

4)

$$A_p = \frac{2^{p-1} - 1}{p} = m^2$$

Como p primo impar $\rightarrow p = 2t + 1$

$$A_p = A_t = \frac{2^{2t} - 1}{2t + 1} = \frac{(2^t + 1)(2^t - 1)}{2t + 1}$$

Tenemos que obligar que $A_t \in \mathbb{N}$, por tanto el cociente ha de ser exacto. Además $2^t + 1$ y $2^t - 1$ son dos n^{os} impares consecutivos, y por tanto primos entre sí.

Esto implica que o $\begin{cases} a) \frac{2^t - 1}{2t + 1} \in \mathbb{N} \\ b) \frac{2^t + 1}{2t + 1} \in \mathbb{N} \end{cases}$

$$a) \frac{2^t - 1}{2t + 1} \in \mathbb{N} \rightarrow \frac{2^t - 1}{2t + 1} = B_t \rightarrow A_t = (2^t + 1) \cdot B_t$$

Como $2^t + 1$ y B_t no tienen factores en

Común y queremos que sea cuadrado perfecto
es necesario que $2^t + 1 = \text{Cuadrado perfecto}$
(al igual que B_t)

$$2^t + 1 = x^2 \rightarrow 2^t = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

Se tiene que cumplir que $x+1$ y $x-1$
que son consecutivos sean igual 2^t , los
únicos ^(pares o impares) que cumplen ser potencia de
dos son 2 y 4 $\rightarrow 2^t = 2 \cdot 4 = (3+1)(3-1)$
luego $x=3 \rightarrow 2^t = 8 \rightarrow t=3 \rightarrow p = 2 \cdot 3 + 1$

$$\boxed{p=7}$$

$$B_{p=7} = \frac{2^6 - 1}{7} = \frac{63}{7} = 9 = 3^2$$

b) $\frac{2^t + 1}{2^t + 1} \in \mathbb{N} \rightarrow 2^t - 1$ será un cuadrado
perfecto: $2^t - 1 = x^2$. Para factorizar

restamos 1 a ambos lados igualdad

$$2^t - 2 = x^2 - 1 \rightarrow 2(2^{t-1} - 1) = (x+1)(x-1)$$

Komo es el producto de dos naturales que distan 2 unidades $(x+1)$ y $(x-1)$

tiene que ser múltiplo de 2 $\rightarrow (x+1)$ y $(x-1)$

son pares: $x+1 = 2m+2$, $x-1 = 2m$

$$2 \cdot (2^{t-1} - 1) = 2(m+1) \cdot 2m$$

$$2^{t-1} - 1 = 2m(m+1) \rightarrow 2^{t-1} - 1 \text{ impar}$$

meos para $t=1$ y $2m \cdot (m+1)$ par

Luego única opción es $t=1 \rightarrow \boxed{p=3}$

Comprobemos si es cuadrado perfecto:

$$A_{p=3} = \frac{2^{3-1} - 1}{3} = 1 = 1^2$$

Únicas soluciones son $\boxed{p=3, p=7}$

+