TEMA 8. FUNCIONES (I). GENERALIDADES

Contenido

1. Definición y formas de definir una función

1.1. Definición de función

Hemos oído hablar mucho de funciones, pero ¿sabemos bien que son las funciones?.¿y para que se utilizan?. De esto trataremos este tema y el siguiente

Definición: una función f, es una correspondencia o aplicación entre un subconjunto de números reales (D∈R) y los números reales (R), de forma que a cada elemento "x", x∈D le corresponde **<u>un único</u>** valor "y".

Veamos gráficamente la definición:

$$f:\ D \rightarrow R$$
$$x \rightarrow y=f(x)$$

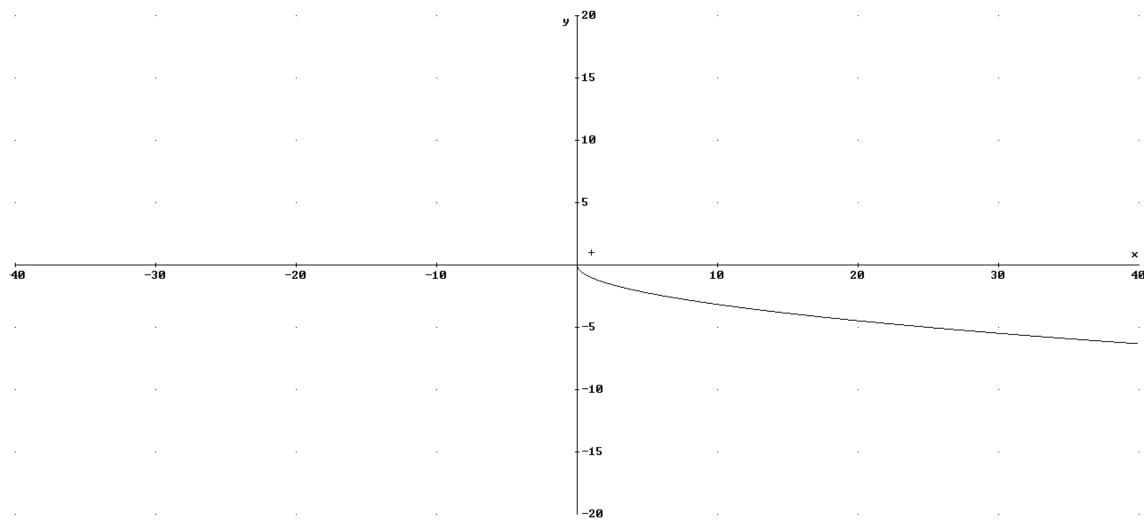
Elementos de una función:

- <u>Variable independiente</u>: es la variable x
- <u>Variable dependiente</u>: es la variable y, se llama así porque su valor depende de x.
- <u>Dominio de una función,</u> se denomina Dom(f) y está formado por aquellos valores de x (números reales) para los que existe la función.
- <u>Imagen o recorrido de la función</u>: se designa Im(f), a todos los valores de la variable dependiente (y).

Ejemplo: $y=f(x)=-\sqrt{x}$

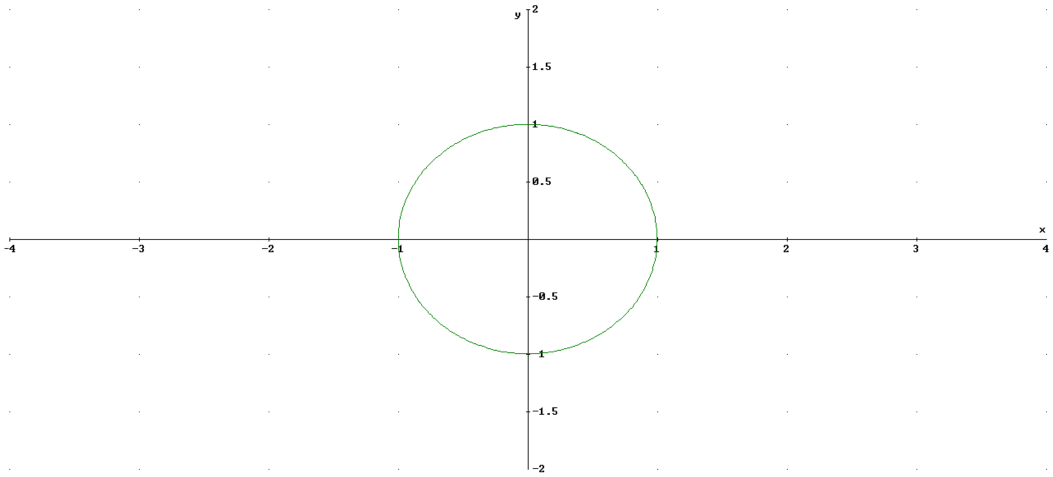
Dom(f(x))=[0,∞), ya que la raíz sólo existe cuando el radical es positivo

Im(f(x))=(- ∞,0], que son los valores que toma la y:



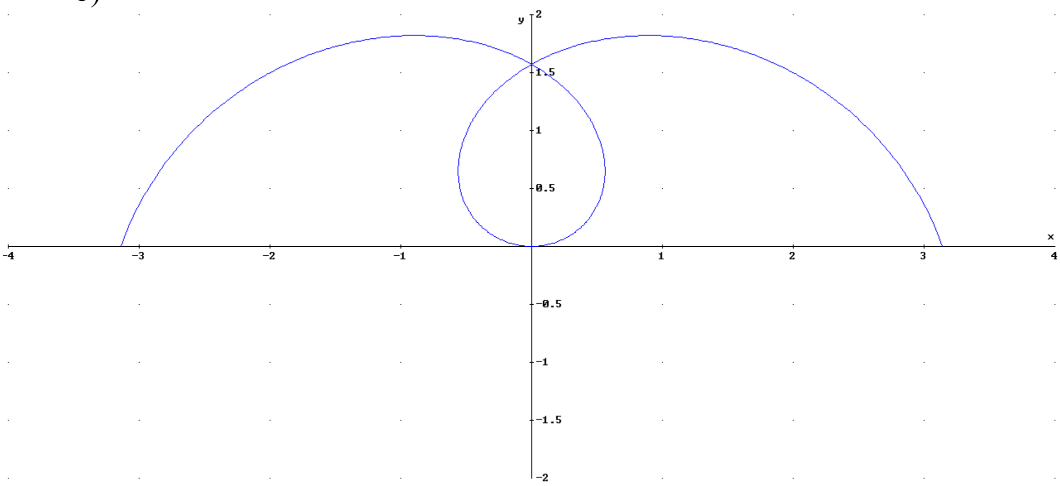
Ejercicio 1: identificar funciones de las que no son

a)



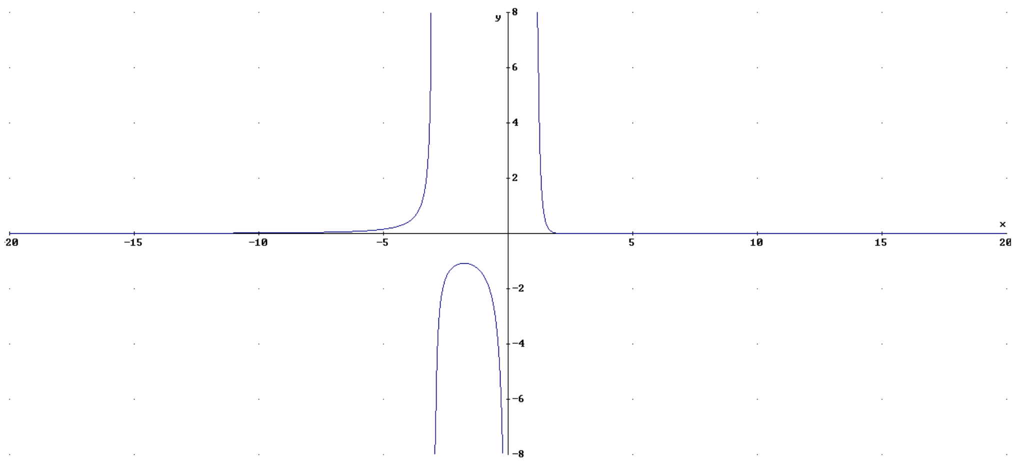
No es una función porque para un mismo valor de x toma dos valores de y.

b)



No es una función porque para algún valor de x toma dos y tres valores de y.

c)

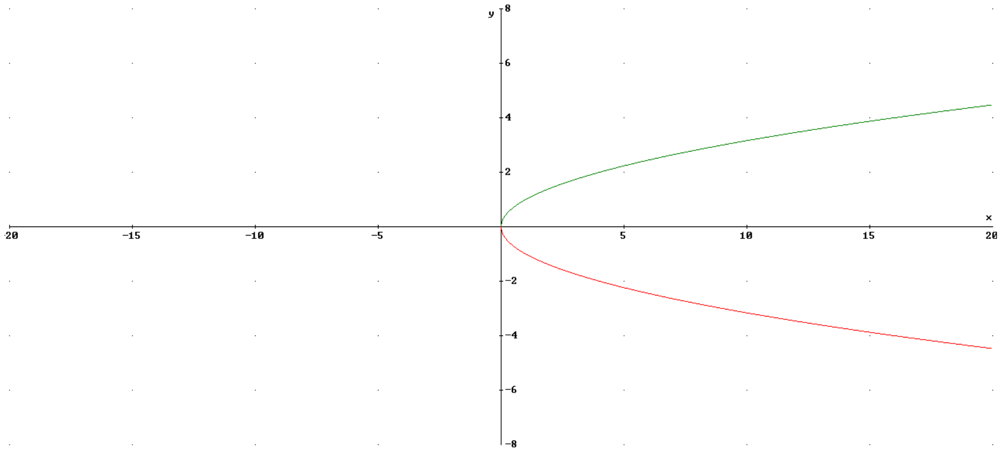


Si es función, pues a cada valor de x le corresponde un único valor de y.

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

d) $x=y^2 \rightarrow$ No es una función, porque para cada valor de x le corresponde dos de y, por ejemplo si $x=4 \rightarrow y=2, y=-2$. Si despejamos la y tenemos dos funciones:

$y=-\sqrt{x}$; $y=\sqrt{x}$

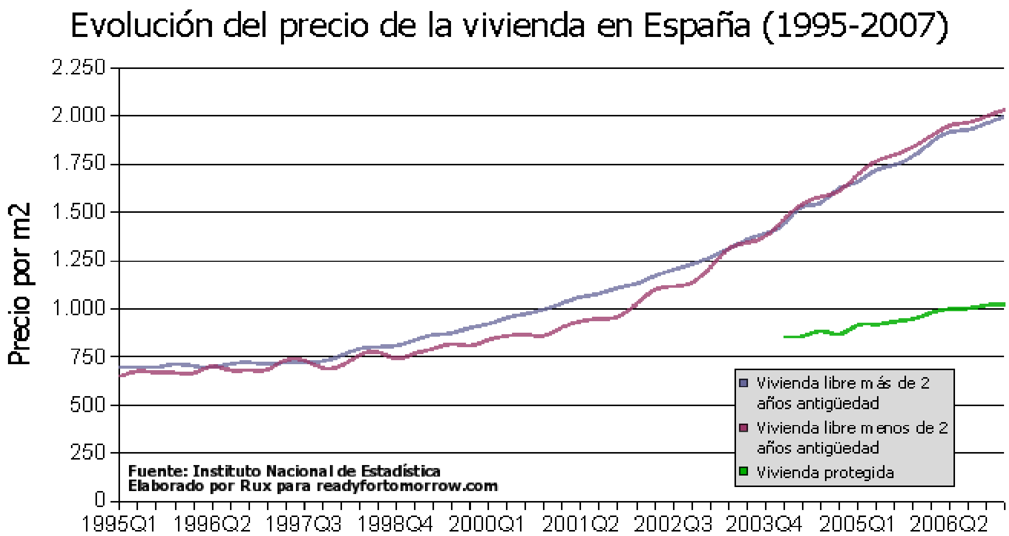


1.2.Formas de definir la función:

1.2.1. A partir de una representación gráfica

La representación gráfica nos muestra la relación entre las variables "x" e "y" en los ejes de coordenadas cartesianos, así la gráfica es el conjunto de todos los puntos (x,y=f(x)).

Es una forma muy intuitiva de conocer el comportamiento de la función, veamos un ejemplo, donde x=año, y=precio/m^2



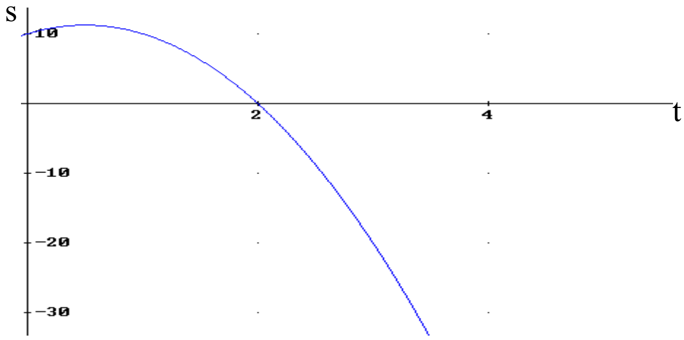
1.2.2. A partir de expresión analítica

Es otra forma de conocer una función: es la relación matemática entre las dos variables en la que la variable dependiente (y) está despejada. No siempre es posible de obtener la expresión analítica de una función, por ejemplo la vista en el apartado anterior. La expresión analítica suelen utilizarse en física, química, economía, etc.

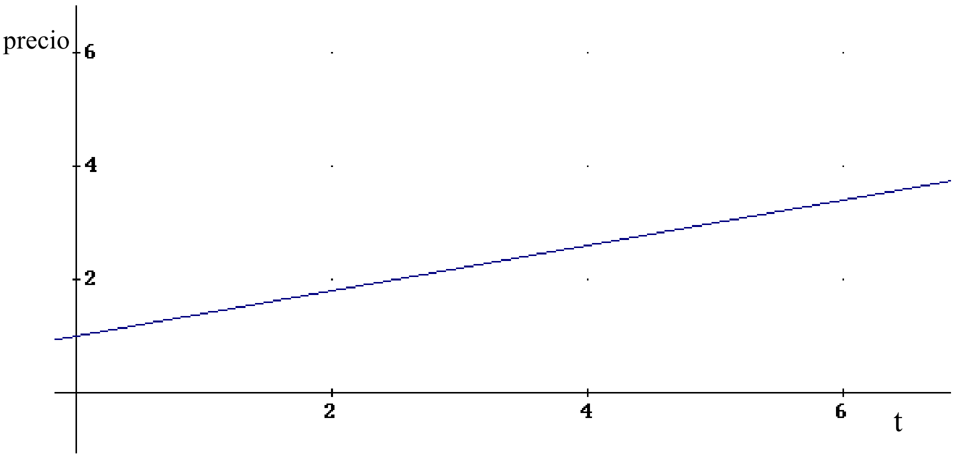
A partir de la expresión analítica es posible de obtener la gráfica, no siempre es cierta la afirmación en el otro sentido.

Veamos algún ejemplo:

a) La posición en un movimiento uniformemente acelerado $s=s_0+v_0\cdot t+\frac{1}{2}at^2$. Por ejemplo si s_0=10m , v_0=5m/s, a=-10m/s^2→ s=10+5t-5t^2. Tendremos que la variable independiente es el tiempo (t) y la dependiente el espacio (s):



b) Factura del taxi: 1€por bajar la bandera y 0,4€/min→ p=1+0,4·t. Donde la variable independiente es el tiempo y la dependiente el precio



1.2.3. Mediante tabla de valores:

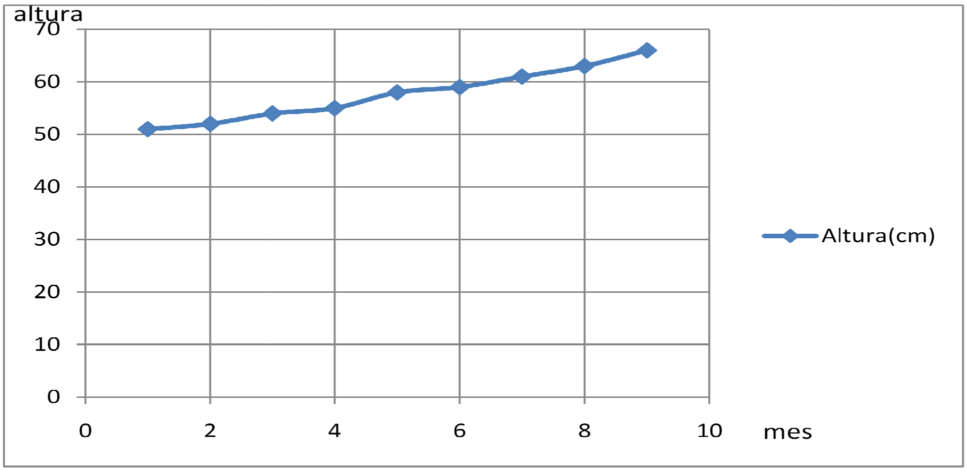
Aunque no es la forma deseada de conocer una función, a veces esta viene dada por tabla de valores, que son un conjunto de pares de valores (x,y) de la función.

Ejemplo: La siguiente tabla de valores muestra la evolución del crecimiento de un bebé durante los primeros meses de vida.

Meses	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Altura(cm)	51	52	54	55	58	59	61	63	66

Decimos que no es la mejor forma de conocer la función pues ¿Qué altura tendrá cuando ha pasado 8 meses y medio?.

Se puede obtener una gráfica aproximada uniendo los puntos, aunque hay infinitas formas de unir estos puntos, se suelen unir por rectas:



1.2.4. Calculo del dominio de una función

Gráficamente se ve claramente el dominio, ya que son los valores de x que toma la función. Veamos el domino a partir de la expresión analítica. Recordemos que el dominio son los valores de x donde existe la función. En las funciones para estudiar el dominio tenemos que ver los siguientes casos:

a) *Funciones con denominadores*: los valores de x que anulan el denominador no pertenecen al dominio (no se puede dividir entre cero)

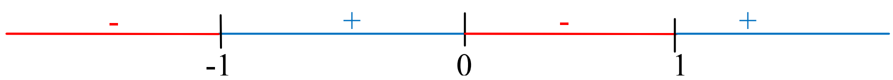
Ejemplo: y=f(x)=$\frac{2x^2}{x^2-1}$ → veamos los valores de x que anulan el denominador: $x^2-1=0$ → x=$\pm$ 1. Luego el dominio serán todos los reales menos $\pm$ 1

Dom(f(x))=R-{-1,1}=$(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$

b) *Raíces de índice par:* el radicando debe de ser siempre positivo o cero, pues no existe las raíces con índice para con radicando negativo (por ejemplo y= $\sqrt{-2}$). Para estudiar el dominio tenemos que resolver una inecuación:

Ejemplo: y=g(x)=$\sqrt{x^3-x}$:

$(x^3-x)\geq 0$ → $x\cdot(x+1)\cdot(x-1)\geq 0$



Dom(g(x))=$[-1,0]\cup[1,\infty)$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

c) *Logaritmos:* el argumento debe de ser positivo, ya que no hay ninguna potencia tal que un número positivo elevado a este sea negativo cero. Al igual que con las raíces hay que resolver una inecuación.
Ejemplo: y=h(x)=log(x+3)
x+3>0 → x>-3 → Dom(h(x))=(-3,∞)

Ejercicio 2: estudiar el dominio de las siguientes funciones:

a) y=f(x)=$\sqrt{\frac{x\cdot(x-1)}{x+2}}$

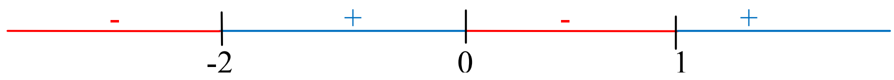
b) y=g(x)=log$\left(\frac{x}{x-1}\right)$

c) y=h(x)= $\sqrt[3]{\frac{x^2+1}{x-3}}$

d) y=$i(x)\begin{cases} x^2 & x<3 \\ -x+2 & 5<x\leq 10 \\ x^2+1 & x>10 \end{cases}$

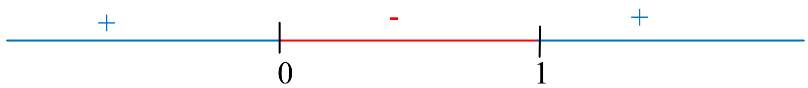
Solución

a) Se tiene que cumplir:
- x+2≠0 → -2∉dom(f(x))
- $\frac{x\cdot(x-1)}{x+2}\geq 0$



Dom(f(x))=(-2,0]∪[1,∞)

b) Se tiene que cumplir:
- x-1≠0 → 1∉dom(f(x))
- $\frac{x}{x-1}>0$

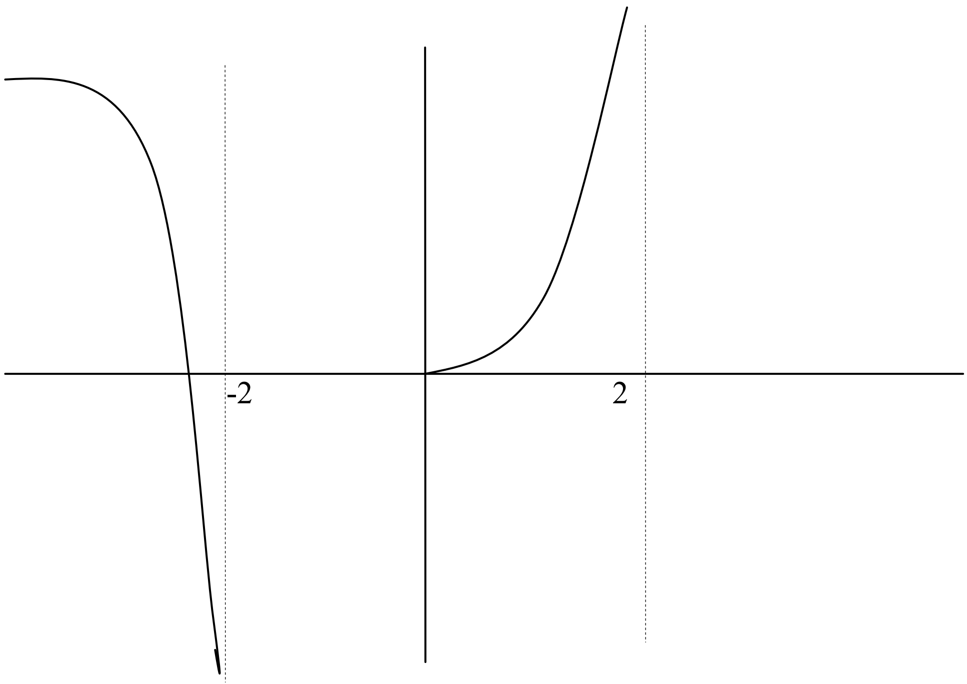


Dom(g(x))=(-∞,0)∪(1,∞)

c) Es una raíz impar luego lo único que se tiene que cumplir es:
- x-3≠0 → dom(h(x))=R-{3}

d) La función no definida en [3,5] luego el dominio es:
   $Dom(i(x))=(-\infty,3)\cup(5,\infty)$

Ejercicio 3: Estudiar dominio:



$Dom(f(x))=(-\infty,-2)\cup[0,2)$

2. Continuidad y discontinuidad de una función

Definición de continuidad: una función se dice continua en un punto cuando una pequeña variación de la variable independiente (x supone una pequeña variación de la variable dependiente (y). Gráficamente ocurre cuando al trazar la gráfica de la función "no levantamos el bolígrafo del papel".

Definición de discontinuidad: cuando una función no es continua en un punto entonces es discontinua en ese punto. Tipos de discontinuidades:

- ***Evitables:*** se llaman así porque pueden ser evitadas redefiniendo la función. Se cumple que la función no definida en ese punto, pero si en un entorno del mismo, cumpliéndose que $f(x_0^-)= f(x_0^+)$. El punto de discontinuidad no pertenece al dominio
- ***No evitables:*** son de dos tipos:
  - ***Salto infinito.*** La función en un entorno del punto tiende a $\pm\infty$. Ocurre cuando se anula el denominador. El punto de discontinuidad no pertenece al dominio. En ese punto se dice que la función asíntota vertical.
  - ***Salto finito****:* la función existe o no en el punto, se cumple que toma valores diferentes a izquierda y derecha del mismo número

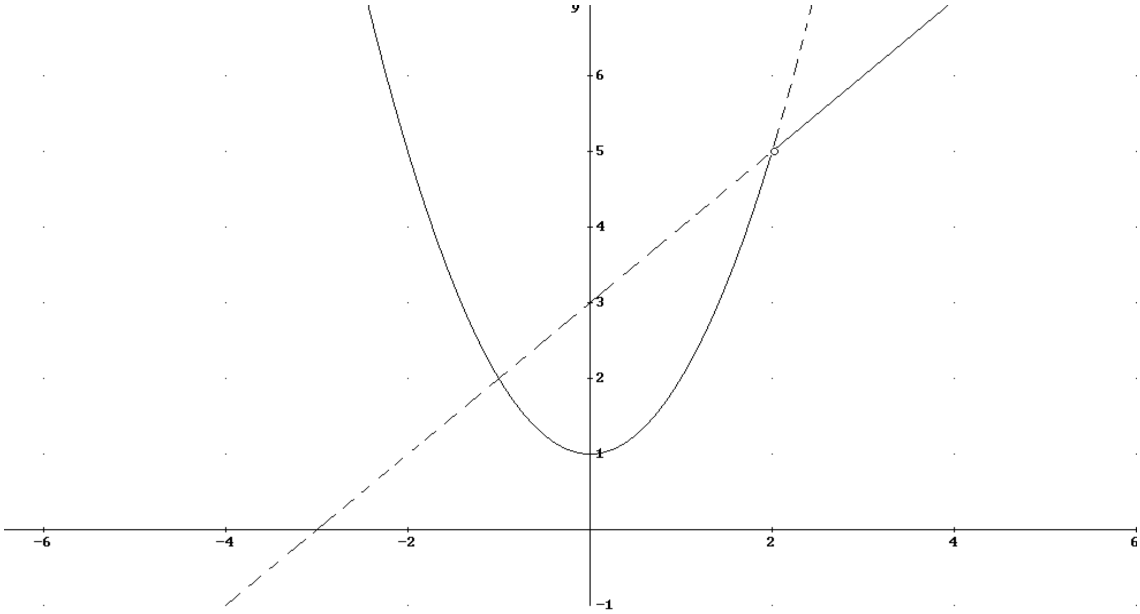
Las de salto finito y las evitables son discontinuidades típicas de las funciones definidas a trozos.

Ejemplos:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si \quad x<2 \\ x+3 & si \quad x>2 \end{cases}$

Se cumple que x=2∉dom(f(x)) y $f(2^+)=2+3=5=f(2^-)=2^2+1=5$

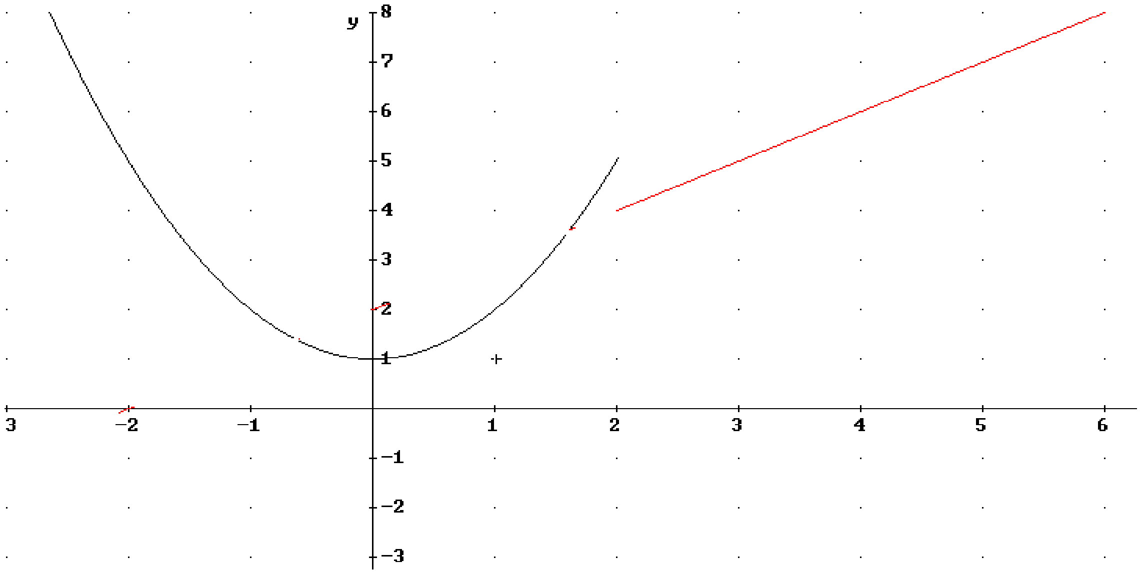
Luego es evitable, ya que definiendo la función en x=2 tal que f(2)=5 sería continua.



b) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si \quad x<2 \\ x+2 & si \quad x\geq 2 \end{cases}$

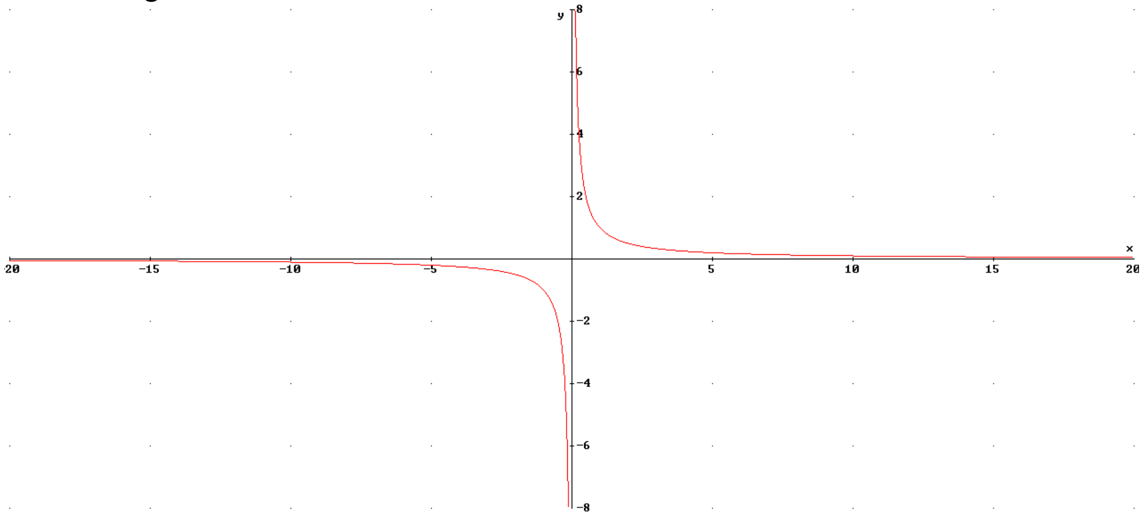
x=2∈Dom(f(x))→ f(2)=-4 pero $f(2^+)=2+2=4 \neq f(2^-)=2^2+1=5$

Luego es de salto finito siendo el salto de salto=5-(4)=1



c) f(x)= $\frac{1}{x}$ → discontinuidad de salto infinito en x=0→ $f(0^-)=-\infty$, $f(0^+)=+\infty$

Veamos la gráfica:



Ejercicio 4: Estudia las discontinuidades de las siguientes funciones indicando de que tipo son

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+6x+5}$

b) $g(x)=|x^2-1|$

c) $h(x)=\begin{cases} x\ si & x\leq 2 \\ 1\ \ si & x>2 \end{cases}$

d) $i(x)\begin{cases} x-1 & si \quad x>1 \\ -x+1 & si \quad x<1 \end{cases}$

e) $j(x)=\begin{cases} x+1\ \ si\ \ x>1 \\ 2\ \ si\ \ x=1 \\ -x+1\ \ si\ \ x<1 \end{cases}$

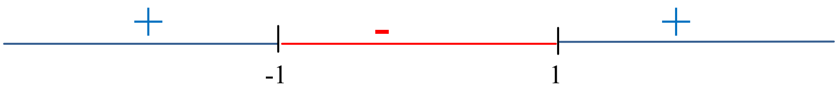
Solución

a) Es posible que se anule el denominador, veamos en que valores ocurre esto: $x^2+6x+5=0$ → x=-1, x=-5. Estos puntos no pertenecen al dominio y la función tiende a infinito en los entornos de los puntos (asíntotas verticales):
f(x) continua en R-{-1,-5}. En x=-1y x=-5 discontinuidad de salto infinito

b) Para entender bien una función valor absoluto es recomendarla escribirla como una función definida a trozos, de la siguiente manera:
- Miramos donde lo que está dentro del argumento es positivo o negativo
- Lo que es positivo el valor absoluto no le cambia de signo, cambiando cuando es negativo

- Escribimos la función definida en los tramos comprendidos entre los valores de x que anulaban la función y cambiando de signo o no la función según en dicho intervalo la función sea negativa o positiva.

$x^2-1=0 \rightarrow x=1, x=-1$



$$g(x)=\begin{cases} x^2-1 & si \quad x<-1 \\ -(x^2-1) & si \ -1\leq x\leq 1 \\ x^2-1 & si \quad x>1 \end{cases}$$

$g(-1^-)=(-1)^2-1=0 \quad g(-1^+)=-((-1)^2-1)=0$

$g(1^-)=-((1)^2-1)=0 \quad g(1^+)=((-1)^2-1)=0$

Tanto $1,-1\in Dom(g(x))$

Luego la función es continua en R.

c) $h(x)=\begin{cases} x \ si & x\leq 2 \\ 1 \ \ si & x>2 \end{cases}$ veamos los valores de la función entorno a x=2:

$h(2^-)=2$, $h(2^+)=1$ y $2\in Dom(h(x)) \rightarrow$ la función es continua en R-{2} y en x=2 hay una discontinuidad de salto finito salto=1

d) $i(x)\begin{cases} x-1 & si \quad x>1 \\ -x+1 & si \quad x<1 \end{cases}$

Veamos los valores de la función en torno de x=1 $\rightarrow i(1^-)=0$, $i(1^+)=0$ pero no existe i(1),luego $x=1\notin Dom(i(x))$. La función es continua en R-{1}, en x=1 tiene una discontinuidad evitable

e) $j(x)=\begin{cases} x-1 \ si \ x>1 \\ 0 \ si \ \ x=1 \\ -x+1 \ \ si \ \ x<1 \end{cases}$

Veamos los valores de la función en torno de x=1 $\rightarrow j(1^-)=0$, $j(1^+)=0$ además j(1)=0. La función es continua en R.

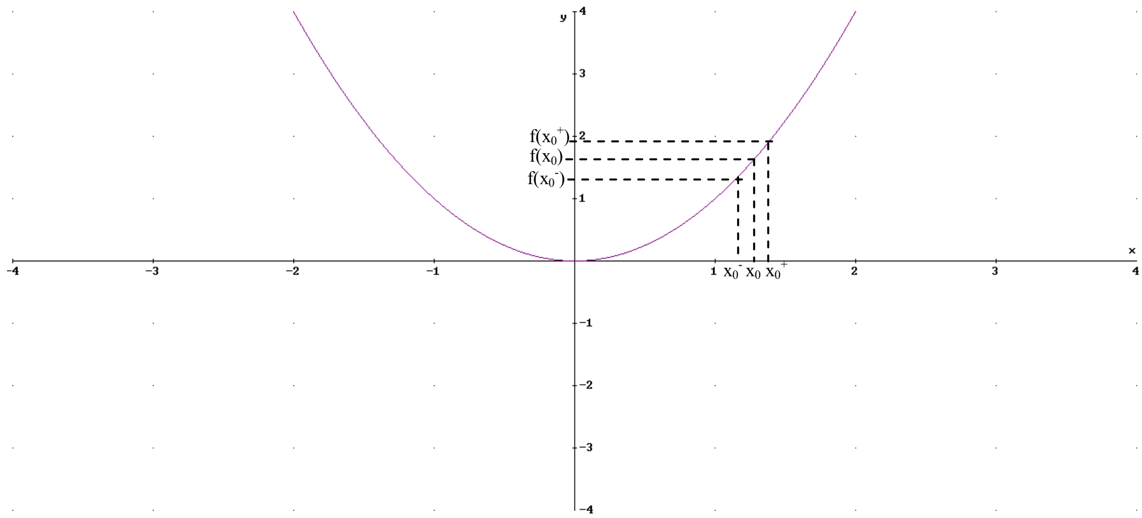
3. Monotonía: crecimiento y decrecimiento, puntos relativos

3.1 Monotonía: crecimiento y decrecimiento

Estudiar la monotonía de una función consiste en ver en los puntos del dominio donde esta función crece o decrece. Veamos matemáticamente cuando una función crece o decrece en un punto y en un intervalo:

Definición: una función f(x) es creciente en un punto x_0 si se cumple:

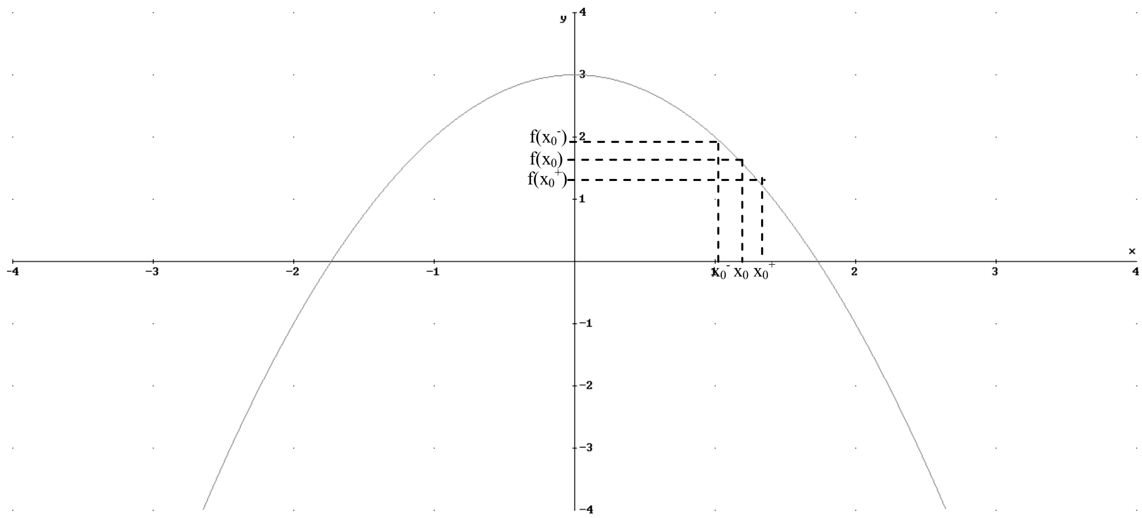
- El valor de la función infinitamente próximo y menor de x_0 cumple: $f(x_0)>f(x_0^-)$
- El valor de la función infinitamente próximo y mayor de x_0 cumple: $f(x_0)<f(x_0^+)$



Definición: una función es creciente en un intervalo (a,b) si se cumple que es creciente en todos los puntos del intervalo, tal que para todo $x_1,x_2\in(a,b)$ tal que $x_1<x_2\rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Definición: una función f(x) es decreciente en un punto x_0 si se cumple:

- El valor de la función infinitamente próximo y menor de x_0 cumple: $f(x_0)<f(x_0^-)$
- El valor de la función infinitamente próximo y mayor de x_0 cumple: $f(x_0)>f(x_0^+)$

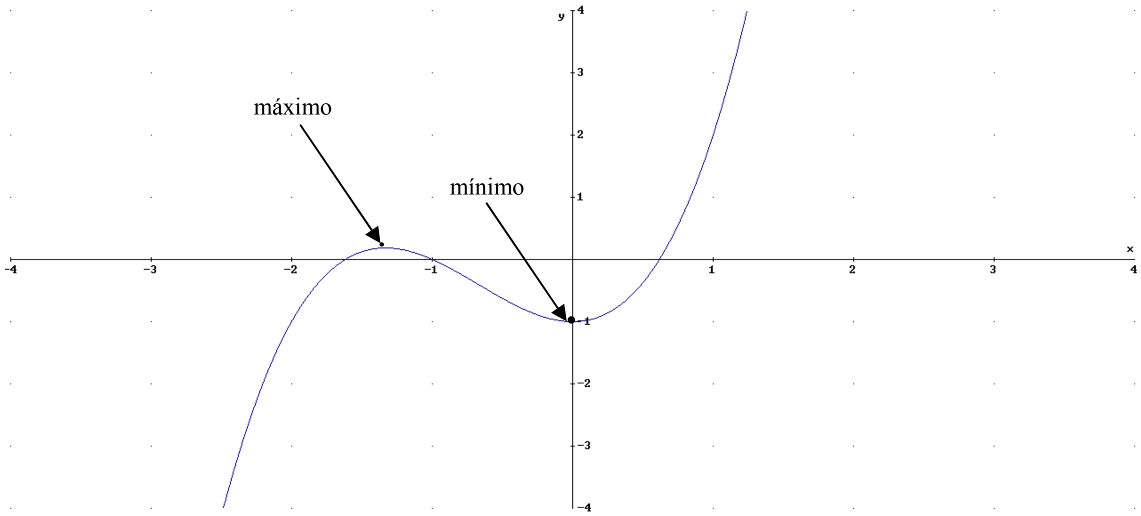


Definición: una función es decreciente en un intervalo (a,b) si se cumple que es creciente en todos los puntos del intervalo, tal que para todo $x_1,x_2\in(a,b)$ tal que $x_1<x_2\rightarrow f(x_1)>f(x_2)$

3.2 Puntos relativos

Definición: un punto relativo a f(x) es un punto perteneciente a la función en donde dicha función ni crece ni decrece, puede ser de dos tipos:

a) ***Máximo relativo***: en un entorno próximo al punto por la izquierda la función crece y en un entorno por la derecha la función decrece:
$f(x_0)>f(x_0^-)$ y $f(x_0)>f(x_0^+)$
b) ***Mínimo relativo:*** en un entorno próximo al punto por la izquierda la función decrece y en un entorno por la derecha la función crece
$f(x_0)<f(x_0^-)$ y $f(x_0)<f(x_0^+)$



Ejemplo: estudiar ayudándote de la calculadora si en los puntos x=-3,-2,-1,0 la función $f(x)= 3x^4+4x^3-12x^2$ es creciente, decreciente, máximo mínimo relativo

a) $x=-3 \rightarrow f(-3)=27$;
$f(-3^-)=f(-3{,}001)=27{,}14$
$f(-3^+)=f(-2.99)=25{,}57$
$f(-3^+)<f(-3)<f(-3^-) \rightarrow$ en x= -3 la función decrece

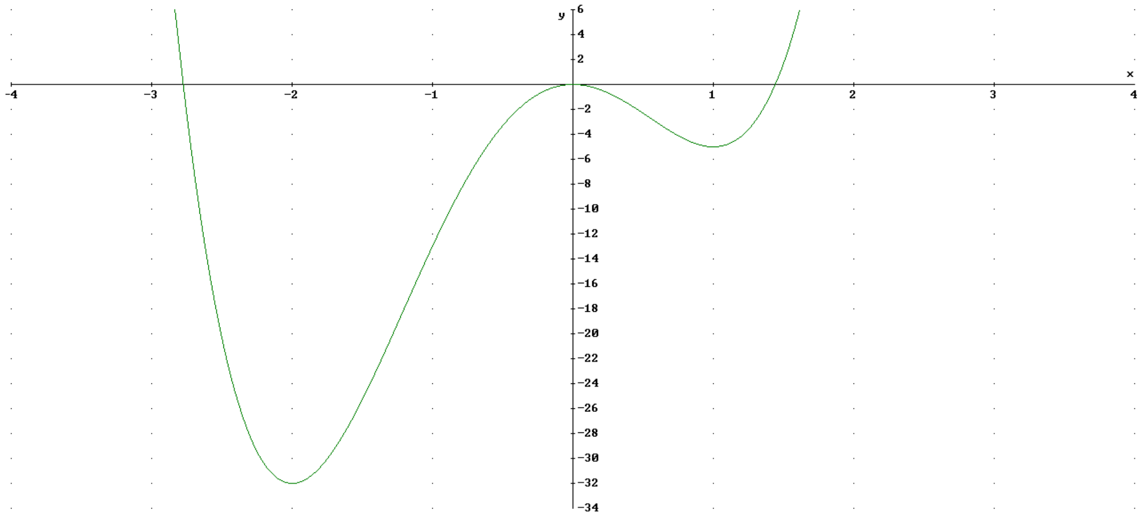
b) $x=-2 \rightarrow f(-2)=-32$
$f(-2^-)=f(-2{,}001)=-31.99$
$f(-2^+)=f(-1.99)=-31.99$
$f(-2^+)>f(-2)$ y $f(2^-)>f(-2) \rightarrow$ en x=-2 mínimo relativo m(-2,-32)

c) $x=-1 \rightarrow f(-1)=-13$
$f(-1^-)=f(-1{,}001)=-13.02$
$f(-1^+)=f(-0.99)=-12.76$
$f(-1^+)>f(-1)>f(-1^-) \rightarrow$ en x=-1 la función crece

d) $x=0 \rightarrow f(0)=0$
$f(0^-)=f(-0{,}001)=-1.2\cdot 10^{-5}$
$f(0^+)=f(0.001)= -1.2\cdot 10^{-5}$
$f(0^+)<f(0)$ y $f(0^-)<f(0) \rightarrow$ en x=0 Máximo relativo M(0,0)

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejercicio 5: estudiar la monotonía y los puntos relativos de la función $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2$ cuya gráfica es:



Creciente: $(-2,0)\cup(1,\infty)$

Decreciente: $(-\infty,-2)\cup(0,1)$

Puntos relativos:

- Máximos: M(0,0)
- Mínimos: $m_1(-2,f(-2))=(-2,-32)$, $m_2(1,f(1))=(1,-5)$

4. Curvatura de una función, concavidad, convexidad y punto de inflexión.

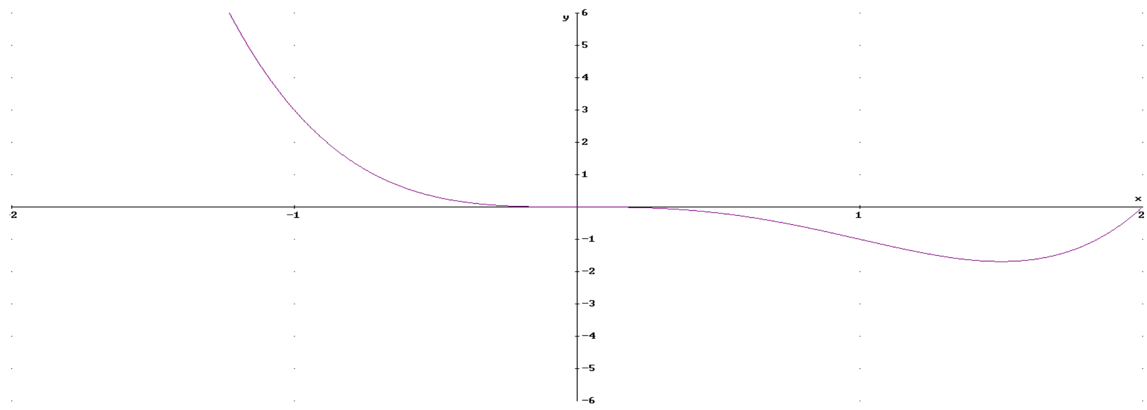
La curvatura se centra en el estudio de la forma de la función, así en un punto puede ocurrir que la función sea:

- ***Concava:*** si dibujamos la recta tangente en el punto se cumple que la recta por debajo de la función. Tiene forma de $\cup$

- ***Convexa:*** si dibujamos la recta tangente en el punto se cumple que la recta por encima de la función. Tiene forma de $\cap$

- ***Punto de Inflexión:*** cuando pasa de cóncava a convexa o al revés.

Ejemplo: estudiar la curvatura de la siguiente función $f(x)=x^4-2x^3$



Concavidad: $(-\infty,0)\cup(1,\infty)$
Convexidad: $(0,1)$
Puntos de inflexión: $P_1(0,0)$, $P_2(1,-1)$

5. Simetría y Periodicidad

5.1 Simetría

La simetría de una función se refiere al comportamiento de la función con respecto al origen y al eje OY. Atendiendo a esto tenemos que la función puede ser:

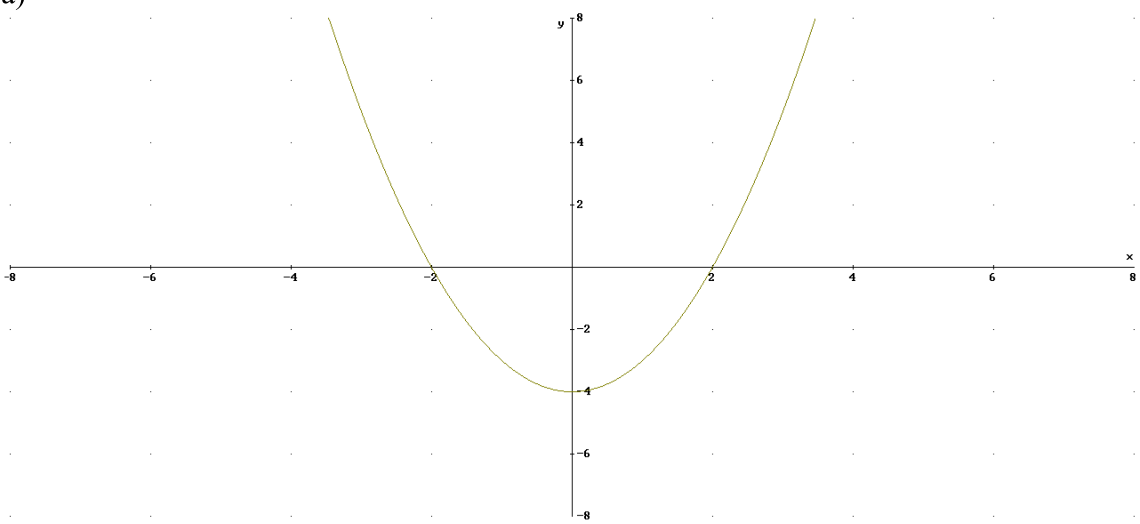
a) ***Simétrica par o respecto el eje OY***: la función se comporta igual a la izquierda y derecha del eje OY, es como si este fuera un espejo. Se cumple $f(x)=f(-x)$
b) ***Simetría impar o respecto del origen:*** la parte izquierda del eje OY de la gráfica es equivalente al de la derecha pero cambiando de signo. Se cumple $-f(x)=f(-x)$
c) ***No simétrica*** cuando no es par ni impar:

Ejemplo: estudiar la simetría de las siguientes funciones

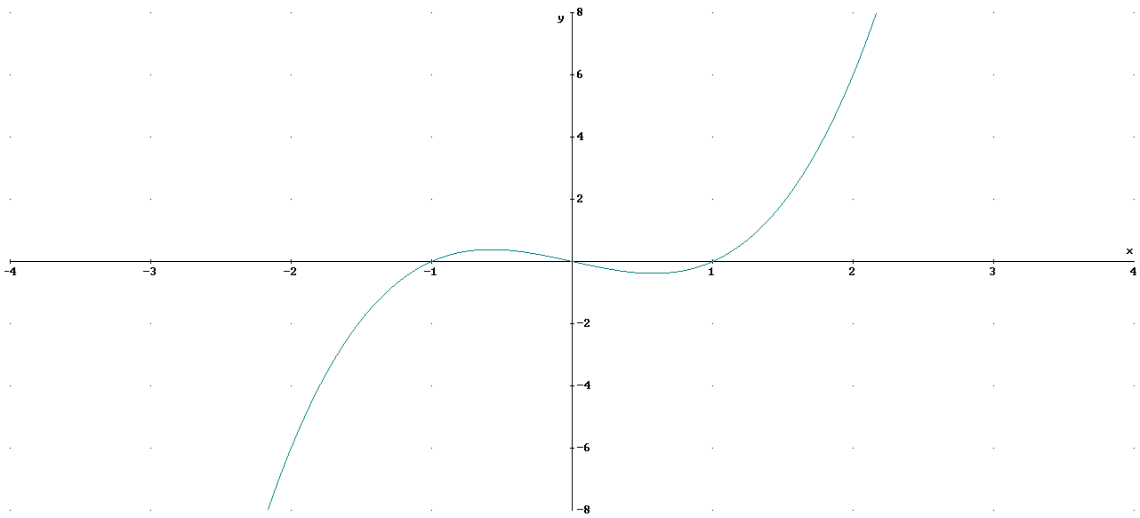
a) $f(x)=x^2-4$
b) $g(x)=x^3-x$
c) $h(x)=x^2-6x+3$

a) $f(-x)=(-x)^2-4=x^2-4=f(x)\rightarrow$ simetría par o respecto eje OX
b) $g(-x)=(-x)^3-(-x)=-x^3+x=-g(x)\rightarrow$simetría impar o respecto el origen
c) $h(x)=(-x)^2-6(-x)+3=x^2+6x+3\neq h(x)$ y $h(-x)\neq h(x)$

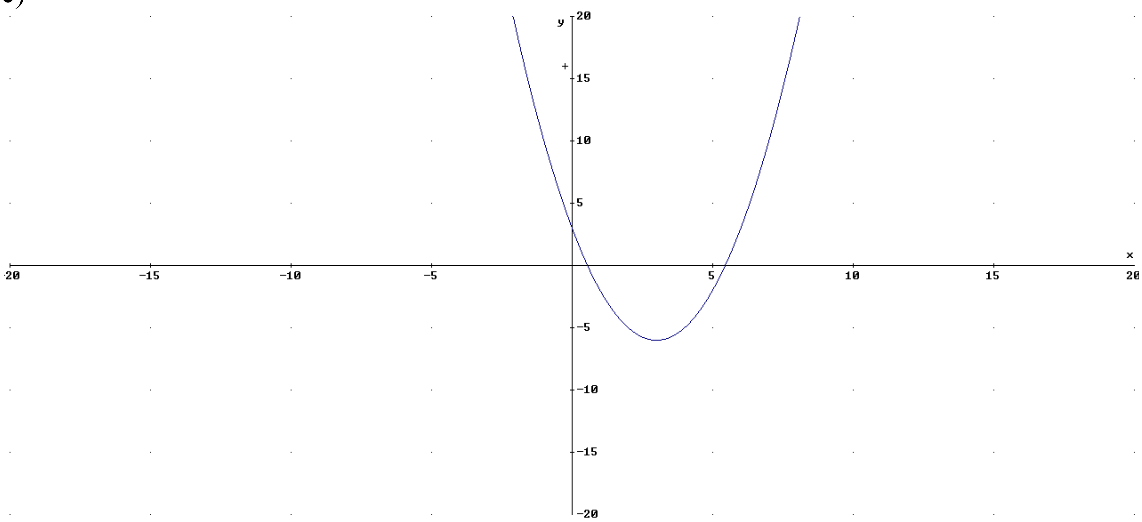
a)



b)



c)



5.2 Periodicidad

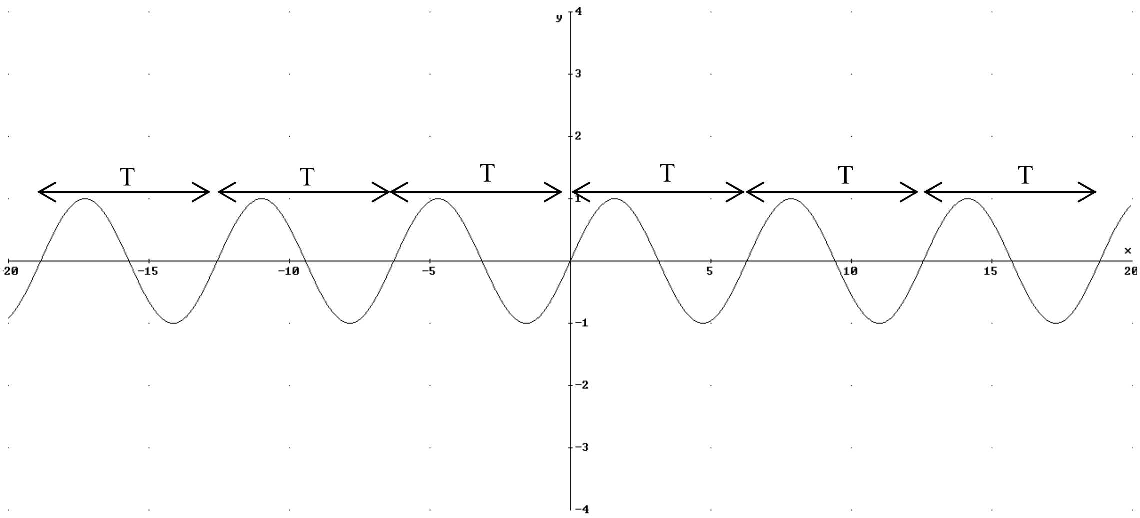
Definición: una función f(x) es periódica cuando su comportamiento se repite cada vez que la x aumenta o disminuye un cierto intervalo. El mínimo intervalo en el que se repite la función se llama periodo (T).

Matemáticamente: $f(x+n\cdot T)=f(x)$ con $n\in N$

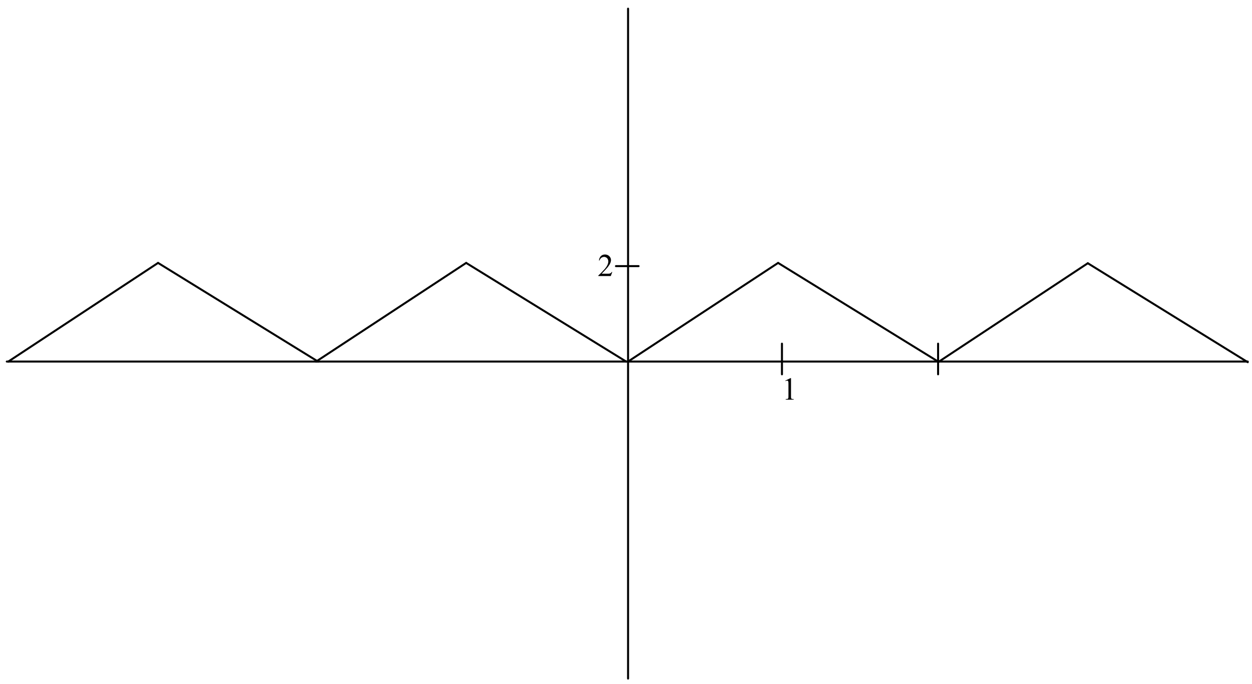
Ejemplo: $f(x)=sen(x)$ (en radianes) → $f(x)=f(x+n\cdot 2\pi)$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

T=2·π



Ejercicio 6. a) Calcular el periodo de la siguiente función, b) Calcular f(17), f(40.5), f(69)



a) El periodo es T=2s

b) resto(17:2)=1→17=1+2·8 → f(17)=f(1)=2

resto(40.5:2)=0,5 →40=2·20+0.5 → f(40.5)=f(0.5)= 1

resto(69,5:2)=1.5 → 69.5=1.5+2·34 → f(69.5)=f(1.5)=1

6. Tendencias, asíntotas

Las tendencias de una función consiste en el estudio del comportamiento de la función, cuando la variable independiente (x) tiende a +∞ y -∞.

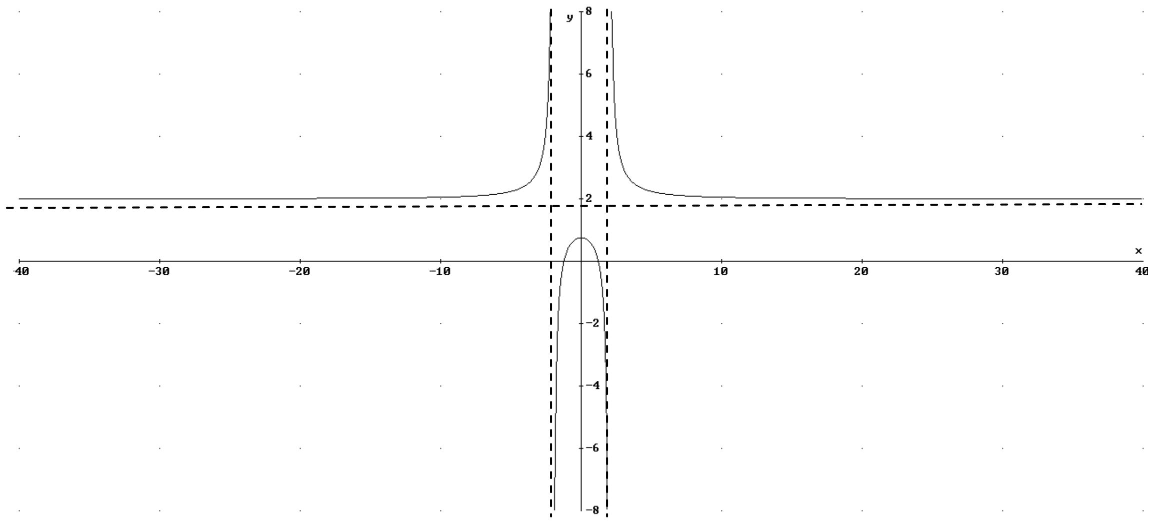
Definición: una asíntota es una recta a la que la función se acerca infinitamente sin llegar a ella. Podemos distinguir entre las siguientes asíntotas:

- ***Vertical:*** La recta es de la forma x=a, con lo que es una recta paralela al eje OY. Ocurre cuando se anula el denominador de una función
- ***Horizontal:*** la recta es de la forma y=b, con lo que la recta es paralela al eje OX. Ocurre cuando al tender a x +∞ y -∞, la función tiende al valor b.
- ***Oblicua:*** la recta es de la forma y=mx+n.

Ejemplo: Estudiar asíntotas y dibujar la gráfica de f(x)=$\frac{2x^2-3}{x^2-4}$

a) Asíntota vertical x=2, x=-2:
$f(2^+)=f(2{,}0001)=1{,}3\cdot10^4$ tiende a ∞, $f(2^-)=f(1.9999)= -1{,}2\cdot10^4$ luego tiende a-∞
$f(-2^-)=f(-2{,}0001)=1{,}3\cdot10^4$ tiende ∞, $f(-2^+)=f(-1.9999)=1{,}2\cdot10^4$ luego tiende -∞

b) Asíntota horizontal f(9999)≈2, f(-9999) ≈2 $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-3}{x^2-4}=2$ → y=2



Ejemplo: Estudiar asíntotas y dibujar la gráfica de f(x)= $\frac{x^2-3}{x+1}$

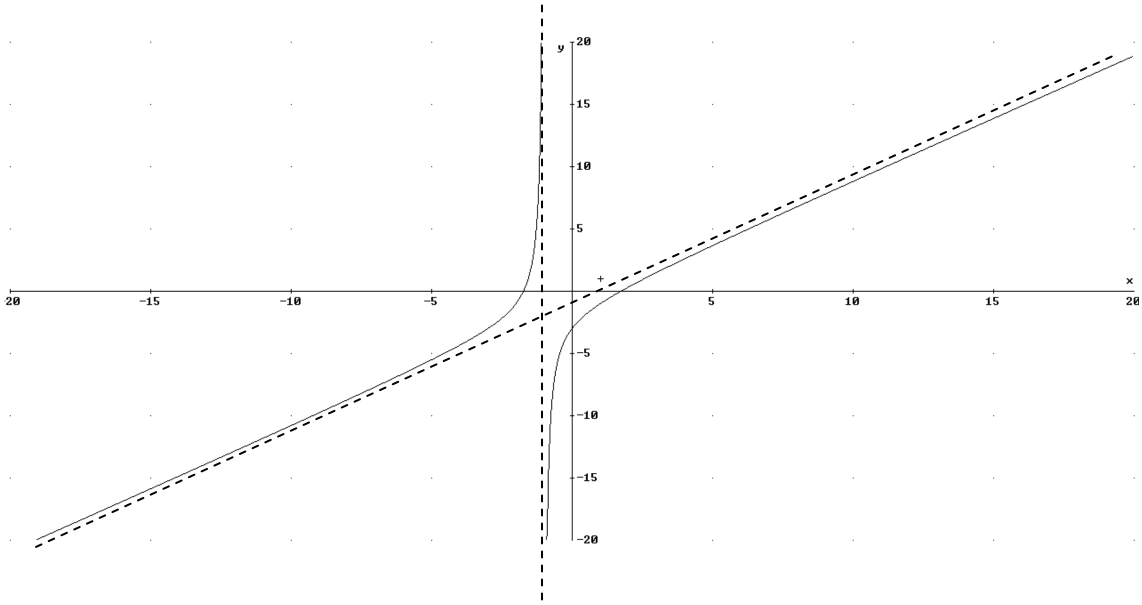
Tiene asíntota vertical en **x=-1**.

$f(-1^-)=f(-1{,}0001)=2\cdot10^4$ tiende a ∞; $f(-1^+)=f(-0.9999)=-2\cdot10^4$ tiende a -∞

Veamos cuando x→±∞

si x→∞ f(9999)≈9998 y si x→-∞ f(-9999) ≈-1000

La función tiende a +∞ si x→∞ y a -∞ si x→-∞. Pero viendo los resultados podemos ver que crece de forma linear, de tal manera que a la x le hace corresponder en el límite un valor de y una unidad menor que x. Esta función tiene asíntota oblicua **y=x-1**



Ejercicio 8: Determina el dominio de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

b. $g(x) = \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 100}$

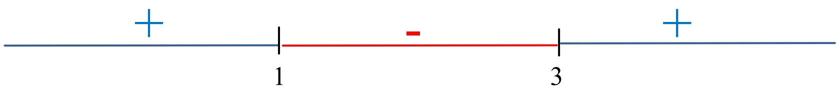
c. $h(x) = \sqrt{\frac{-2}{x^3 + 2x^2 + x}}$

d. $i(x) = ln(\frac{x+3}{x-1})$

Solución

a) Al ser una raíz de índice par x^2-4x+3≥0:

x^2-4x+3=0 → x=3 y x=1



Dom(f(x))=(-∞,1]∪[3,∞)

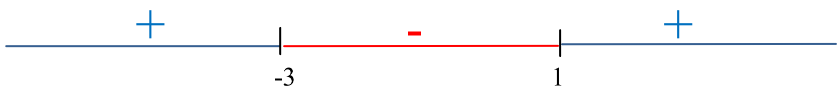
b) Al tener denominador se debe de cumplir que este no se anule.

x^2-100≠0 → x≠±10. Dom(g(x))=R-{10,-10}

c) Tenemos que la función es una raíz cuadrada, luego el radical ha de ser positivo o cero, por otro lado el denominador no puede ser nulo:
$x^3+2x^2+x=x(x+1)^2=0$ → x=0, x=-1.

Dom(h(x))=(-∞,-1)∪(-1,0)

d) La función es un logaritmo, luego el argumento ha de ser positivo, además el denominador no puede ser cero:
$\frac{x+3}{x-1} > 0$ y $x\neq 1$



Dom(i(x))=$(-\infty,-3)\cup(1,\infty)$

Ejercicio 9: Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a. f(x)=$\begin{Bmatrix} x+1 \ \ si\ x\leq 1 \\ 2x-2\ si\ x>1 \end{Bmatrix}$

b. g(x)= $\begin{Bmatrix} -x\ \ si\ x<-1 \\ x+2\ si\ x>-1 \end{Bmatrix}$

c. $h(x)=\frac{x^3-3x}{x^2-100}$

Solución

a) El dominio de f(x) es todo los reales, pues el 1 está incluido. Veamos si es continua en x=1:
$f(1^+)=2\cdot 1-2=0$
$f(1^-)=1+1=2$
Como $f(1^+)\neq f(1^-)$ → no continua en x=1 de salto finito.
La función f(x) es continua en R-{1}

b) El domino de g(x) es R-{-1}, ya que en x=-1 la función no definida. Por otro lado $f(-1^-)=1=f(-1^+)=-1+2$. Luego la discontinuidad es del tipo evitable.
La función es continua en R-{-1}

c) Esta función será continua en todos los puntos donde no se anule el denominador, es decir en R-{-10,10}. En estos valores hay discontinuidad de salto finito, es decir la función tiene en x=10 y x=-10 dos asíntotas verticales.

Ejercicio 10: Estudia la simetría de las siguientes funciones:

a. $f(x)=x^3-7x$
b. $h(x)=x^6-2x^4-5$
c. $i(x)=x^3+2x-3$
d. $g(x)=\frac{x^3-3x}{x^2-100}$

Solución

a) $f(-x)=-x^3+7x=-f(x)$ →simetría impar

b) $h(-x)=x^6-2x^4-5=h(x)$ →simetría par

c) $i(-x)=-x^3-2x-3\neq i(x),-i(x)$→ no simétrica

d) g(-x)=$\frac{-x^3+3x}{x^2-100}=-\frac{x^3-3x}{x^2-100}=-g(x)$→ simetría impar

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejercicio 11: Estudia las asíntotas de las siguientes funciones

a. $f(x) = \frac{x^3-3x}{x^2-100}$

b. $g(x)=\frac{x^2-3}{x^3}$

Solución

a) ***Asíntotas verticales***: donde se anula el denominador $\rightarrow x^2-100=0 \rightarrow x=\pm 10$

Asíntota x=-10, veamos si cuando x se acerca a -10 tiende a más o menos infinito:

$x \rightarrow -10^-$ $f(-10^-)=f(-10{,}0001)=-4.85\cdot 10^5$ luego $y \rightarrow -\infty$
$x \rightarrow -10^+$ $f(-10^+)=f(-9.9999)= 4.85\cdot 10^5$ luego $y \rightarrow +\infty$

Asíntota x=10, veamos si cuando x se acerca a 10 tiende a más o menos infinito:

$x \rightarrow 10^+$ $f(10^+)=f(10{,}0001)=4.85\cdot 10^5$ luego $y \rightarrow \infty$
$x \rightarrow 10^-$ $f(10^-)=f(9.9999)= -4.85\cdot 10^5$ luego $y \rightarrow -\infty$

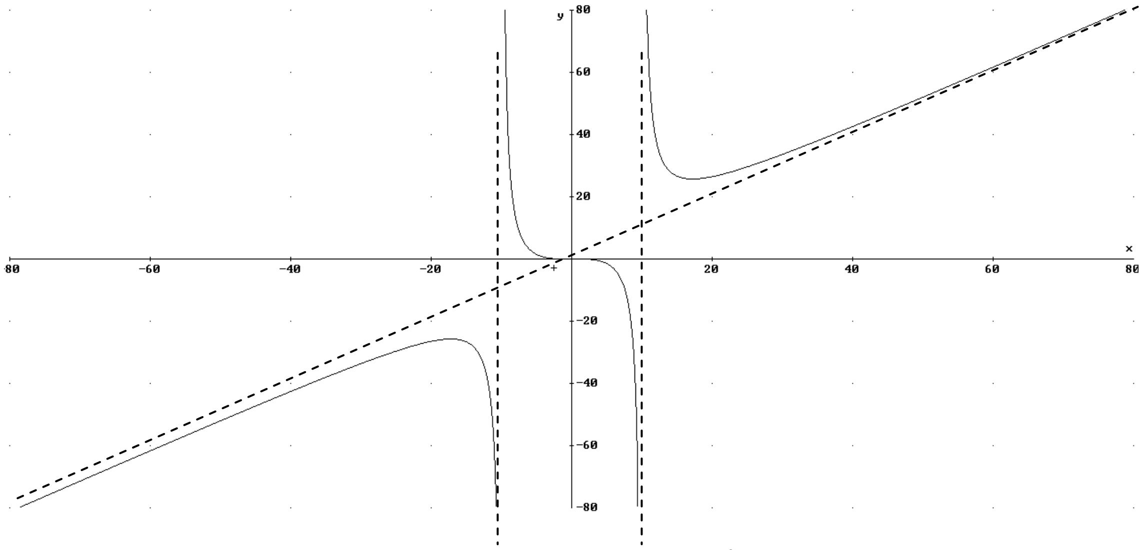
Asíntotas horizontales y oblicuas:

Veamos hacia qué valor tiende la función cuando $x \rightarrow \pm\infty$

Si $x \rightarrow \infty$: $f(9999) \approx 9999$ tiende a $+\infty$ pero de tal forma que y=x

Si $x \rightarrow -\infty$: $f(-9999) \approx -9999$ tiende a $-\infty$ pero de la forma y=x

Luego la asíntota es oblicua y=x



b) ***Asíntotas verticales***: donde se anula el denominador $\rightarrow x^3=0 \rightarrow x=0$

Asíntota x=0, veamos si cuando x se acerca a 0 tiende a más o menos infinito:

$x \rightarrow 0^-$ $f(0^-)=f(-0{,}0001)=3\cdot 10^{12}$ luego $y \rightarrow \infty$
$x \rightarrow 0^+$ $f(-10^+)=f(0.00001)= -3\cdot 10^{12}$ luego $y \rightarrow -\infty$

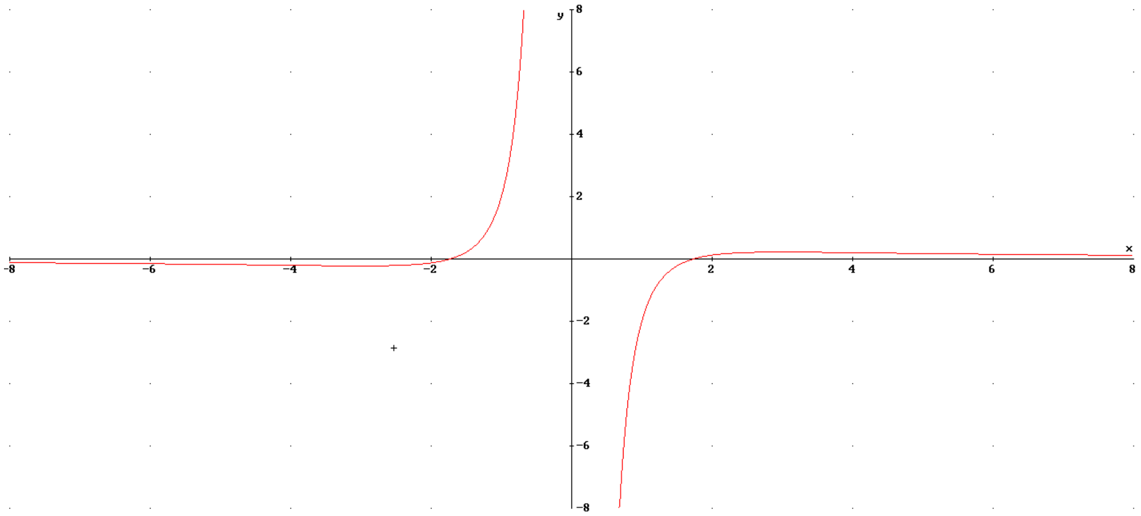
Asíntotas horizontales y oblicuas:

Veamos hacia qué valor tiende la función cuando $x \rightarrow \pm\infty$

Si $x \rightarrow \infty$: $f(9999) \approx 0.0001$ tiende a 0 .

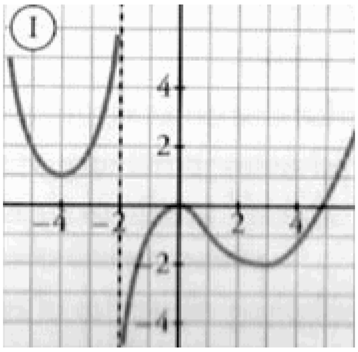
Si $x \rightarrow -\infty$: $f(-9999) \approx -0.00001$ tiende a 0.

Luego la asíntota es horizontal y=0



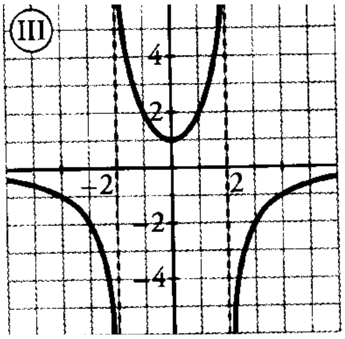
Ejercicio 12: Dibuja la gráfica de la función que cumple

- **a)** Asíntota vertical en x=-2
- **b)** Creciente en (-4,-2)∪(-2,0)∪(3,∞) y decreciente en (-∞,-4)∪(0,3)
- **c)** Mínimo en (-4,1) y (3,-2). Máximo en (0,0)
- **d)** forma ∪ en intervalo (-∞,-2)∪(1,∞) y forma de ∩ en (-2,1)
- **e)** Punto de inflexión en (1,-1)



Ejercicio 13: Dibuja la gráfica de la función que cumple

- **a)** Simetría par
- **b)** Asíntotas verticales en x=-2 y x=2. Asíntota horizontal y=0
- **c)** Decreciente en (-∞,-2)∪(-2,0) y creciente en (0,2)∪(2,∞)
- **d)** Mínimo en (0,1)
- **e)** ¿Cómo es la curvatura? Cóncava:(-∞,-2)∪(2,∞), convexa: (-2,2)



Ejercicio 14: Dibuja la gráfica de la función que cumple

- **a)** Simetría impar
- **b)** Asíntotas verticales en x=-1 y x=1. Asíntota oblicua y=x
- **c)** Creciente en (-∞,-1.7)∪(1.7,∞) y decreciente en (-1.7,-1)∪(-1,1)∪(1,1.7)
- **d)** Mínimo en (1.7, 2.6) y máximo en (-1.7,-2.6)
- **e)** Punto de inflexión en en (0,0)
- **f)** ¿Cómo es la curvatura? Cóncava: (-∞,-1)∪(0,1); convexa: (-1,0)∪(1,∞)