

## Tema 8. Limite de funciones. Continuidad

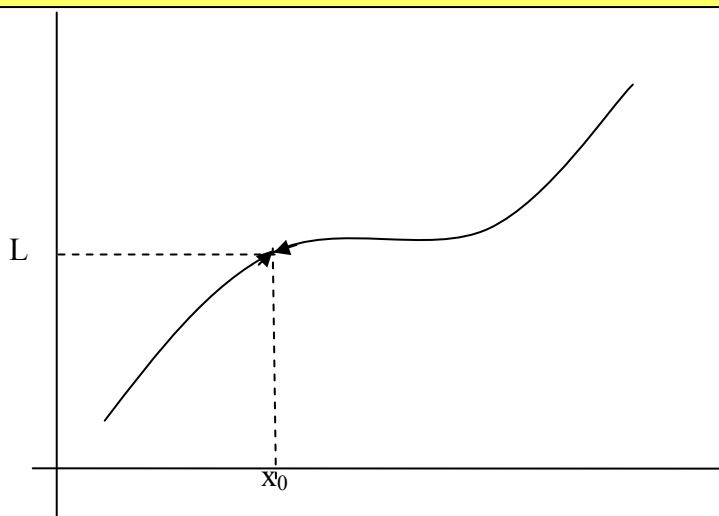
1. Límite de una función. Funciones convergentes.....	2
2. Límites laterales .....	3
3. Distintos tipos de límites .....	5
3.1 Límites infinitos cuando x tiende a un número real (asíntota vertical) .....	5
3.2 Límites finitos cuando x tiende a infinito (asíntota horizontal) .....	8
3.3 Límites infinitos cuando x tiende a infinito.....	9
4. Cálculo de límites .....	14
4.1 Operaciones con límites. Indeterminaciones .....	14
4.2 Resolución de límites sin indeterminaciones. ....	16
4.3 Resolución indeterminaciones del tipo $\infty-\infty$ .....	16
4.4.Resolución de indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ .....	17
4.5. Resolución de indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ .....	19
4.6. Resolución de indeterminaciones del tipo $\frac{k}{0}$ .....	20
4.7. Resolución de indeterminaciones del tipo $0\cdot\infty$ .....	20
4.8. Resolución de indeterminaciones del tipo $\infty -\infty$ .....	20
4.9. Resolución de indeterminaciones del tipo $1^\infty$ .....	21
5. Definición de continuidad .....	26
6. Tipos de discontinuidades .....	28
7. Continuidad de las funciones elementales. Operaciones con funciones continuas. ....	30

## 1. Límite de una función. Funciones convergentes

La idea intuitiva de límite de una función en un punto es fácil de comprender: es el valor hacia el que se aproxima la función cuando la variable independiente,  $x$ , se aproxima a dicho punto.

*Ejemplo:* sea  $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$  el límite de la función cuando  $x$  tiende a 1 es infinito, ya que cuanto más se aproxima  $x$  a 1 entonces  $(x-1)^2$  más próximo a cero (positivo), y por tanto la función se hace más grande ( $1/0.00000001=100000000$ ).

**Definición:** Matemáticamente una función  $f$  tiene límite  $L$  cuando  $x$  tiende a un valor  $x_0$ , y se denota  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  si se cumple que cuanto más se acerca la  $x$  a  $x_0$  (tanto a la derecha,  $x_0^+$ , como a la izquierda,  $x_0^-$ ) el valor de la función,  $f(x)$  más se aproxima a  $L$ .

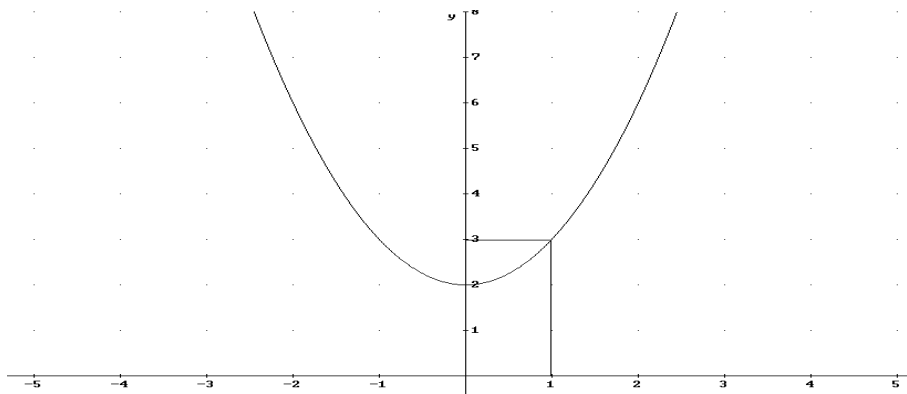


Vamos a considerar dos casos diferentes:

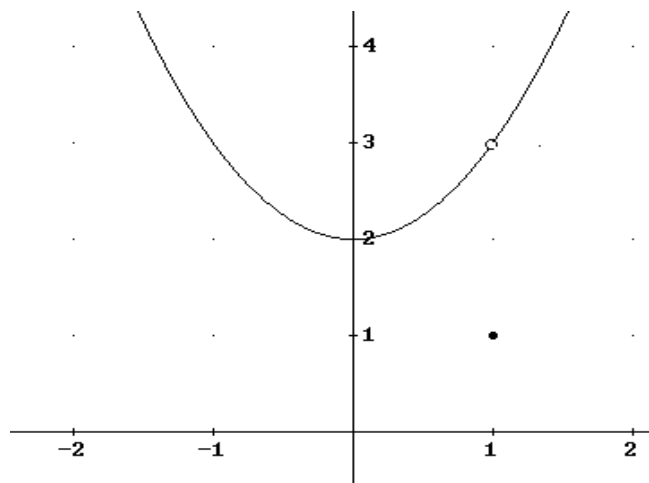
- a)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  y  $f(x_0) = L$  (veremos que es la definición de continua)
- b)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  pero  $f(x_0) \neq L$

*Ejemplo:*

a)  $f(x) = x^2 + 2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3 = f(1)$ . Veamos la gráfica de la función:



$$b) g(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3 \quad g(1) = 1$$



**Definición:** Dada una función  $f(x)$ , se dice que es convergente en  $x_0$  si, existe el límite  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ , distinto de  $\pm\infty$

Para que  $f(x)$  sea convergente en  $x_0$  no es necesario que  $x_0$  pertenezca al dominio, por ejemplo

$$g(x) = x^2 + 1 \text{ si } x \neq 1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2, 1 \notin \text{Dom}(g(x)), \text{ y la función si es convergente}$$

## 2. Límites laterales

Existen funciones definidas a trozos, son aquellas que están definidas de diferente manera a lo largo de distintos intervalos de la recta real. En estas funciones, cuando queremos estudiar el límite en los puntos donde cambia la expresión analítica, es necesario calcular los límites laterales, viéndose así la tendencia de la función a ambos lados del punto.

**Definición:** Una función  $f$  tiene límite  $L$  cuando  $x$  tiende a un valor  $x_0$  por la izquierda, y se denota  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$ , si se cumple que cuando nos acercamos al valor de  $x_0$  para  $x$  menores que  $x_0$  la función se acerca a  $L$ .

Consiste en estudiar el comportamiento de la función en el entorno a la izquierda de  $x_0$ .

**Definición:** Una función  $f$  tiene límite  $L$  cuando  $x$  tiende a un valor  $x_0$  por la derecha, y se denota  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ , si se cumple que cuando nos acercamos al valor de  $x_0$  para  $x$  mayores que  $x_0$  la función se acerca a  $L$ .

Consiste en estudiar el comportamiento de la función en todo entorno a la derecha de  $x_0$ .

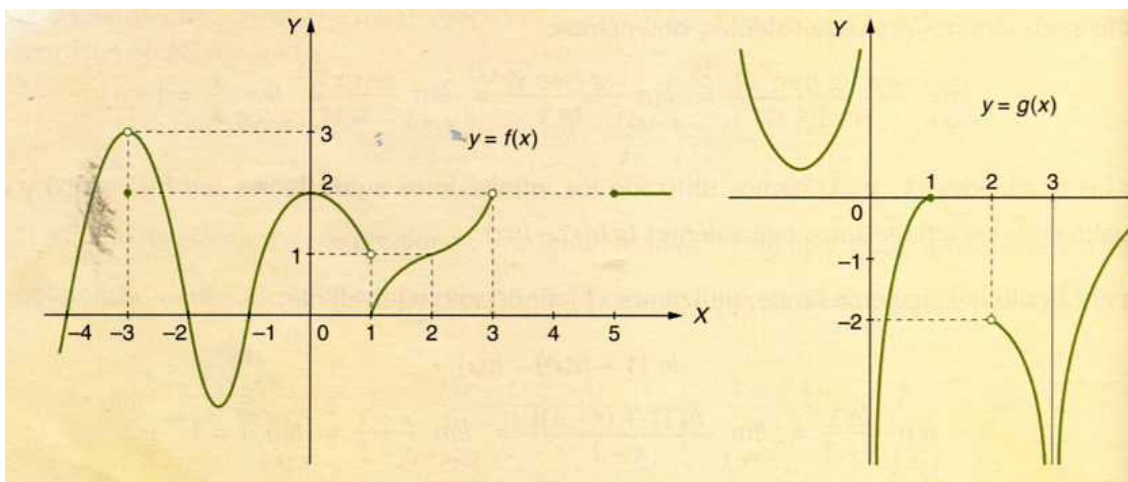
**Teorema:** El límite de una función  $f(x)$  en  $x_0$  existe si, y sólo si, existen los límites laterales y éstos coinciden:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

Este teorema será muy importante en los ejercicios de la PAU donde se nos pide estudiar la continuidad de funciones definidas a trozos. Además, como veremos en el apartado de cálculo de límites, ya que es el método utilizado para resolver las indeterminaciones de los límites del tipo  $\frac{k}{0}$

**Ejercicio 1.** Calcular los límites y valores en la función de las siguientes funciones representadas:



- a)  $f(-3)=2, f(-2)=0, f(0)=2, f(4) \notin \text{Dom}(f(x))$
- b)  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 3, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \text{no existe}, \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \text{no existe}$   
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \text{no existe}, \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$
- c)  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = -2, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = +\infty,$   
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \text{no existe}, \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \text{no existe}$

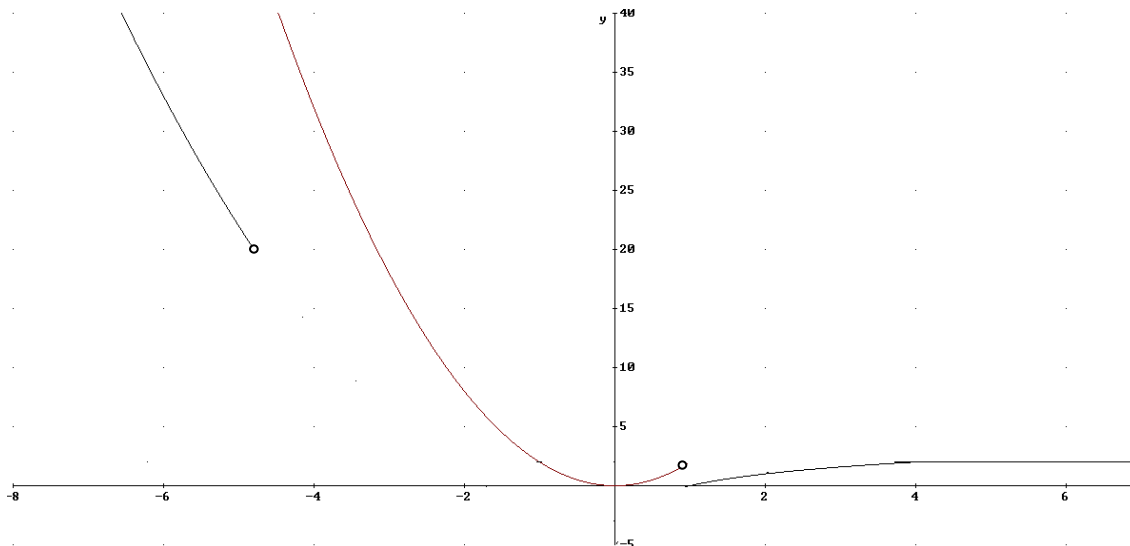
**Ejercicio 2.** Calcular los siguientes límites a la función  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x < -5 \\ 2x^2 & \text{si } -5 \leq x < 1 \\ \log_2 x & \text{si } 1 \leq x < 4 \\ 2 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

a)  $\lim_{x \rightarrow -5} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5^-} x^2 - 3 = 22 \\ \lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5^+} 2x^2 = 50 \end{cases} = \text{no existen al ser los laterales distintos}$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x^2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \log_2 x = 0 \end{cases} = \text{no existen al ser los laterales distintos}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \log_2 x = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} 2 = 2 \end{cases} = 2$$

Veamos la gráfica de la función:



### 3. Distintos tipos de límites

#### 3.1 Límites infinitos cuando x tiende a un número real (asíntota vertical)

En este apartado vamos a estudiar el caso de funciones que cuanto más se aproxima x a un valor  $x_0$ , bien por la izquierda, por la derecha o por los dos, la función se hace infinitamente grande (tiende a  $+\infty$ ) o pequeña (tiende a  $-\infty$ ). Cuando esto ocurre se dice que la función  $f(x)$  tiene asíntota vertical en  $x=x_0$ . Veamos los siguientes casos:

**Definición:** Una función  $f(x)$  tiene límite  $+\infty$  cuando x tiende a  $x_0$  por la izquierda si cuando al acercamos a  $x_0$  con  $x < x_0$  la función crece de forma infinita. Se escribe como:

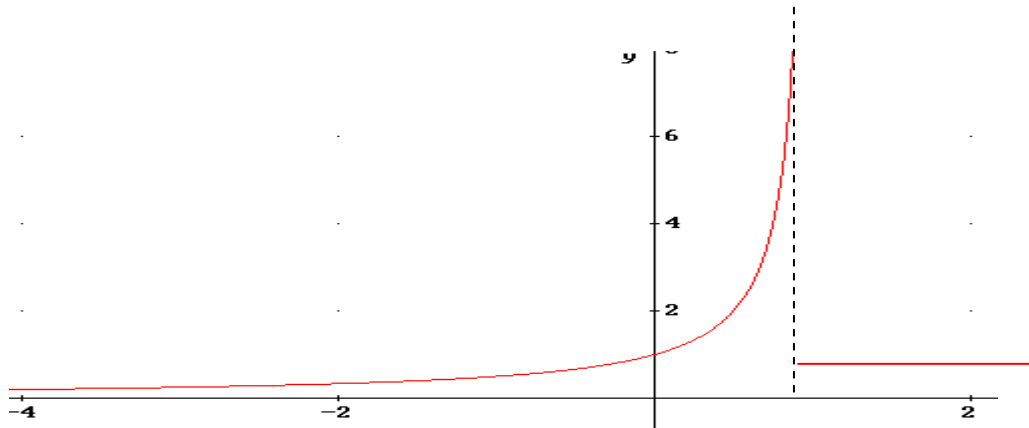
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$

$$\text{Ejemplo: } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$  ya que cuanto más se aproxime x a 1 por la izquierda entonces  $x-1$  más pequeño y positivo y por tanto  $f(x)$  más grande. Es decir, cuando  $x \rightarrow 1^-$  entonces la función  $f(x) \rightarrow +\infty$ .

En cambio  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$

Cuando esto ocurre la función se aproxima a la asíntota vertical  $x=1$ . Es decir cuando la función se aproxima a 1 por la izquierda, ésta se acerca infinitamente a la recta  $x=1$ , que es paralela al eje OY. Veamos la gráfica:



**Definición:** Una función  $f(x)$  tiene limite  $+\infty$  cuando  $x$  tiende a  $x_0$  por la derecha si cuando al cercamos a  $x_0$  con  $x > x_0$  la función crece de forma infinita. Se escribe como:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$$

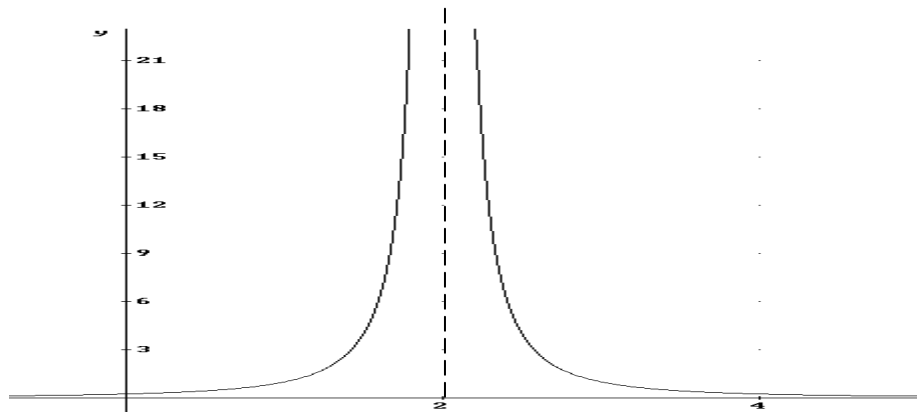
**Definición:** Una función  $f(x)$  tiene limite  $+\infty$  cuando  $x$  tiende a  $x_0$  si cuando al cercamos a  $x_0$  con  $x > x_0$  y  $x < x_0$  la función crece de forma infinita. Esto ocurre cuando los dos límites laterales valen  $\infty$ . Se escribe como:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

**Ejemplo:**  $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{0^+} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{0^+} = \infty \end{cases} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty$$

Veamos la gráfica de la función y así podremos interpretar el significado del límite:



De igual forma que hemos estudiado el límite a  $+\infty$ , el límite a  $-\infty$  es equivalente., sólo hay que cambiar crecimiento infinito por decrecimiento infinito

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$$

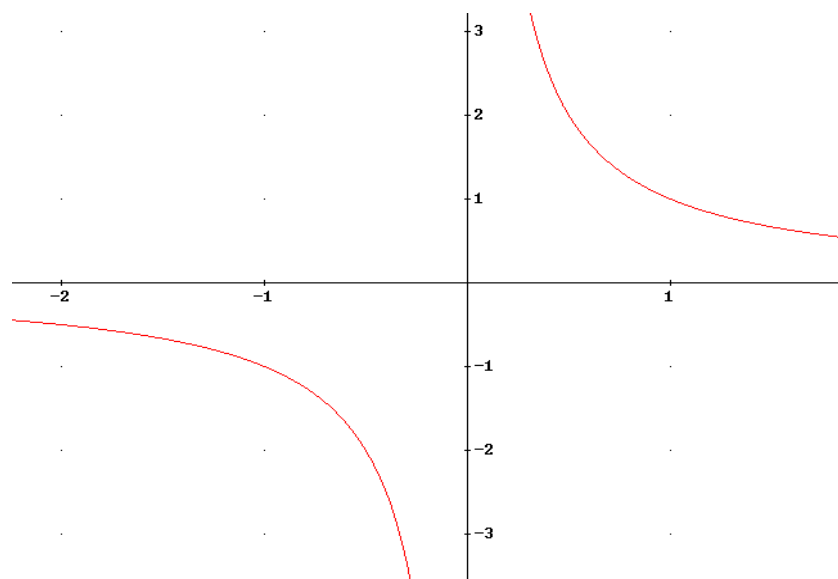
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

Muchas veces las funciones  $f(x)$  tienden a  $+\infty$  por un lado de  $x_0$  y a  $-\infty$  por el otro lado de  $x_0$ ; cuando esto ocurre el  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  no existe, ya que para existir debe coincidir los límites laterales. Si bien aunque el límite no exista la función si tiene asíntota vertical.

**Ejemplo:**

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \text{no existe} \rightarrow \text{Asíntota Vertical } x=0$$

Veamos la gráfica:



**Definición:** La función  $f(x)$  tiene asíntota vertical en  $x_0$  cuando se cumpla alguno de estos 6 límites:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

### 3.2 Límites finitos cuando $x$ tiende a infinito (asíntota horizontal)

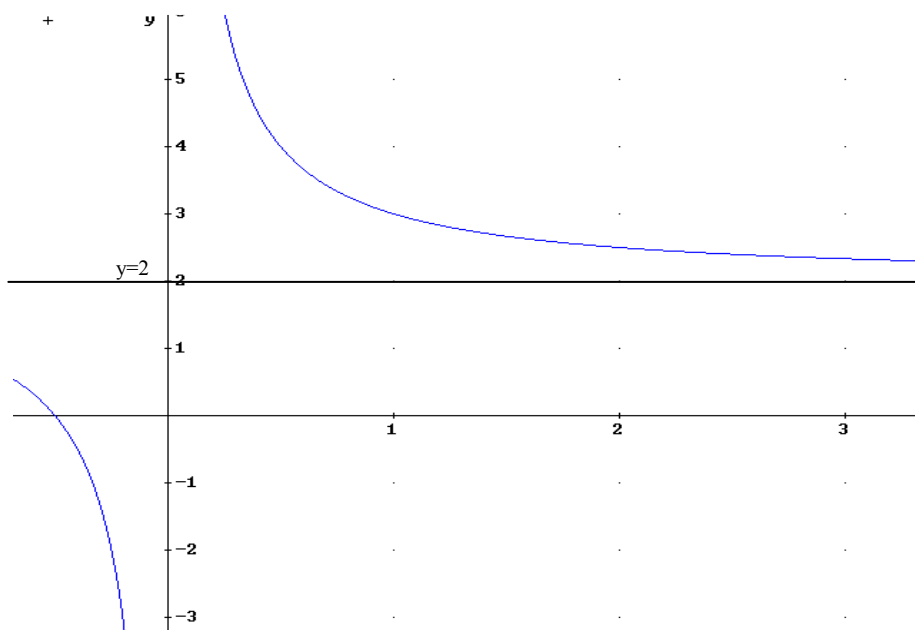
En este apartado estudiamos el comportamiento de algunas funciones en las que, cuando la  $x$  toma valores muy grandes o muy pequeños, la función se aproxima cada vez más a un valor  $L$ . Si esto ocurre se dice que  $f(x)$  tiende a  $L$  cuando  $x$  tiende a  $+\infty$  o a  $-\infty$ . Veamos la definición:

**Definición:** Una función  $f$  tiene por límite un número real  $L$  cuando  $x$  tiende a  $+\infty$ , si se cumple que cuanto mayor es el valor de  $x$  el valor de la función se aproxima más a  $y=L$ . Se escribe como

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

**Ejemplo:**

$$y=f(x)=(2x+1)/x \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$$



**Definición:** Una función  $f$  tiene por límite un número real  $L$  cuando  $x$  tiende a  $-\infty$ , si se cumple que cuanto menor es el valor de  $x$  el valor de la función se aproxima más a  $y=L$ . Se escribe como

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

La función anterior  $y=f(x)=(2x+1)/x$  cumple también que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$



**Definición:** Una función  $f(x)$  tiene una asíntota horizontal en  $y=y_0$  si se cumple una de las siguientes condiciones (o las 2):

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y_0$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$

Cuando esto ocurre la función tiene una asíntota horizontal  $y=L$ . Es decir, cuando  $x$  se hace infinitamente grande ( $x \rightarrow \infty$ ) o infinitamente pequeño ( $x \rightarrow -\infty$ ), la función se acerca a la recta paralela al eje OX  $y=L$

### 3.3 Límites infinitos cuando $x$ tiende a infinito

En este último apartado estudiaremos 4 casos:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$

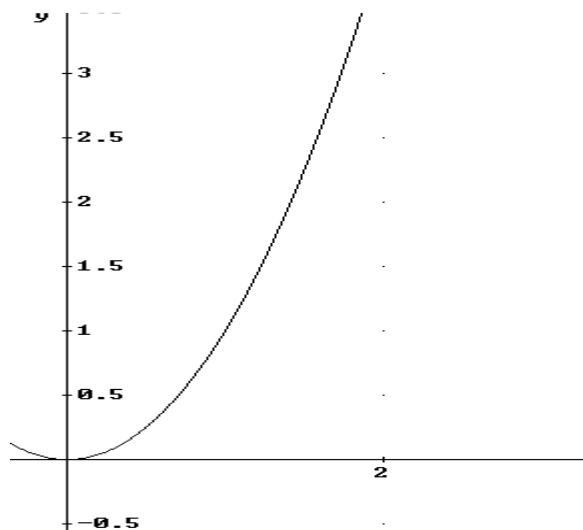
b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

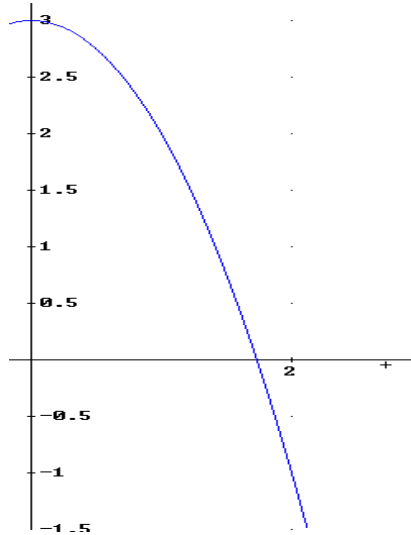
a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty \rightarrow$  cuando  $x$  se hace muy grande el valor de la función también.

*Ejemplo:*  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = +\infty$



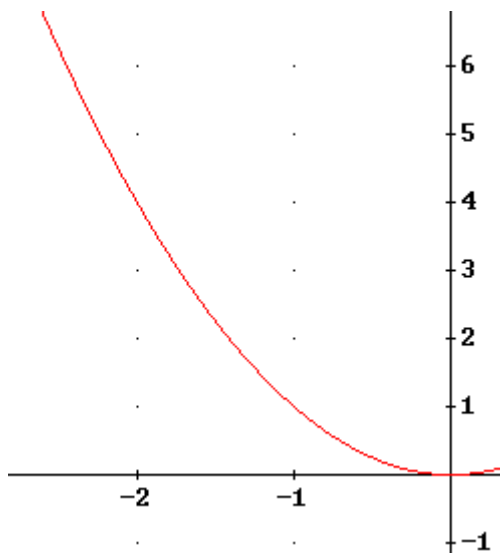
b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \rightarrow$  cuando  $x$  se hace muy grande el valor de la función muy pequeña (negativa).

Ejemplo:  $y = -x^2 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} -x^2 = -\infty$



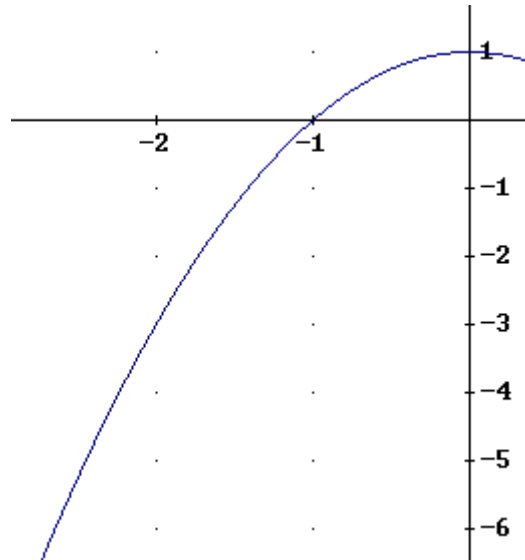
c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \rightarrow$  cuando  $x$  se hace muy pequeña (negativa) el valor de la función se hace muy grande.

Ejemplo:  $y = f(x) = x^2, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$



d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \rightarrow$  cuando  $x$  se hace muy pequeña (negativa) el valor de la función también.

**Ejemplo:**  $y=f(x)=-x^2+1 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 + 1 = -\infty$



**Ejercicio 3.** Calcular las asíntotas verticales y horizontales de las siguientes funciones. Trata de bocetar la gráfica de la función:

a)  $f(x) = \frac{5x + 2}{x + 3}$

b)  $g(x) = \frac{x^2 + 2}{x^3 - 4x}$

**Solución**

a)  $f(x) = \frac{5x + 2}{x + 3}$

**A.V.:** Verticales cuando el límite es infinito (donde se anula el denominador):  $x=-3$ :

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \frac{-3}{0^+} = -\infty \quad \text{el limite no existe pero hay AV en } x=-3$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \frac{-3}{0^-} = \infty$$

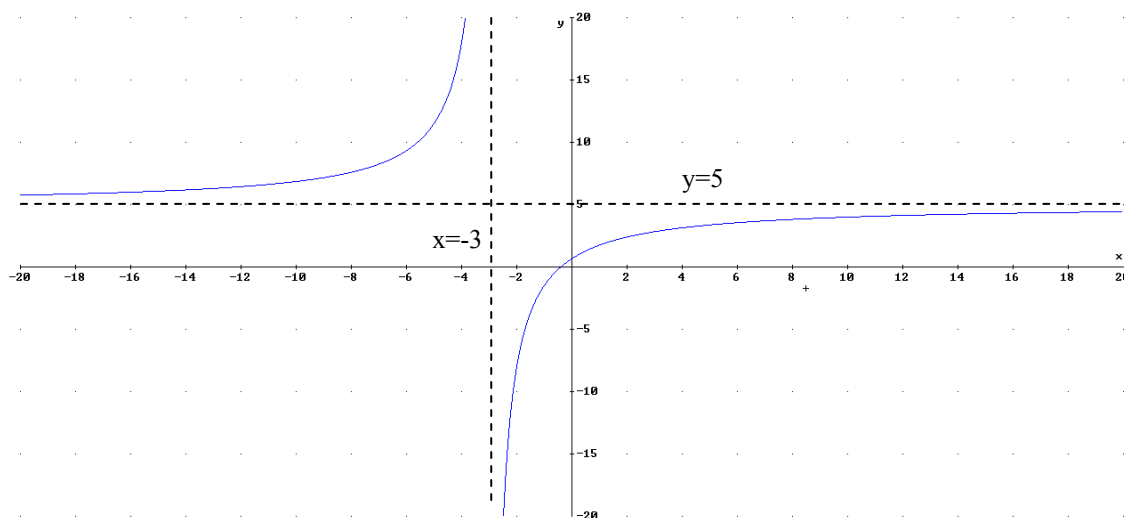
**A.H.:** Cuando el límite en  $\infty$  y/o  $-\infty$  es un número:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x}{x} = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x}{x} = 5$$

Luego tiene asíntota horizontal  $y=5$ , tanto cuando  $x \rightarrow \infty$  como cuando  $x \rightarrow -\infty$ .

Veamos la gráfica:



b)  $g(x) = \frac{x^2 + 2}{x^3 - 9x}$

**A.V.:**  $x^3 - 9x = 0 \rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \rightarrow x = 0, x = 9, x = -9$ . Son asíntotas verticales:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2}{x(x-3)(x+3)} = \begin{matrix} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \frac{2}{0^+ \cdot (-9)} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \frac{2}{0^- \cdot (-9)} = \infty \end{matrix}$$

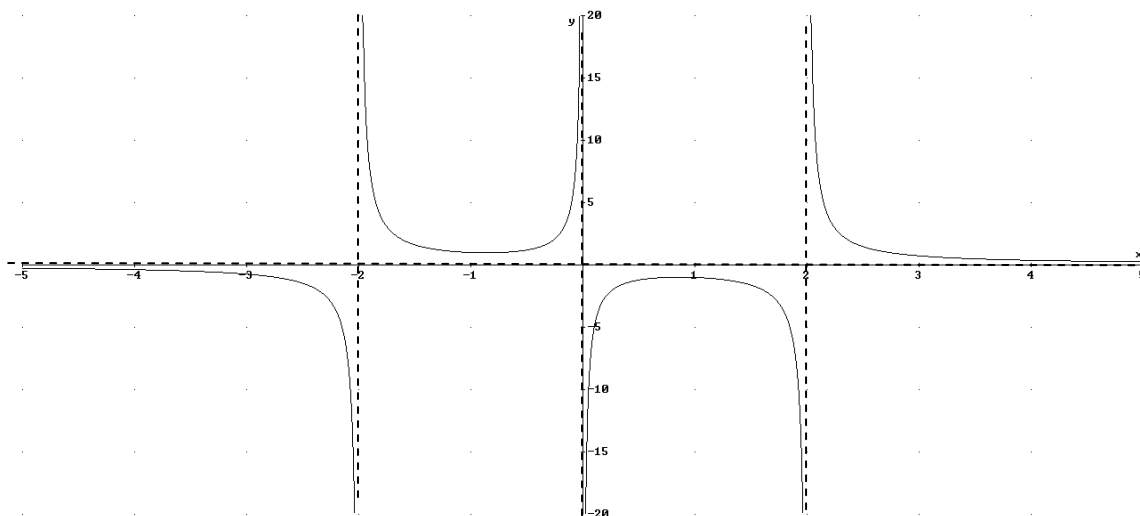
$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2}{x(x-3)(x+3)} = \begin{matrix} \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \frac{11}{3 \cdot 0^+ \cdot 6} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \frac{11}{3 \cdot 0^- \cdot 6} = -\infty \end{matrix}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} g(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2}{x(x-3)(x+3)} = \begin{matrix} \lim_{x \rightarrow -3^+} g(x) = \frac{11}{-3 \cdot (-6) \cdot 0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^-} g(x) = \frac{11}{-3 \cdot (-6) \cdot 0^-} = -\infty \end{matrix}$$

**A.H.:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{x^3 - 4x} = 0$  ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2}{x^3 - 4x} = 0$

La asíntota horizontal es  $y=0$ , tanto para cuando  $x$  tiene a  $+\infty$  como a  $-\infty$

Veamos la gráfica:



**Ejercicio 4.** Representar una función que cumpla las siguientes premisas:

a)

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5$

g)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5$

f)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

c)  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \infty$

h)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 10$

d)  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$

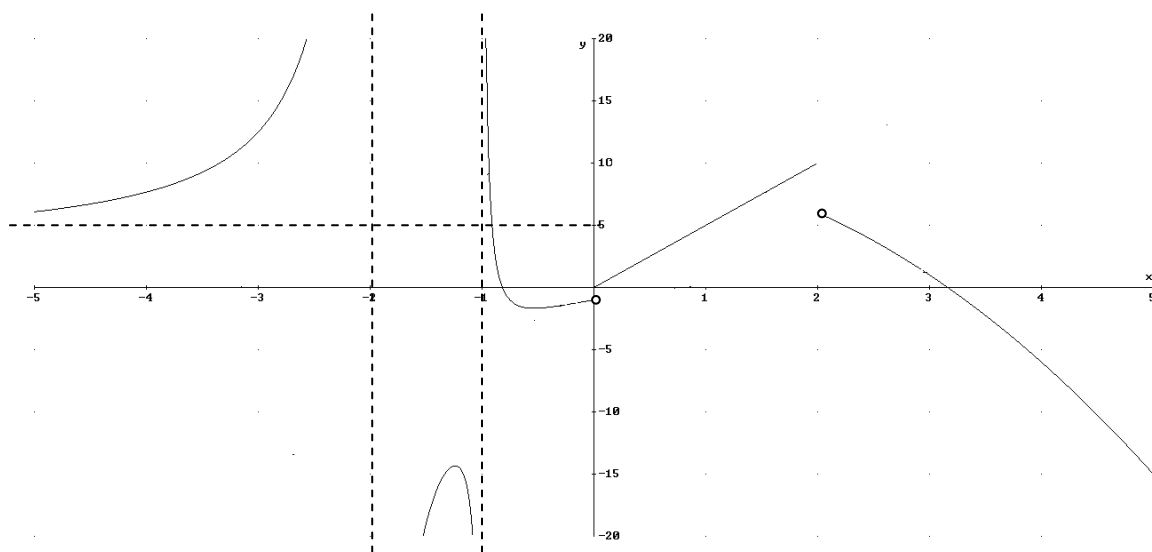
i)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 6$

e)  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$

j)  $f(0) = 0$

f)  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \infty$

k)  $f(2) = 10$



b)

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

h)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$

i)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 10$

c)  $\lim_{x \rightarrow -10^-} f(x) = 2$

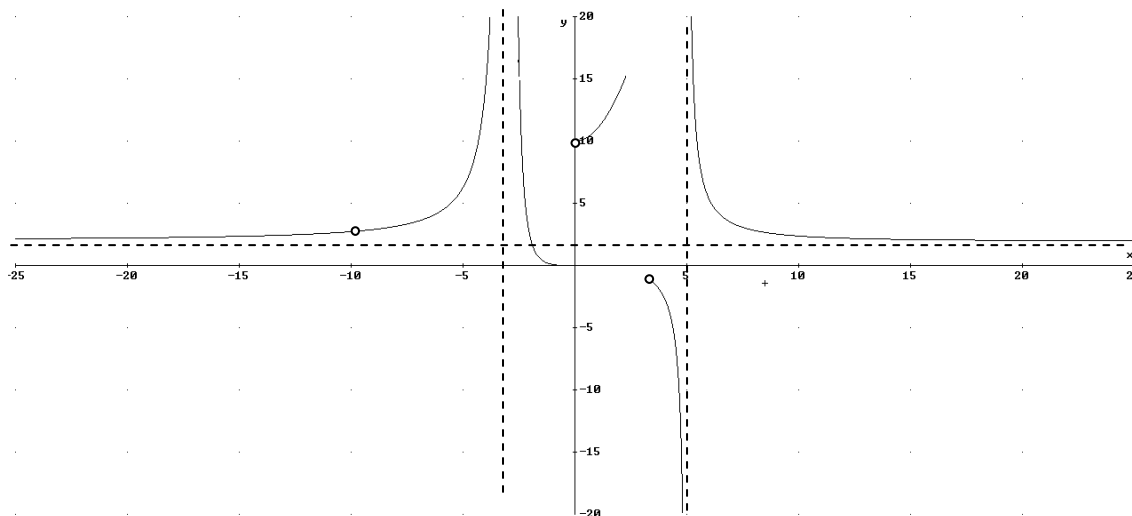
j)  $f(0) = 10$

d)  $-10 \notin \text{Dom}(f(x))$

e)  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \infty$

f)  $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = -\infty$

g)  $\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = \infty$



## 4. Cálculo de límites

### 4.1 Operaciones con límites. Indeterminaciones

Al haber límites cuyo valor es  $\infty$  y  $-\infty$ , tendremos que ver cómo operan los números reales con  $\pm\infty$ . Veámoslo:

#### Suma y diferencia:

1)  $\forall k \in \mathbb{R} \quad k \pm \infty = \pm \infty$

2)  $\infty + \infty = \infty$

3)  $-\infty - \infty = -\infty$

#### Producto:

1)  $\forall k \in \mathbb{R}^+ (k > 0) \quad k \cdot \infty = \infty \rightarrow$  ejemplo  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty$

2)  $\forall -k \in \mathbb{R}^- (-k < 0) \quad k \cdot \infty = -\infty \rightarrow$  ejemplo  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x = -\infty$

3)  $\forall k \in \mathbb{R}^+ (k > 0) \quad k \cdot (-\infty) = -\infty \rightarrow$  ejemplo  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x = -\infty$

4)  $\forall -k \in \mathbb{R}^- (-k < 0) \quad -k \cdot (-\infty) = \infty \rightarrow$  ejemplo  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x = +\infty$

**Cociente:**

1)  $\forall k \in \mathbb{R} \frac{k}{\pm \infty} = 0 \rightarrow$  ejemplo  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$

2)  $\forall k \in \mathbb{R}^+ \frac{\pm \infty}{k} = \pm \infty \rightarrow$  ejemplo  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{4} = -\infty$

3)  $\forall -k \in \mathbb{R}^- \frac{\pm \infty}{-k} = \mp \infty \rightarrow$  ejemplo  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{-4} = -\infty$

**Exponente:**

1)  $\forall k \in \mathbb{R} k > 1 k^{+\infty} = +\infty \rightarrow$  ejemplo  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty$

2)  $\forall k \in \mathbb{R} 0 < k < 1 k^{+\infty} = 0 \rightarrow$  ejemplo  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$

3)  $\forall k \in \mathbb{R} k > 1 k^{-\infty} = 0 \rightarrow$  ejemplo  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$

4)  $\forall k \in \mathbb{R} 0 < k < 1 k^{-\infty} = +\infty \rightarrow$  ejemplo  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = +\infty$

**Indeterminaciones:**

1)  $\infty - \infty, -\infty + \infty \rightarrow$  ejemplo  $\lim_{x \rightarrow \infty} x - x^2$

2)  $0 \cdot (\pm \infty) \rightarrow$  ejemplo  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-2} (x^2 + 3x)$

3)  $\frac{k}{0} \rightarrow$  ejemplo  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$

4)  $\frac{\pm \infty}{0} \rightarrow$  ejemplo  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$

5)  $\frac{\pm \infty}{\pm \infty} \rightarrow$  ejemplo  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{x}$

6)  $\frac{0}{0} \rightarrow$  ejemplo  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x}{x}$

7)  $1^\infty \rightarrow$  ejemplo:  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

### 4.2 Resolución de límites sin indeterminaciones.

En este apartado vamos a ver como se resuelven los límites en los que no hay indeterminaciones. Es sencillo sólo consiste en sustituir el valor de la x por el valor del límite y operar conforme a lo explicado en el apartado anterior (4.1). Veamos algunos ejemplos:

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^{x+1} = 2^{\infty+1} = 2^\infty = \infty$
2.  $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^2 - 100}{2x + 1} = \frac{0}{21} = 0$
3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3}{-2} = \frac{\infty - 3}{-2} = \frac{\infty}{-2} = -\infty$
4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{-2x+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\infty+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\infty} = 3^\infty = \infty$
5.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1)^{2x+1} = (1)^{\infty+1} = 1$  *nota: la indeterminación  $1^\infty$  es cuando tiende a 1, no cuando es 1.*
6.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2 + 3}\right)^{2x} = 1^\infty$  (ind)

### 4.3 Resolución indeterminaciones del tipo $\infty-\infty$

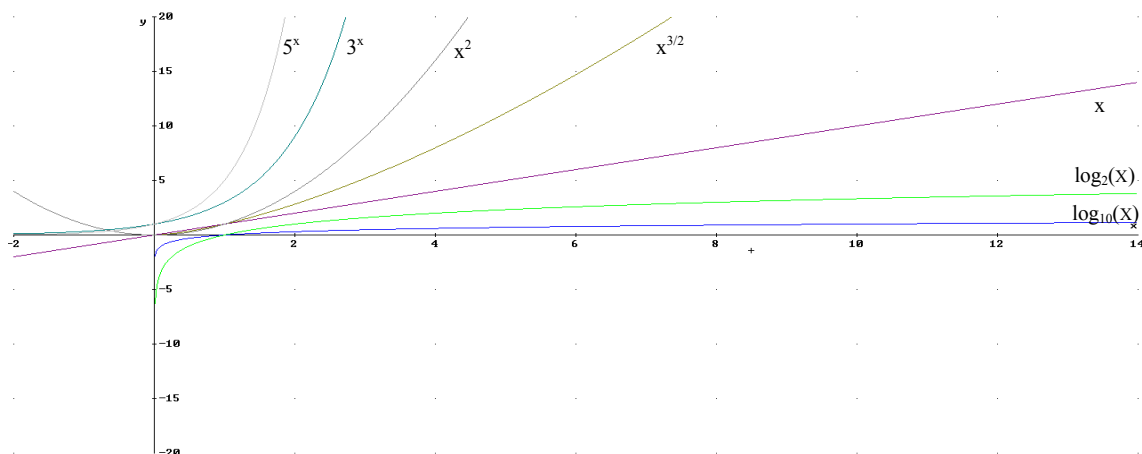
Las indeterminaciones de este tipo es cuando una o varias funciones tienden a  $+\infty$  y otra u otras a  $-\infty$ . Para resolver estas indeterminaciones no tenemos más que comparar el crecimiento de las funciones, de tal forma que prevalece aquella cuya tendencia a  $+\infty$  o  $-\infty$  se mayor al resto.

Orden de crecimiento a  $\infty$  (de menor a mayor):

$$\log_{a_1}(x) < \log_{a_2}(x) < x < x^{3/2} < x^2 < \dots < x^n < (b_2)^x < (b_1)^x$$

donde  $a_1 > a_2$  y  $b_1 > b_2$ . Tanto a como b mayores que 1

Todas estas funciones tienden a  $\infty$ , pero crece mucho más rápido las funciones exponenciales que las polinómicas, y estas que los logaritmos... Veámoslo:





Ejemplos:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - 2x^2 - \log_3(x) = \infty - \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - 2^x + \log_3(x) = \infty - \infty + \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} -2^x = -\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - 2^x + \log_3(x) = \infty - \infty + \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} -2^x = -\infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} x^{103} - 3^x + 2^x = \infty - \infty + \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} -3^x = -\infty$$

#### 4.4. Resolución de indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Las situaciones más simples en las que aparece es al calcular los límites infinitos de fracciones polinómica. Estas indeterminaciones se resuelven dividiendo el numerador y el denominador por la máxima potencia de x del denominador

**Ejemplos:**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 3x + 2}{x^3 + 3x - 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{5x^2 - 3x + 2}{x^3}}{\frac{x^3 + 3x - 5}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{5}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{1 + \frac{3}{x^2} - \frac{5}{x^3}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3 + 3x + 2}{-x^2 + 3x - 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-x^3 + 3x + 2}{x^2}}{\frac{-x^2 + 3x - 5}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{-1 + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2}} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2 + 3x + 2}{-2x^2 + 3x - 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-3x^2 + 3x + 2}{x^2}}{\frac{-2x^2 + 3x - 5}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{-2 + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2}} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

**Conclusión:**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0}$$

$$a) n > m \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0} = 0$$

$$b) m > n \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0} = \begin{cases} -\infty & \text{signo}(P(x)) \neq \text{signo}(Q(x)) \\ +\infty & \text{si } \text{signo}(P(x)) = \text{signo}(Q(x)) \end{cases}$$

$$c) m = n \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0} = \frac{a_n}{b_n}$$

**Ejercicio 5.** Calcular los siguientes límites de funciones.

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x^2 - 3}{-3x^3 - 3} = \frac{-\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{-3x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x^2 - 3}{x^2 - 3} = \frac{-\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 2x}{-3x^4 + 4x} = \frac{\infty}{-\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{-3x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{-3x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^4 - 3x + 5x^2} - 1}{5x^2 - 3x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^4 + 5x^2}}{5x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2} + 5)x^2}{5x^2} = \frac{(\sqrt{2} + 5)}{5}$$

(nota el grado dentro de una raíz se divide entre el índice de la raíz, así  $\sqrt{2x^4}$  tiene grado 2.

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3 - 3x + 2x - 3}}{15x^2 + 12x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3}}{15x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{3/2}}{15x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{15x^{1/2}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Estos no son los únicos tipos de límites en donde aparece la indeterminación  $\frac{\infty}{\infty}$ , veamos otros casos diferentes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} \dots + a_0}{k^x} = 0 \quad (k > 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k^x}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0} = +\infty \quad (k > 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} \dots + a_0}{\log_k x} = +\infty \quad (k > 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_k x}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0} = 0 \quad (k > 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0}{\log_k x} = \infty \quad (k > 1 \text{ y } b_n > 0)$$

#### 4.5. Resolución de indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$

Aparece este tipo de límites principalmente en 2 casos diferentes:

- 1) *Cociente de funciones polinómica:* Se resuelven descomponiendo factorialmente numerador y denominador (aplicando Ruffini con raíz la del límite, ya que es el valor donde se anulan los dos polinomios), simplificando los factores comunes.

*Ejemplos:*

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - 7x^2 + 14x - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x^2 - 5x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+3)}{(x^2 - 5x + 4)} = \frac{5}{-2}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^3 - 3x - 2} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 + 2x + 1)}{(x+1)(x^2 - x - 2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 + 2x + 1)}{x^2 - x - 2} = \frac{0}{0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)}{(x-2)} = \frac{0}{-3} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3x^2}{2x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(x-3)}{x(2x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-3)}{(2x-1)} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3x}{2x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2 - 3)}{x(2x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - 3)}{(2x - 1)} = \frac{-3}{-1} = 3$$

*nota: cuando el límite tiende a 0 en vez de Ruffini sacamos factor común, pues la raíz es cero, y por tanto el factor es  $(x-0)=x$ .*

- 2) *Cociente con funciones racionales:* Se resuelven multiplicando numerador y denominador por la expresión conjugada de la que lleva raíz, (cambiando el signo):

*Ejemplos:*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x+4} - 2} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - x)(\sqrt{x+4} + 2)}{(\sqrt{x+4} - 2)(\sqrt{x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - x)(\sqrt{x+4} + 2)}{x + 4 - 4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - x)(\sqrt{x+4} + 2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1)(\sqrt{x+4} + 2)}{1} = -4 \end{aligned}$$

#### 4.6. Resolución de indeterminaciones del tipo $\frac{k}{0}$

Este límite puede ser  $+\infty$ ,  $-\infty$  o no existir por ser los límites laterales diferentes. Se calcula a partir de los límites laterales (son siempre asíntotas verticales):

*Ejemplo:*

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 1}{x - 3} = \frac{k}{0} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 1}{x - 3} = \frac{k}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 1}{x - 3} = \frac{k}{0^-} = -\infty \end{cases} \text{ no existe el límite}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 1}{(x - 3)^2} = \frac{k}{0} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 1}{(x - 3)^2} = \frac{k}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 1}{(x - 3)^2} = \frac{k}{0^+} = +\infty \end{cases} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 1}{(x - 3)^2} = +\infty$$

#### 4.7. Resolución de indeterminaciones del tipo $0 \cdot \infty$

Se resuelven transformándolas en indeterminaciones del tipo  $\frac{0}{0}$  o  $\frac{\infty}{\infty}$ .

*Ejemplo:*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{\sqrt{x^4 - 2}} \cdot (2x - 3) = 0 \cdot \infty = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3(2x - 3)}{\sqrt{x^4 - 2}} = \frac{-\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x}{\sqrt{x^4}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{x} = 0$$

#### 4.8. Resolución de indeterminaciones del tipo $\infty - \infty$

Las indeterminaciones de este tipo ya las vimos en el apartado 4.2. En este apartado vimos que el límite era  $\infty$  o  $-\infty$ , dependiendo qué función tendía más rápido a  $\infty$ . En el apartado no consideramos cuando eran funciones con crecimiento semejante; esto ocurre cuando tenemos una raíz con un polinomio de grado  $n$  y un polinomio restando de grado la mitad ( $n/2$ ). Si esto ocurre lo que se hace es multiplicar numerador y denominador por la expresión conjugada, eliminando así la indeterminación del tipo  $\infty - \infty$  y quedando expresión del tipo  $\infty/\infty$ .

*Ejemplo:*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 5x} - (x + 3) &= \infty - \infty \text{ (mismo grado)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 5x} - (x + 3))(\sqrt{x^2 + 5x} + (x + 3))}{\sqrt{x^2 + 5x} + (x + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5x - (x^2 + 6x + 9)}{\sqrt{x^2 + 5x} + (x + 3)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x - 9}{\sqrt{x^2 + 5x} + (x + 3)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1 - \frac{9}{x}}{\sqrt{1 + \frac{5}{x}} + 1 + \frac{3}{x}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

#### 4.9. Resolución de indeterminaciones del tipo $1^\infty$

Estas indeterminaciones están relacionadas con el número e. El valor decimal del número e es:  $e=2,718281\dots$  es un número irracional que debe su nombre al matemático suizo Euler.

Este número es el límite de la siguiente expresión:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ . Demos valores:

$$x=1 \rightarrow 2$$

$$x=10 \rightarrow 2,59$$

$$x=1000 \rightarrow 2,7169\dots$$

$$x=10^6 \rightarrow 2,718280\dots$$

En la práctica todo límite de la forma  $\lim_{x \rightarrow x_0} (1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e$  cuando  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ . La forma de resolver esta indeterminación será buscar esta expresión:

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 3x}{x^2 + 4} \right)^{x^2} &= 1^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{x^2 - 3x}{x^2 + 4} - 1 \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{-3x - 4}{x^2 + 4} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \underbrace{\left( 1 + \frac{-3x - 4}{x^2 + 4} \right)^{\frac{x^2 + 4}{-3x - 4}}}_e \right)^{\frac{-3x - 4}{x^2 + 4} x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x^2 \cdot \frac{-3x - 4}{x^2 + 4}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot \frac{-3x - 4}{x^2 + 4}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^3 - 4x^2}{x^2 + 4}} = e^{-\infty} = 0 \end{aligned}$$

**Ejercicio 6.** Calcular los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{4x + 2}{5x} \right)^{\frac{1}{x-2}}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{4x + 2}{5x} \right)^{\frac{1}{x-2}} &= 1^\infty = \lim_{x \rightarrow 2} \left( 1 + \frac{4x + 2}{5x} - 1 \right)^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \left( 1 + \frac{2-x}{5x} \right)^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \left( \underbrace{\left( 1 + \frac{2-x}{5x} \right)^{\frac{5x}{2-x}}}_e \right)^{\frac{2-x}{5x} \cdot \frac{1}{x-2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} e^{\frac{2-x}{5x} \cdot \frac{1}{x-2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{25x}} = e^{-\frac{1}{10}} = \frac{1}{\sqrt[10]{e}} \end{aligned}$$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x^3 + 2x^2)^{\frac{1}{x^4}}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x + 2x^2)^{\frac{1}{x^4}} = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + (-x + 2x^2))^{\frac{1}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \left( \underbrace{(1 + (-x + 2x^2))^{\frac{1}{-x + 2x^2}}}_e \right)^{-x + 2x^2} \right)^{\frac{1}{x^4}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{-x + 2x^2}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{-1 + 2x}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{-1}{0}} = ind \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{-1 + 2x}{x^3}} = e^{0^+} = e^{-\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{-1 + 2x}{x^3}} = e^{0^-} = e^{\infty} = \infty \end{cases} \text{ no existe el limite}$$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (-x^3)^{\frac{2x+3}{x-1}}$

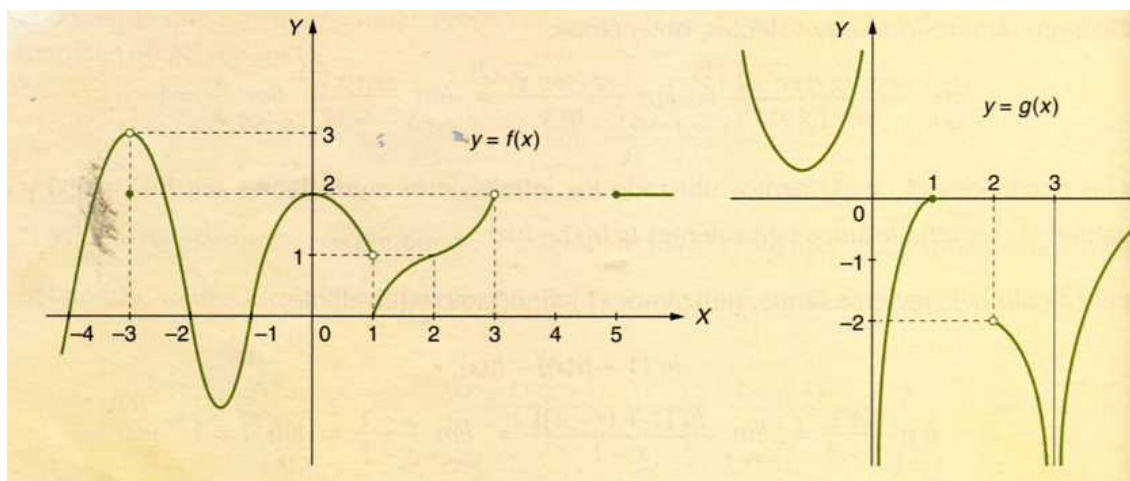
$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-x^3)^{\frac{2x+3}{x-1}} = (-\infty)^2 = \infty$$

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x)^{\frac{-2x^2+3}{x-1}}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x)^{\frac{-2x^2+3}{x-1}} = \infty^{-\infty} = \frac{1}{\infty^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

### Ejercicios

**Ejercicio 7.** Calcula, en las siguientes funciones representadas, las siguientes cuestiones:



a)  $f(-3)=2, f(-2)=0, f(0)=2, f(4) \notin \text{Dom}(f(x))$

b)  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 3, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \text{no existe}, \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \text{no existe}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \text{no existe}, \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0$$

c)  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = -2$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = +\infty$ ,  
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \text{no existe}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \text{no existe}$

**Ejercicio 8:** Calcular el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 2} e^{\frac{1}{x-2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2}} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = e^{-\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = e^{\infty} = \infty \end{cases} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} e^{\frac{1}{x-2}} = \text{no existe}$$

**Ejercicio 9:** Calcula cuánto debe valer “a” para que la siguiente función, f(x), sea convergente en x=1:  $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3-ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 - a$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$ . El límite  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  existe siempre que  $a=1$ .

**Ejercicio 10:** Siendo  $f(x) = \sqrt{2x + 3}$  calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x + 3} - 3}{x - 3} = \frac{\sqrt{11} - 3}{1} = \sqrt{11} - 3$$

**Ejercicio 11:** Calcular los siguientes límites

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-4} = 0$ , b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^4 = \infty$ , c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^3} = \frac{3}{0} \text{ (ind)}$   $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{x^3} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{x^3} = -\infty \end{cases} \text{ no existe}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{-2}}{5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{5x^2} = \frac{1}{0} \text{ (ind)}$   $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{5x^2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{5x^2} = +\infty \end{cases} = \infty$  e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5}{3} = 0$ , f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^5} = 0$

g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{2}{x^2 + 1} + \frac{3}{x + 2} \right] = 0 + 0 = 0$ , h)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^{-x} = 3^{-\infty} = 0$  i)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{-x} = 3^{\infty} = \infty$

j)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{3} \right)^x = \left( \frac{2}{3} \right)^{\infty} = 0$  k)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 2}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3}{x}}{\frac{\sqrt{x^2 - 2}}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{1 - \frac{2}{x^2}}} = \frac{\infty}{1} = \infty$

l)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - 3x - 1}{x^3 + 3} = -\infty$  m)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = 0$  n)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x + 6}{x^2 + 3x + 2} = -\infty$

$$\text{o) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{2}{3} \quad \text{p) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 6}{x^3 + 3x^2 + 2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-3)}{x(x+1)(x+2)} = \frac{-5}{2}$$

$$\text{q) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 4} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-2)(x-2)} = \frac{-1}{0} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{x-2} = \frac{-1}{0^-} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-3}{x-2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \end{cases} \text{ no existe}$$

$$\text{r) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)} = 2$$

$$\text{s) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 - \sqrt{4-x})(2 + \sqrt{4-x})}{x(2 + \sqrt{4-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - 4 + x}{x(2 + \sqrt{4-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 + \sqrt{4-x}} = \frac{1}{4}$$

$$\text{t) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{1+x - (1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{2} = 1$$

$$\text{u) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 6x - 9}{x-3} = \frac{18}{0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 + 6x - 9}{x-3} = \frac{18}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + 6x - 9}{x-3} = \frac{18}{0^-} = -\infty \end{cases} \text{ no existe}$$

$$\text{v) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 6x - 3}{2x^2 - 5x} = \frac{-3}{0} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 + 6x - 3}{2x^2 - 5x} = \frac{-3}{(0^+)^2 - 0^+} = \frac{-3}{(0^+)^2 + 0^-} = \frac{-3}{0^-} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2 + 6x - 3}{2x^2 - 5x} = \frac{-3}{0^+} = -\infty \end{cases} \text{ no existe}$$

$$\text{w) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2 - (x-2)}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2})} = \frac{4}{\infty} = 0$$

$$\text{x) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x+1}{5x-1} \right)^{3x+2} = 1^\infty = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (3x+2) \left( \frac{5x+1}{5x-1} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{6x+4}{5x-1} \right)} = e^{\frac{6}{5}}$$

$$\text{y) } \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{3}{x-1}} = 1^\infty = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{3}{x-1} \right) \left( \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{3}{x-1} \right) \left( \frac{x^2(x-1)}{x^2 + 1} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2}{x^2 + 1}} = e^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{z) } \lim_{x \rightarrow 2} (x-1)^{\frac{3}{x-2}} = 1^\infty = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x-2} (x-2)} = e^3 \quad \text{aa) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}} = 1$$



$$\text{ab) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 - 5} - (2x - 3)) = \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 5 - (4x^2 - 12x + 9)}{(\sqrt{4x^2 - 5} + (2x - 3))} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x - 14}{(\sqrt{4x^2 - 5} + (2x - 3))} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12 - \frac{14}{x}}{\sqrt{4 - \frac{5}{x^2}} + (2 - \frac{3}{x})} = \frac{12}{4} = 3$$

$$\text{ac) } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{2x - 4}}{x - 2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{2}\sqrt{x - 2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x - 2}} = \frac{\sqrt{2}}{0^+} = +\infty$$

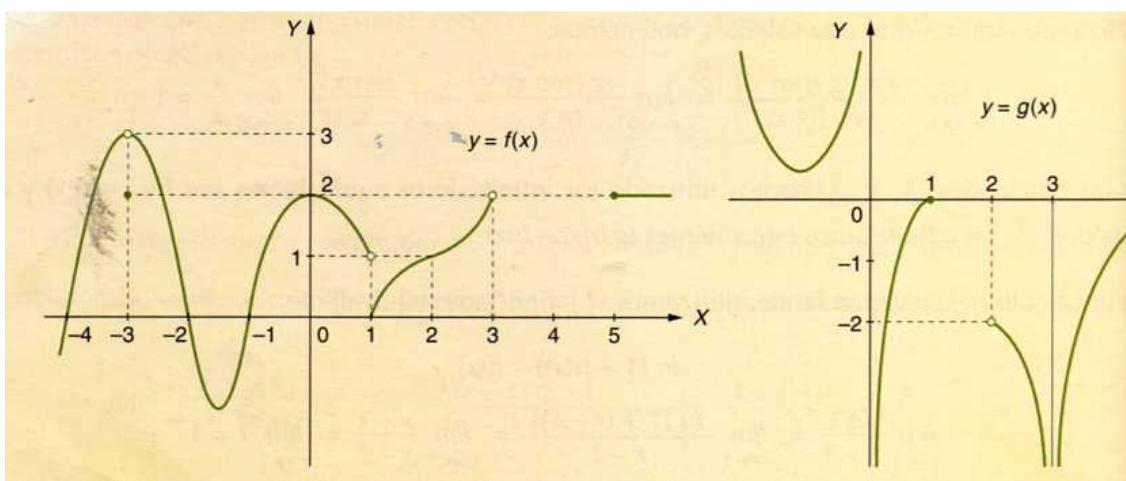
## 5. Definición de continuidad

Veamos la definición de la continuidad:

**Definición:** Una función  $f(x)$  es continua en un punto  $x_0$  si en dicho punto se cumplen las siguientes tres condiciones:

1. Existe  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  y no vale  $+\infty$  ni  $-\infty$  (es decir es convergente en  $x_0$ )
2. La función definida en  $x_0$ , es decir  $x_0 \in \text{Dom}(f(x))$
3. Los dos valores anteriores coinciden:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

**Ejemplo:**



$$1) \text{Dom}(f(x)) = (-\infty, 3) \cup [5, \infty)$$

Continua en todos los puntos del dominio menos en

- a)  $x=-3 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 3 \neq f(3) = 2$
- b)  $x=1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  no existe pues los límites laterales son distintos
- c)  $x=5 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 5} f(x)$  no existe pues no existe el límite por la izquierda

$$2) \text{Dom}(g(x)) = (-\infty, 0) \cup (0, 1] \cup (2, 3) \cup (3, \infty)$$

Continua en todos los puntos del dominio menos en

- a)  $x=0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  no existe pues los límites laterales son distintos
- b)  $x=1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$  no existe pues no existe el límite por la derecha
- c)  $x=2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$  no existe pues no existe el límite por la izquierda
- d)  $x=3 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -\infty$  pero  $3 \notin \text{Dom}(g(x))$

**Definición:** Una función  $f(x)$  es continua en un intervalo  $(a,b)$  si en todos los puntos del intervalo es continua. Esto ocurre cuando al dibujar la gráfica “no levantamos el boli de la hoja para dibujarla”

En el ejemplo anterior  $f(x)$  continua en  $(-\infty,-3)$ ,  $(-3,1)$ ,  $(1,3)$  y  $(5,\infty)$ . La función  $g(x)$  en  $(-\infty,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(2,3)$  y  $(3,\infty)$ .

**Ejercicio 12.** Calcular la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 - 1} & \text{si } x \leq 0 \\ 2x + 3 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 4x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Pasos:

1) Estudiar la continuidad de los “trozos” en sus dominios de definición:

- $\frac{1}{x^2-1}$  es continua en  $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ , ya que el denominador se hace cero y el límite en  $x=1$  y  $x=-1$  vale  $\infty$  (asíntota vertical). Pero de los dos valores sólo  $x=-1$  pertenece al dominio de definición,  $x \leq 0$ .
- $2x+3$  y  $4x+1$  son rectas y por tanto continuas en todos los reales.

Luego por ahora la función no continua en  $x=-1$

2) Estudiar la continuidad en los puntos donde la función cambia de expresión analítica, en nuestro ejemplo  $x=0$  y  $x=1$ .

En  $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2 - 1} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x + 3 = 3 \end{cases} \text{ no existe el limite}$$

Luego la función no continua en  $x=0$  tampoco.

En  $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x + 3 = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 4x + 1 = 5 \end{cases} = 5$$

Aunque el límite existe la función no continua pues  $1 \notin \text{Dom}(f(x))$ . Ya que para  $x=1$  la función no definida

Luego la función no continua en  $x=1$  tampoco

La función tiene tres puntos de discontinuidad en  $x=-1$ ,  $x=0$ ,  $x=1$ .

## 6. Tipos de discontinuidades

**Definición:** Una función  $f(x)$  es discontinua en un punto  $x_0$  si no es continua en dicho punto.

Existen dos tipos de discontinuidades:

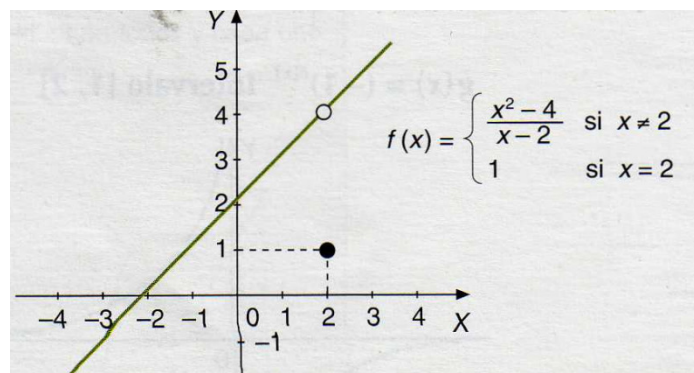
- a) Discontinuidad evitable
- b) Discontinuidad no evitable

**Discontinuidad evitable:** Una función  $f(x)$  presenta una discontinuidad evitable en el punto  $x_0$  si cumple las siguientes condiciones:

1. La función convergente, es decir el límite de la función en  $x_0$  existe, y es un numero  $\rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$
2. Una de las dos siguientes condiciones:
  - a. o el límite no coincide con  $f(x_0)$
  - b. o bien la función no está definida en  $x_0$  (es decir  $x_0 \notin \text{Dom}(f(x))$ )

Ejemplos:

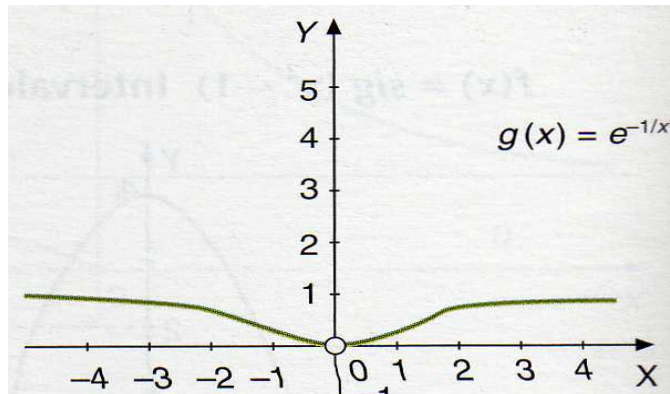
1)



$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 \neq f(2) = 1$ . Esta discontinuidad se evita redefiniendo la función en  $x=2$ , haciendo que en este punto la función tome el mismo valor que el límite es decir  $f(2)=4$

Así la función  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$  si es continua pues  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 = f(2)$

2)



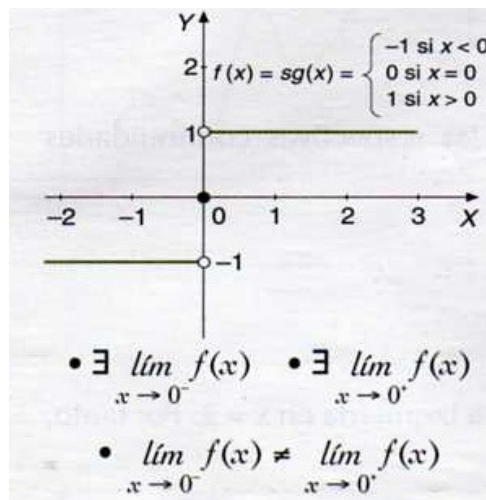
$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$  pero  $0 \notin \text{Dom}(g(x))$ . Esta discontinuidad se evitaría si redefinimos la

función tal que en  $x=0$  esta valga lo mismo que el límite:  $g(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

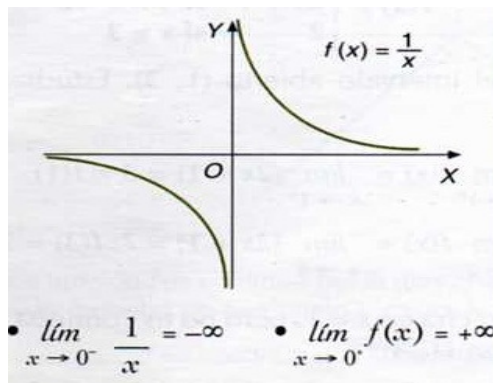
**Discontinuidad no evitable:** Es aquella en la que el límite en el punto o no existe o es infinito. Pueden ser a su vez de 2 tipos:

1) *Salto finito en  $x_0$ :* los límites laterales no coinciden pero son números reales

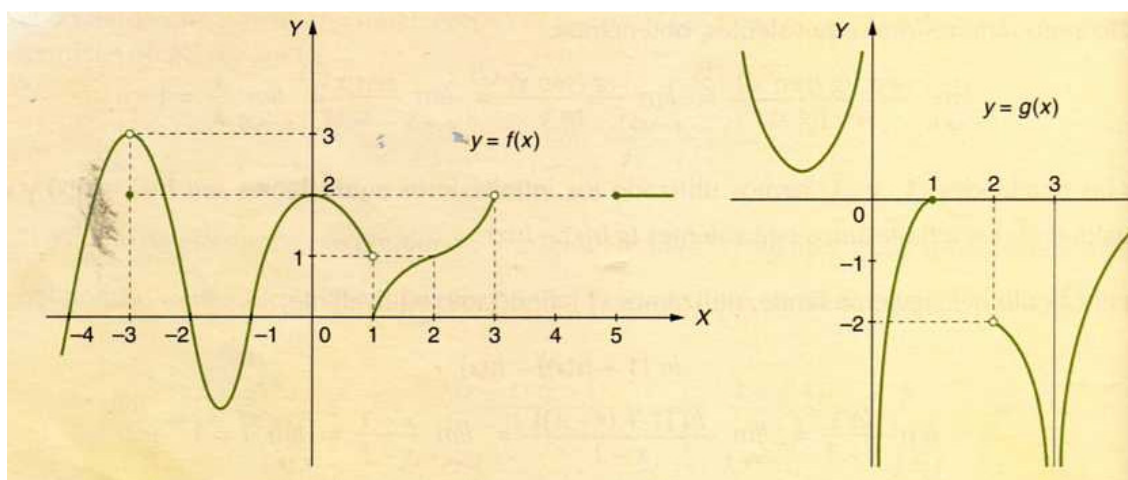
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$



2) *Salto infinito en  $x_0$ :* cuando los dos límites laterales en  $x_0$  o al menos uno de ellos es  $+\infty$  o  $-\infty$ .



**Ejercicio 13.** Decir de las siguientes funciones los tipos de discontinuidades de las siguientes funciones



$f(x)$ :  $x=-3$  evitable,  $x=1$  no evitable de salto finito. Entre  $[3,5)$  la función no definida  
 $g(x)$ :  $x=0$  y  $x=3$  no evitable de salto infinito. Entre  $(1,2]$  función no definida.

**Ejercicio 14.** Decir que tipo de discontinuidad hay en la función del ejercicio 12

La función tiene tres puntos de discontinuidad en  $x=-1$ ,  $x=0$ ,  $x=1$ .

- En  $x=-1$  no evitable de salto infinito
- En  $x=0$  no evitable de salto finito
- En  $x=1$  evitable

## 7. Continuidad de las funciones elementales. Operaciones con funciones continuas

Las funciones elementales, por lo general, son continuas en todos los puntos del dominio. Las discontinuidades más importantes aparecen en funciones definidas a trozos (discontinuidades evitables o de salto finito), y en funciones con denominador en el valor donde se anula éste (discontinuidad de salto infinito).

**Operaciones de funciones continuas:** Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  funciones continuas en  $x_0$

- 1) Las funciones suma y resta  $(f \pm g)(x)$  son continua en  $x_0$
- 2) La función producto  $(f \cdot g)(x)$  es continua en  $x_0$
- 3) La función división  $(f/g)(x)$  es continua en  $x_0$  si  $g(x_0) \neq 0$
- 4) Si  $g(x)$  es continua en  $x_0$  y  $f(x)$  es continua en  $g(x_0)$  entonces la función compuesta  $(f \circ g)(x)$  es continua en  $x_0$ .

## Ejercicios

**Ejercicio 15:** Estudia la continuidad de las siguientes funciones

$$\mathbf{a)} \quad f(x) = \begin{cases} 5 - \frac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 5 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

El valor absoluto puede dividirse en dos partes: cuando lo que está dentro del valor es negativo este cambia de signo, y si es positivo no se cambia.

$$f(x) = \begin{cases} 5 - \frac{-x}{x} & \text{si } x < 0 \\ 5 & \text{si } x = 0 \\ 5 - \frac{x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 6 & \text{si } x < 0 \\ 5 & \text{si } x = 0 \\ 4 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 6 \end{cases} \text{ no existe, discontinuidad de salto finito}$$

$f(x)$  es por tanto continua en  $\mathbb{R} - \{0\}$

$$\mathbf{b)} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Es una función definida a trozos, donde cada uno de ellos es un polinomio, que son continuos en  $\mathbb{R}$ ; De esta forma en el único punto que tenemos que estudiar la continuidad es en  $x=2$ , donde  $f(x)$  cambia de expresión analítica:

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} x + 1 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - 1 = 3 \end{cases} = 3 = f(2).$$

Luego  $g(x)$  continua en  $\mathbb{R}$ .

$$\mathbf{c)} \quad h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

Es una función definida a trozos, uno de ellos es una fracción algebraica, así que en los puntos donde se anule el denominador puede no ser continua. Como coincide el punto donde se anula el denominador con el cambio de expresión analítica ( $x=3$ ) sólo hay que estudiar la continuidad en este punto.

$$\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6 = f(3) = 6$$

La función  $h(x)$  es continua en  $\mathbb{R}$

$$d) l(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x > -1 \\ 3 & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

Es una función definida a trozos, en cada uno de ellos la función es un polinomio, así que el único punto donde hay que estudiar la continuidad es en  $x=-1$ , allí donde cambia de expresión analítica:

$$\lim_{x \rightarrow -1} l(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} l(x) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} l(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} 2x-1 = -3 \end{cases} \rightarrow \text{No existe, luego no es continua en } x=-1, \text{ de}$$

salto finito.

De esta forma  $l(x)$  continua en  $\mathbb{R}-\{-1\}$ .

**Ejercicio 16:** Calcula el valor de  $k$  para que las siguientes funciones sean continuas en todo  $\mathbb{R}$

$$a) g(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ k & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Es una función definida a trozos, en uno de ellos la función es una fracción algebraica que puede no ser continua en los puntos donde se anula el denominador ( $x=2$ ). Como este punto coincide con el punto donde la función cambia de expresión analítica, es el único punto donde tenemos que estudiar la continuidad de  $g(x)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-2} = \frac{4}{0} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2}{x-2} = \frac{4}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{x-2} = \frac{4}{0^+} = \infty \end{cases} \text{ el límite no existe, así que}$$

indiferentemente del valor de  $k$  la función  $g(x)$  no es continua en  $x=2$

$$b) k(x) = \begin{cases} 1+|x| & \text{si } x < 0 \\ k & \text{si } x = 0 \\ \frac{3}{2}x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Como  $|x|$  está definido para valores negativos ( $x < 0$ ), es equivalente a sustituir  $|x|$  por  $-x$ :

$$k(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x < 0 \\ k & \text{si } x = 0 \\ \frac{3}{2}x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Es una función definida a trozos; en cada uno de ellos las funciones son polinomios, y estos son continuos en  $\mathbb{R}$ . Luego el único punto donde puede presentar discontinuidad es en  $x=0$ , allí donde la función cambia de expresión analítica.



$$\lim_{x \rightarrow 0} k(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 + |x| = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{2}x + 1 = 1 \end{cases} = 1$$

Para que sea continua ha de cumplir que  $k(0) = \lim_{x \rightarrow 0} k(x)$ . Por tanto  $k(x)$  será continua si  $k(0) = k = 1 \rightarrow k = 1$

$$\text{c) } m(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2}{x - 2} & \text{si } x > 3 \\ \frac{x + 3}{x - 4} + k & \text{si } x \leq 3 \end{cases}$$

Es una función definida a trozos, en cada uno de ellos las funciones son fracciones algebraicas, que no son continuas en los puntos donde se anulan el denominador. En la primera de ellas ocurre en  $x=2$ , pero como esa expresión analítica sólo existe para  $x > 3$ , nunca tomará ese valor. La segunda se anula para  $x=4$ , pero como la expresión definida para  $x \leq 3$  nunca tomará ese valor. Así que sólo hay que estudiar la continuidad en  $x=3$ , donde la función cambia de expresión analítica:

$$\lim_{x \rightarrow 3} m(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x + 3}{x - 4} + k = -6 + k \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 + 2}{x - 2} = \frac{11}{1} = 11 \end{cases} \quad \text{El límite existe si } k=17. \text{ Además si } k=17 \text{ } m(3)=11$$

y por tanto continua en 3 y en todo  $\mathbb{R}$ .

**Ejercicio 17:** Hallar el dominio y la continuidad de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = |x^2 - 6x + 5|$

El dominio de la función  $f(x) = |x^2 - 6x + 5|$  y su continuidad es todo  $\mathbb{R}$ , ya que el valor absoluto de  $f(x)$  es continuo en los mismos puntos en los que sea continua la función  $x^2 - 6x + 5$ , que es un polinomio.

b)  $g(x) = \sqrt{4+x} + \sqrt{4-x} - 2\sqrt{2}$ .

El dominio de una raíz cuadrada son todos los puntos donde el radicando es positivo o cero. Como  $g(x)$  está definida a partir de suma de tres funciones, el dominio será la intersección de los tres dominios. Veamos uno a uno por separado:

$$\sqrt{4+x} \quad \text{Dom} = [-4, \infty)$$

$$\sqrt{4-x} \quad \text{Dom} = (-\infty, 4]$$

$$2\sqrt{2} \quad \text{Dom} = \mathbb{R}$$

$$\text{Dom}(g(x)) = [-4, \infty) \cap (-\infty, 4] \cap \mathbb{R} = [-4, 4]$$

En los puntos del dominio la función es continua, pues el límite de la función coincide con el valor en el punto.

**Ejercicio 18:** Determinar los parámetros a y b para que la siguiente función sea continua en todo R

$$f(x) = \begin{cases} xe^{x^2} & \text{si } x \leq 0 \\ ax + b & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 + x \ln(x) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Es una función definida a trozos, y en cada trozo la función es continua en su dominio de definición, ya que el único que no es continua en todo R es  $1 + x \ln(x)$ , pero como está definida para  $x \geq 1$  en este intervalo es continua.

Tendremos que ver la continuidad en  $x=0$  y  $x=1$  para asegurar que la función  $f(x)$  continua en todo R.

· Continuidad en  $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} xe^{x^2} = 0 \cdot 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ax + b = b \end{cases} \quad \text{El límite existe si } b=0, \text{ además para este}$$

valor de b  $f(0)=0$  y por tanto la función será continua

· Continuidad en  $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 + x \ln(x)) = 1 + 1 \cdot 0 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} ax = a \end{cases} \quad \text{El límite existe si } a=1, \text{ además}$$

para este valor  $f(1)=1$  y por tanto la función será continua

Si  $a=1$  y  $b=0$  la función será continua en R

**Ejercicio 19:** Hallar y clasificar las discontinuidades de las siguientes funciones

a)  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$

Será continua en R menos en los puntos donde se anula el denominador es decir  $x=0$  y  $x=2$ , por tanto  $0, 2 \notin \text{Dom}(f(x))$ . Veamos el límite en estos puntos para discernir el tipo de discontinuidad.

· En  $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} = \frac{-4}{0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} = \frac{-4}{-2 \cdot 0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} = \frac{-4}{-2 \cdot 0^-} = -\infty \end{cases} \rightarrow \text{salto infinito en } x = 0$$

· En  $x=2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)} = \frac{4}{2} = 2 \rightarrow \text{evitable}$$

$$\text{b) } g(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Tanto  $2-x$  como  $e^{-x}$  son continuas para todo  $\mathbb{R}$ , luego la única posible discontinuidad puede ocurrir en  $x=0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2-x = 2 \end{cases} \quad \text{Discontinuidad de salto finito.}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x = 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} = 1 \neq f(0) = 2 \rightarrow \text{Evitable}$$

## 8. Asíntotas.

Una función  $f(x)$  puede tener tres tipos de asíntotas:

- Asíntota verticales
- Asíntota horizontal
- Asíntota oblicua

**Las asíntotas verticales:** ocurren cuando la función se acerca a un punto  $x_0$  tiende a  $\infty$ ,  $-\infty$  o un límite lateral a  $\infty$  y el otro a  $-\infty$ . En la práctica esto ocurre en los valores de  $x$  que anulan el denominador. Estos valores no pertenecen al dominio. Para ver como la función se acerca a la asíntota se estudian los límites laterales de  $f(x)$  cuando tiende a  $x=x_0$  (valor que anula el denominador). Son límites indeterminados de la forma  $K/0$ .

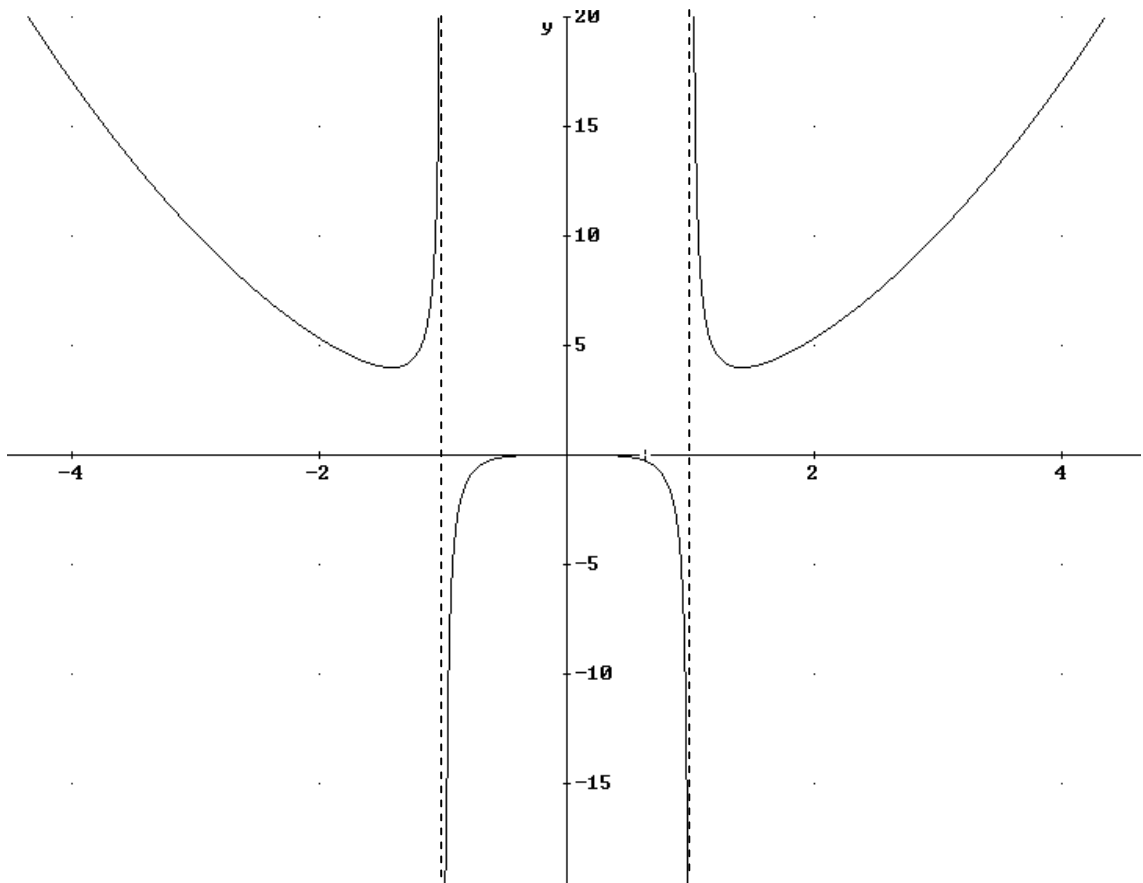
Ejemplos:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^4}{x^2-1} \rightarrow \text{AV: Igualamos el denominador a } 0 \rightarrow x^2-1=0 \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array} \right\}$$

Veamos el comportamiento de  $f(x)$  en las dos asíntotas verticales:

$$x=1 \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^4}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{2 \cdot 0^+} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^4}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{2 \cdot 0^-} = -\infty \end{cases}$$

$$x=-1 \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{1}{0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^4}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{0^+(-2)} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^4}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{0^-(-2)} = \infty \end{cases}$$

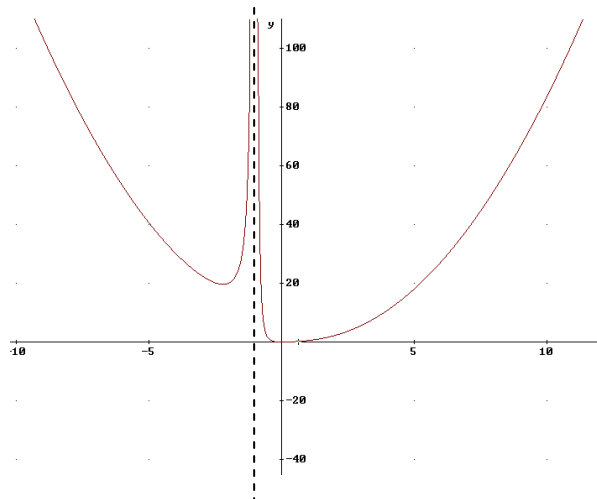


a)  $f(x) = \frac{x^4 + x^2}{x^2 + 2x + 1} \rightarrow$  AV: Igualamos el denominador a 0  $\rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \rightarrow$

$x = -1$  (doble)

Veamos el comportamiento de  $f(x)$  en la asíntota vertical:

$$x = -1 \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{2}{0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^4 + x^2}{(x+1)^2} = \frac{2}{(0^+)^2} = \frac{2}{0^+} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^4 + x^2}{(x+1)^2} = \frac{2}{(0^-)^2} = \frac{2}{0^+} = \infty \end{cases}$$



**Las asíntotas horizontales:** la función tiene una asíntota horizontal  $y=L$ , cuando  $x$  se hace infinitamente grande ( $x \rightarrow \infty$ ) o infinitamente pequeño ( $x \rightarrow -\infty$ ), la grafica se acerca a la recta paralela al eje OX  $y=L$

Una función  $f(x)$  tiene una asíntota horizontal en  $y=L$  si se cumple una de las siguientes condiciones (o las 2):

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$