

3) a) $A_n = 3^n - 2 \cdot n^2 - 1$. Como tiene

parte polinómica $(-2n^2 + 1)$ tenemos que
hacer inducción (2 veces = grado)

Inducción 1: $A_n = 0$ (grado 2)

- Si $n=1 \rightarrow A_1 = 3^1 - 2 \cdot 1 - 1 = 0 = 0$

- Hipótesis inducción $A_n = 3^n - 2 \cdot n^2 - 1 = 0$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

- Veamos para $n+1$:

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= 3^{n+1} - 2 \cdot (n+1)^2 - 1 = 3^n \cdot 3 - 2(n^2 + 2n + 1) - 1 \\ &= \underbrace{3^n - 2n^2 - 1}_{A_n = 0 \text{ (inducción)}} + \underbrace{2 \cdot 3^n - 4n - 2}_{B_n} \end{aligned}$$

Tenemos que ver que $B_n = 2 \cdot 3^n - 4n - 2 = 0$

$$B_n = 2 \cdot (3^n - 2n - 1) = 0 \rightarrow C_n = 3^n - 2n - 1 = 0$$

Inducción 2 (grado 1) $C_n = 4$

$$\cdot n=1 \rightarrow C_1 = 3^1 - 2 \cdot 1 - 1 = 0 = 4$$

$$\cdot \text{Hip. inducción} \rightarrow C_n = 3^n - 2n - 1 = 4$$

$$\begin{aligned} \cdot n+1 \rightarrow C_{n+1} &= 3^{n+1} - 2(n+1) - 1 = \\ &= 3 \cdot 3^n - 2n - 2 - 1 = \underbrace{3^n - 2n - 1}_{\text{Inducción}} + \underbrace{2 \cdot 3^n - 2}_{D_n} \end{aligned}$$

$$\text{Tendremos que ver } D_n = 2 \cdot 3^n - 2 = 4 \text{ o}$$

$$\text{lo que es lo mismo } D_n = 2(3^n - 1) \rightarrow$$
$$E_n = 3^n - 1 = 2 \text{ (ya us es polinómico)}$$

$$E_n = 3^n - 1 = 2 \rightarrow 3^n \bmod 2 = 1 \quad \forall n$$

$$E_n \bmod 2 = 1 - 1 = 0 \rightarrow E_n = 2$$

$$\text{Como } E_n = 2 \rightarrow D_n = 4 \rightarrow C_n = 4 \rightarrow B_n = 8 \text{ y}$$
$$A_n = 8 \text{ c.s.g.d.}$$

b) $A_n = 8$ si $n \neq 3$. Por el apartado a)

se cumple $A_n = 8 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, por tanto

hay que probar que $A_n = 8$ si $n = 3$ ya

que $24 = 3 \cdot 8$ y 3 y 8 son primos entre sí.

Dos opciones

opción 1: $n = 1 \bmod 3 \rightarrow n^2 = 1 \bmod 3$

$$A_n \bmod 3 = (3^n - 2 \cdot n^2 - 1) \bmod 3 =$$

$$= 3^n \bmod 3 - (2 \cdot n^2) \bmod 3 - 1 = 0 - 2 \cdot 1 - 1 =$$

$$= -3 = 0 \bmod 3 \rightarrow A_n = 3 \rightarrow A_n = 24$$

opción 2: $n = 2 \bmod 3 \rightarrow n^2 = 4 \bmod 3 =$

$$= 1 \bmod 3$$

$$A_n \bmod 3 = (3^n - 2n^2 - 1) \bmod 3 =$$

$$= 0 - 2 \cdot 1 - 1 = -3 = 0 \bmod 3 \rightarrow A_n = 3, A_n = 24$$