rightarrow p^2 = 5 \text{ (enteros)} \rightarrow p = 5$$

$\text{mcd}(p, q) \neq 1$). Luego única opción

es que $q = 1 \rightarrow a, b \in \mathbb{Z}$

② Si $a \notin \mathbb{Z}$ y $2a \in \mathbb{Z} \rightarrow a = \frac{2t+1}{2}$

La otra expresión es $a^2 + 5b^2 = \frac{4t^2 + 4t + 1}{4} + 5b^2$

$$\rightarrow a^2 + 5b^2 = t^2 + t + \frac{1}{4} + 5b^2 \in \mathbb{Z} \rightarrow$$

$$\frac{1}{4} + 5b^2 \in \mathbb{Z}$$

$b = \frac{p}{q}$ (con o n. a irreducibles)

$$\frac{1}{4} + \frac{5p^2}{q^2} \in \mathbb{Z} \rightarrow$$

$$0'25 + 5 \frac{p^2}{q^2} \in \mathbb{Z} \rightarrow 5 \frac{p^2}{q^2} = k + 0'75$$

$\downarrow$
 $\in \mathbb{N}$

$\downarrow$
 $q=2$

$$\frac{5p^2 + 1}{4} \in \mathbb{Z} \rightarrow 5p^2 + 1 = 4$$

$$(5p^2) \bmod 4 = 3 \bmod 4$$

$$5 \bmod 4 = 1 \bmod 4$$



$$5p^2 = 3 \bmod 4$$

$$p^2 = 3 \bmod 4 \rightarrow \text{Impossible.}$$

- Si $p = 0 \bmod 4 \rightarrow p^2 = 0 \bmod 4$
- Si $p = 1 \bmod 4 \rightarrow p^2 = 1 \bmod 4$
- Si $p = 2 \bmod 4 \rightarrow p^2 = 4 = 0 \bmod 4$
- Si $p = 3 \bmod 4 \rightarrow p^2 = 9 = 1 \bmod 4$