Tema 9. Combinatoria

1. Definición de combinatoria

2. Estrategias de resolución

2.1. Estrategia del producto y la suma

2.2. Diagrama de árbol

3. Variaciones y permutaciones

3.1. Variaciones simples u ordinarias

3.2. Permutaciones

3.3. Variaciones con repetición

4. Combinaciones

5. Factorial y números combinatorios. Propiedades

6. El Binomio de Newton

1. Definición de combinatoria

La combinatoria es la ciencia que estudia el **número de soluciones** que tiene un problema dado.

Ejemplos:

1. Número de posibles quinielas distintas
2. Número de bonolotos posibles
3. Número de partidos de futbol en la liga

(…)

2. Estrategias de resolución

En este apartado vamos a ver tres estrategias que nos van a permitir obtener el número de soluciones a un problema dado.

2.1. Estrategia del producto y la suma

Estrategia del producto: si un problema dado podemos plantearlo con diferentes niveles independientes entre sí, el primero con n_1 posibilidades, el segundo con n_2,…El número de diferentes soluciones al problema planteado es igual al producto de las posibilidades en cada nivel.

Nº soluciones=$N=n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots$

Ejemplo: vamos a cenar y tenemos 6 primeros y 3 segundos para elegir ¿cuántos menús diferentes se pueden confeccionar?

A_1={primeros platos}→ $n_1=6$

A_2={segundos platos}→$n_2=3$

Son independientes, ya que podemos elegir cualquier segundo indistintamente del primero elegido.

Nº soluciones=$n_1 \cdot n_2=6 \cdot 3=18$

Segundo \ primero	1	2	3	4	5	6
A	1A	2A	3A	4A	5A	6A
B	1B	2B	3B	4B	5B	5B
C	1C	2C	3C	4C	5C	6C

Ejercicio*:* Calcular el número de matrículas con 4 dígitos y 3 letras que hay.

Distinguimos 4 niveles independientes entre si:

A_1={1ª letra} → $n_1=27$

A_2={2ª letra} → $n_2=27$

A_3={3ª letra} → $n_3=27$

A_4={número de 4 dígitos} → $n_4=10000$

Luego en total hay $N=n_1\cdot n_3 \cdot n_3 \cdot n_4=27^3 \cdot 10000$=196.830.000 matrículas diferentes

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejercicio: Juan tiene 4 pantalones, 5 camisetas y 3 zapatos. ¿De cuantas formas diferentes puede vestir?

Tres prendas puede elegir, y son independientes puede ponerse cualquier zapato con cualquier pantalón y camiseta.

A_1={zapatos}→ $n_1=3$

A_2={camiseta}→ $n_2=5$

A_3={pantalones}→ $n_3=4$

Número de formas diferentes de vestir $=N=n_1\cdot n_2\cdot n_3=60$

Estrategia de la suma: cuando queremos ver el número de soluciones a un problema en donde tenemos varias formas de obtener la solución, tal que estas formas no tienen elementos en común entonces el número de soluciones totales es igual a la suma de las soluciones de cada una de las formas.

Ejemplo: ver el número de posibles alumnos que han sacado más de un 6 en mate

A_1={alumnos con 7}→ $n_1=0$

A_2={alumnos con 8}→ $n_2=3$

A_3={alumnos con 9}→ $n_3=1$

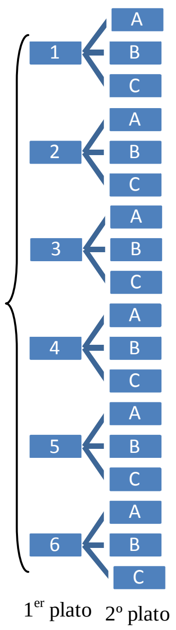
Son soluciones que no tienen elementos en común, nadie saca un 7 y un 8…

$N=n_1+ n_2+ n_3=0+3+1=4$

2.2. Método del diagrama de árbol

Se utiliza en problemas con diferentes niveles (estrategia del producto) y con diferentes formas de alcanzar la solución (estrategia de la suma). Cada nivel nuevo será una rama del anterior. Todas las soluciones se distribuyen en estructura de árbol con su tronco y sus ramas, hasta la solución final que son las hojas del árbol.

Veamos los ejemplos anteriores en forma de diagrama de árbol



 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejercicio: Tenemos una bolsa con 5 bolas de diferentes colores. De cuantas formas podemos extraer 3 bolas.

a) Con reemplazamiento

b) Sin reemplazamiento

a) Tres niveles independientes, pues al introducir la bola sacada la siguiente no depende del color de la sacada con anterioridad:

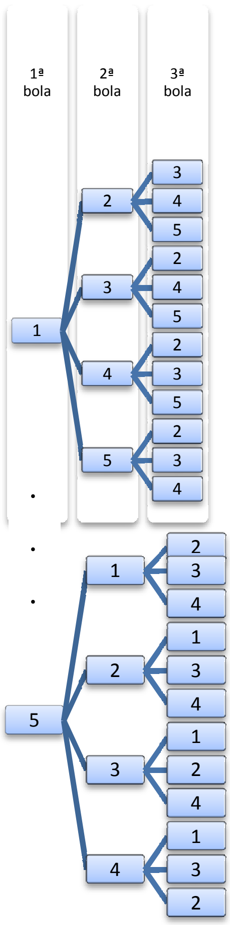
1ª bola → $n_1=5$

2ª bola → $n_2=5$

3ª bola → $n_3=5$

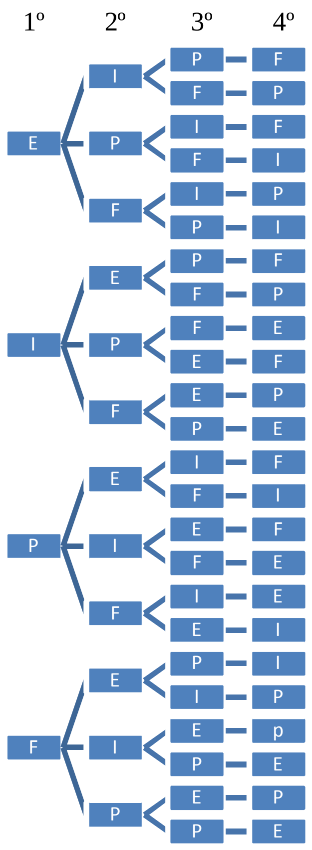
$N= n_1 \cdot n_2 \cdot n_3=5^3=125$ soluciones

b) Ahora la bola sacada en 2ª posición si depende de la sacada en la 1ª… por ejemplo si esta la primera es roja, no puede ocurrir que la segunda vuelva a ser roja. Podemos ver el número de soluciones por diagrama de árbol



$N=n_1 \cdot n_2 \cdot n_3=5 \cdot 4 \cdot 3=60$

En la Eurocopa del 2008 los equipos clasificados en semifinales son España, Francia, Italia, Portugal. Estudiar las posibles clasificaciones por diagrama de árbol.



N=24 posibilidades

Ejercicios

· 3 pag 221. Tres nietos Alberto, Beatriz y Claudia van a ver a sus abuelos y este les dice “Escoged cada uno el libro que queráis de estos 10”. ¿Cuántas formas distintas pueden hacer la elección?

Supongamos que elige

· 1º Alberto: 10 posibilidades

· 2ª Beatriz: 9 posibilidades

· 3ª Claudia: 8 posibilidades

Podemos hacer el diagrama de árbol y tendremos 3 niveles con 10, 9 y 8 posibilidades.

N=10·9·8=720 soluciones

· **4 pag 222.** Luis, Carlos, Gonzalo, Paco y Jorge han quedado en encontrarse con Carmen, Elena, Marta y Cristina. Al encontrarse se saludan dándose 2 besos entre un chico y una chica. ¿Cuántos besos se dan?

Podemos distinguir 5 niveles que son distintas formas de obtener la solución:

A_1={besos de Luis} $n_1=2\cdot4=8$

A_2={besos de Carlos} $n_2=2\cdot4=8$

A_3={besos de Gonzalo} $n_3=2\cdot4=8$

A_4={besos de Paco} $n_4=2\cdot4=8$

A_5={besos de Jorge} $n_5=2\cdot4=8$

Aplicando la estrategia de la suma $N=n_1+n_2+n_3+n_4+n_5=5\cdot8=40$ besos

· **5 pag 222.** ¿Cuántos partidos de Primera División se juegan con una temporada de Liga Española de Futbol?

Consideremos sólo la primera vuelta y luego multiplicamos por 2.

1. El primer equipo juega 19 partidos (contra los otros 19 equipos)→ 19
2. El 2º juega 19 pero de uno lo juega con el 1º que ya está contado→18
3. El 3º → 17 partidos

…

19. El 19º→ 1 partido
20. El 20º→ ya ha jugado todos en los anteriores

$N=19+18+17+\ldots+2+1=\frac{1+19}{2}\cdot20=200$ (regla de la suma)

Luego ida y vuelta son 400 partidos

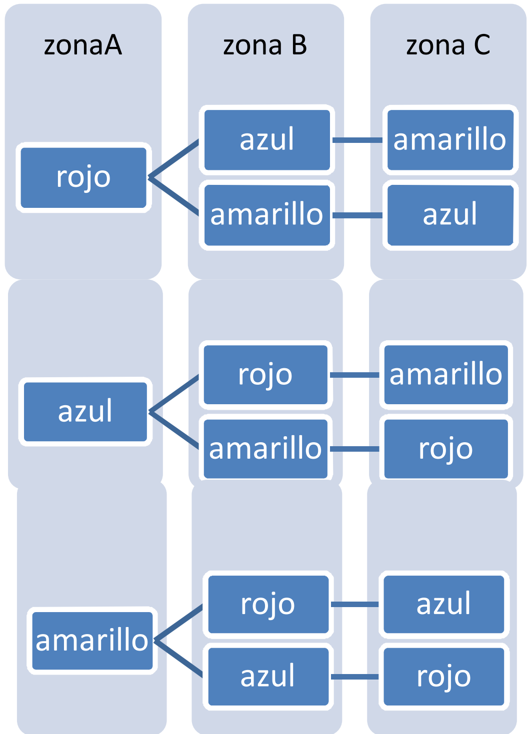
Otra forma diferente: Cada jornada son 10 partidos, como son 40 jornadas el número de partidos son $N=10\cdot40=400$ (regla del producto)

· **7 pag 222** Tenemos tres colores verde, rojo y azul para pintar una diana con tres zonas A, B y C. Cada zona debe tener un color diferente. ¿Y si tenemos 6 colores?

a) Por diagrama de árbol

$N=3\cdot2\cdot1=6$ posibilidades

b) Si tenemos 6 colores $N=6\cdot5\cdot4=120$



8. pag 222. En un bar tienen 5 tipo de zumos de fruta y 3 de café. ¿Cuántas combinaciones distintas se pueden hacer eligiendo un zumo y un café?. Si además añades elegir un bombón y tienen de dos sabores. ¿cuántas combinaciones tenemos ahora?.

a) Por la regla del producto, son 2 elecciones independientes: $N=n_1 \cdot n_2=5 \cdot 3=15$

b) Igual pero con tres elecciones: $N=n_1 \cdot n_2 \cdot n_3=5 \cdot 3 \cdot 2=30$

10. pag 222. En un bar hay 6 ventanas que pueden estar abiertas (A) o cerrada (C) indistintamente. ¿Cuántas posiciones distintas pueden estar las ventanas?

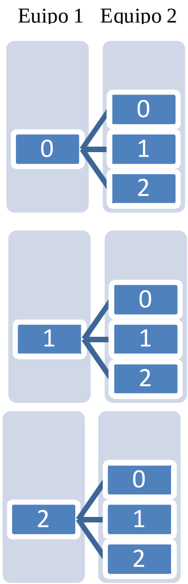
Son 6 elecciones independientes, pues la posición de una ventana es independiente de la posición de otra. Como hay dos posibilidades, Abierto o Cerrado, el número de soluciones son por la regla del producto:

$$N=n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot n_5 \cdot n_6=2^6=64 \text{ posibilidades}$$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

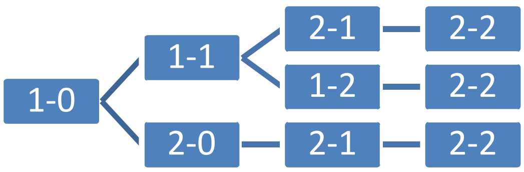
14. pag 223.a) Se ha jugado un partido de futbol y sabemos que el resultado fue de empate a 2 goles (2-2). ¿Cuál será el resultado del partido en el descanso?.Escribir todas posibilidades:

N=3·3=9



b) Si el descaso el resultado era de 1-0 ¿de cuantas formas pudo ir variando el resultado hasta llegar el 2-2?

3 formas diferente



16. pag 223. ¿cuántos números capicúas de tres cifras existen?. ¿y de cuatro? ¿y de cinco?

a) De tres: ____A_____ ____B____ ______A_____

Son dos números que tenemos que elegir para hacer uno capicúa, el de la posición central y el de los extremos. Son independientes entre si, ya que la dependencia la hemos puesto haciendo que el inicial y el final sean el mismo.

A_1={cifra A}→ n_1=9 posibilidades (el cero no puede ser sino de 2 cifras)

A_2={cifra B}→ n_2=10 posibilidades.

Aplicamos la regla del producto : $N=n_1\cdot n_2=9\cdot 10=90$

b) De 4 cifras: ____A_____ ____B____ ____B____ ______A_____

A_1={cifra A}→ n_1=9 posibilidades (el cero no puede ser sino de 2 cifras)

A_2={cifra B}→ n_2=10 posibilidades.

Aplicamos la regla del producto : $N=n_1\cdot n_2=9\cdot 10=90$

c) De 4 cifras: A B C B A

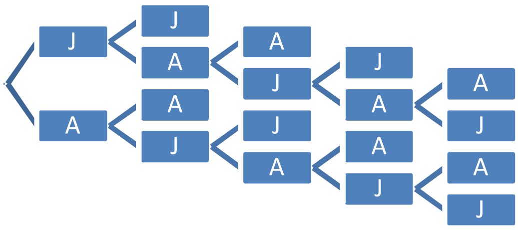
A_1={cifra A}→ n_1=9 posibilidades (el cero no puede ser sino de 2 cifras)

A_2={cifra B}→ n_2=10 posibilidades.

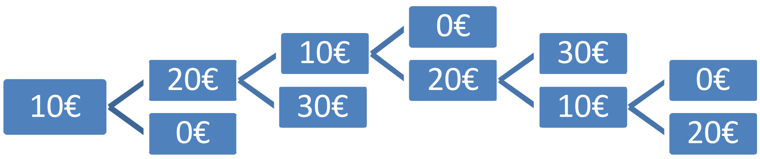
A_3={cifra C}→ n_2=10 posibilidades.

Aplicamos la regla del producto : $N=n_1 \cdot n_2 \cdot n_3=9 \cdot 10 \cdot 10=900$

19. pag 223. Álvaro y Javier juegan un torneo de tenis que ganará el que consiga dos juegos seguidos o tres alternativos. ¿Cuáles son los posibles desarrollos del torneo?



20. pag 223. Carlos va a un casino con 10€. Apuesta como máximo 5 veces hasta que o bien se queda sin dinero o gana 30€. Escribe todos los posibles resultados que se pueden dar:



6 posibles resultados

3. Variaciones y permutaciones

3.1 Variaciones simples u ordinarias

Definición: se llama variación de m elementos distintos de n en n (n<m) a las diferentes formas de agrupar los m elementos de n en n donde se cumple:

- Dos agrupaciones de elementos se dicen que son distintas tanto si tienen distintos elementos como si teniendo los mismos tienen distinto orden. INFLUYE EL ORDEN
- No se pueden repetir los elementos en las agrupaciones. NO REPETICIÓN.

El número de soluciones es el dado por : $V_{m,n} = \underbrace{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \ldots . (m-n+1)}_{n \ productos}$

Ejemplo: ¿de cuantas formas se pueden repartir 3 medallas a ocho finalistas?

Tenemos que agrupar 8 finalistas de 3 en 3 tal que:

- Influye el orden: no es lo mismo quedar 1º que 2º o 3º.
- No hay repetición: un finalista no puede ganar dos medallas en la misma prueba.
  Variaciones de 8 elementos de 3 en 3 (m=8, n=3). $V_{8,3}=8 \cdot 7 \cdot 6=336$ formas

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejercicio: Tenemos que dibujar una bandera con tres franjas horizontales con diferentes colores (como la Italiana) y tenemos 5 colores distintos. ¿Cuántas banderas diferentes podemos pintar?

Tenemos que agrupar 5 colores de 3 en 3 tal que:

- Influye el orden: banderas con mismos colores pero distinto orden son diferentes.
- No hay repetición: cada franja tiene distinto color, pues es una imposición del problema.

Es una variación de 5 elementos de 3 en 3. $V_{5,3}=5\cdot 4\cdot 3=60$ banderas distintas.

3.2. Permutaciones

Definición: permutación de m elementos son las distintas formas que tenemos de ordenar m elementos distintos. Es equivalente a una variación pero donde intervienen los m elementos. Se cumple entonces también:

- INFLUYE EL ORDEN: de hecho no puede haber agrupaciones con diferentes elementos, pues se usan todos.
- No se pueden repetir los elementos en las agrupaciones. NO REPETICIÓN.

Numero de soluciones $P_m=V_{m,m}=m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot 1=m!$.

Ejemplo: ¿cómo pueden clasificarse los 8 finalistas?

$V_{8,8}=P_8=8!=40320$ (calculadora)

Ejercicio: Claudia, Javier y Mónica se quieren sentar en 3 asientos de clase.¿De cuántas formas es posible?

Tenemos 3 sillas para 3 personas, es decir ver las formas de ordenar 3 personas de 3 en 3, donde influye el orden y no se puede repetir, es decir una persona no ocupa más que una silla.

$P_3=3!=3\cdot 2\cdot 1=6$ posibilidades

3.3. Variaciones con repetición

Definición: las variaciones con repetición de m elementos de n en n (ahora n puede ser mayor que m) son las distintas formas de agrupar tal que se cumple:

- INFLUYE EL ORDEN: es decir dos ordenaciones con mismos elementos y distinto orden son diferentes
- SE PUEDE REPETIR: los elementos.

El número de soluciones es : $VR_{m,n}=\underbrace{m\cdot m\ldots\cdot m}_{\text{n veces}}=m^n$

Ejemplo: tenemos una bolsa con 3 bolas con los números 1, 2, 3. Sacamos 5 bolas una a una con reemplazamiento, y apuntamos los números que salen, hasta formar un número de 5 cifras. ¿Cuántos números diferentes hay?

Tenemos 3 elementos que tenemos que agrupar de 5 en 5 tal que influye el orden, no es lo mismo las unidades que las centenas, etc. Además se puede repetir ya que hay reemplazamiento.

$VR_{3,5}=3^5=243$ números

Ejercicio: ¿Cuántas quinielas diferentes se pueden hacer?

Hay 3 elementos (1,x,2) y tenemos que agruparlos de 15 en 15 que es el número de partidos, tal que

- Si influye el orden, ya que el lugar donde coloquemos los símbolos es importante.
- Se pueden repetir, ya que podemos poner 1,x,2 las veces que deseemos.

$VR_{3,15}=3^{15}=14.348.907$ quinielas

Ejercicio 1 pag 224: ¿cuántos números de 4 cifras se pueden formar con cifras impares?

Tenemos 5 cifras (1,3,5,7,9) y queremos colocarlas de 4 en 4 tal que se pueden repetir e influye el orden.

$VR_{5,4}=5^4=625$

Ejercicio 2 pag 224: ¿Cuántos resultados distintos podemos obtener se tiramos un dado 4 veces?

En el dado hay 6 resultados posibles (1,2,3,4,5,6). Tenemos que ver las distintas formas de agrupar 6 elementos de 4 en 4, tal que influye el orden y se pueden repetir:

$VR_{6,4}=6^4=1296$

4. Combinaciones

En los apartados anteriores influía el orden, es decir diferenciábamos entre {A,B,C} y {A,C,B}. Pero no siempre ocurre esto, a veces el orden no influye. Veamos un ejemplo: tenemos10 libros y queremos coger 3 libros, ¿cuántas posibilidades hay?

Ahora no importa el orden pues da igual cual cojamos primero, segundo o tercero.

Definición: combinación de m elementos tomados de n en n (n menor que m) son las diferentes formas de agrupar m elementos diferente de n en n y se cumpla:

- No se repiten los elementos que elegimos para formar los grupos de n
- NO INFLUYE EL ORDEN de los elementos sólo los elementos que lo forman.

$$C_{m,n}=\binom{m}{n}=\frac{m!}{(m-n)!\cdot n!}$$

Ejemplo: en una clase de 20 tenemos que elegir 2 representantes, ¿de cuántas formas se pueden elegir?

Tenemos que ordenar 20 elementos de 2 en 2 donde:

- No se puede repetir el alumno
- No influye el orden, ya que nos da igual a cual elegimos primero.

$$C_{20,2}=\binom{20}{2}=\frac{20!}{(20-2)!\cdot 2!}=\frac{20!}{18!\cdot 2!}=\frac{20\cdot 19\cdot 18!}{18!\cdot 2}=190$$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

b) ¿y si sabemos que son delegado y subdelegado? Ahora si importa el orden, luego tenemos $V_{20,2}=20\cdot 19=380$ formas

Ejercicio 1 pag 228: Tenemos 6 puntos en el espacio de tal modo que no hay tres alineados ni cuarto coplanarios. ¿Cuántas rectas podemos trazar uniendo dos puntos? ¿Cuántos planos que pasen por tres de ellos?

a) Rectas→ por dos puntos pasan una recta. Hay que ver las formas de organizar los 6 puntos de 2 en 2, tal que:

- No se puede repetir los puntos, ya que entonces tendríamos sólo un punto
- El orden da igual, ya que sea cual sea el orden tenemos una única recta.

$$C_{6,2}=\binom{6}{2}=\frac{6!}{4!\cdot 2!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4!}{4!\cdot 2}=15$$

b) planos→ por 3 puntos pasan un plano. Hay que ver las formas de organizar los 6 puntos de 3 en 3, tal que:

- No se puede repetir los puntos
- El orden da igual, ya que sea cual sea el orden tenemos una único plano.

$$C_{6,3}=\binom{6}{3}=\frac{6!}{3!\cdot 3!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 3!}=20$$

Ejercicio 2 pag 228. ¿Cuántas posibles mezclas de dos colores en idénticas cantidades se pueden hacer con 8 tarros de pintura de distintos colores?

Son 8 colores agrupados de 2 en 2 tal que no podemos elegir el mismo (no se repiten) y el orden da igual, rojo+azul es lo mismo que azul+rojo.

$$C_{8,2}=\binom{8}{2}=\frac{8!}{2!\cdot 6!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6!}{2!\cdot 6!}=28\ mezclas$$

¿Mezclas de 3 colores? $C_{8,3}=\binom{8}{3}=\frac{8!}{3!\cdot 5!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{3!\cdot 5!}=56\ mezclas$

¿Mezclas de 4 colores? $C_{8,4}=\binom{8}{4}=\frac{8!}{4!\cdot 4!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!\cdot 4!}=70\ mezclas$

En una bolsa con 6 bolas calcular el número de formas de extraer 3 bolas si

a) Se extraen de 1 en 1 sin reeplazamiento

Elegir de 6 elementos de 3 en 3 tal que no se repiten (no hay reemplazamiento) e influye el orden, no es lo mismo sacar la bola 1 en la primera que en la segunda extracción. → $V_{6,3}=6\cdot 5\cdot 4=120$

b) Se extraen de 1 en 1 con reemplazamiento

Elegir de 6 elementos de 3 en 3 tal que se pueden repetir (hay reemplazamiento) e influye el orden, no es lo mismo sacar la bola 1 en la primera que en la segunda extracción. → $VR_{6,3}=6^3=216$

c) Se extraen a la vez

Elegir de 6 elementos de 3 en 3 tal que no se repiten (no hay reemplazamiento) y no influye el orden ya que se sacan todas a la vez→ $C_{6,3}=\binom{6}{3}=\frac{6!}{3!\cdot 3!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 3!}=20$

Ejercicios

12 pag 234. Para formar un equipo de baloncesto hacen falta 5 jugadores y el entrenador dispone de 10 jugadores. a)¿Cuántos jugadores distintos pueden formar?. b) ¿y si dos jugadores son fijos?

a) Tenemos que elegir 5 jugadores de los 10 de tal forma que:
   - No hay repetición (cada jugador ocupa un puesto)
   - No influye el orden (da igual como elijamos los 5)

Combinación de 10 elementos de 5 en 5→ $C_{10,5}=\binom{10}{5}=\frac{10!}{5!5!}=252$ equipos

b) Como dos son 2 fijos. Tenemos que elegir 3 jugadores 8 tal que:
   - No hay repetición (cada jugador ocupa un puesto)
   - No influye el orden (da igual como elijamos los 3)

Combinación de 8 elementos de 3 en 3→ $C_{8,3}=\binom{8}{3}=\frac{8!}{5!3!}=56$ equipos

13 pag 234. Se van a celebrar elecciones en la Asociación de padres y hay que elegir al presidente, secretario y tesorero. ¿De cuantas maneras se pueden elegir estos tres cargos, si se presentan 8 candidatos?

Tenemos que elegir 3 padres de los 8 de tal forma que:

- No hay repetición (cada padre ocupa un solo cargo)
- Influye el orden (son cargos distintos)

Variación de 8 elementos de 3 en 3→ $V_{8,3}=8\cdot 7\cdot 6=336$ formas de elegir cargos

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

14 pag 235. Se van a repartir tres regalos entre 6 personas, Calcular las formas que se pueden repartir si:

a) Los regalos son distintos y no puede tocarle más que un regalo por persona

b) Los regalos son iguales y no puede tocarle más de un regalo por persona

c) Los regalos son distintos y puede tocar a más de un regalo a la misma persona.

a) Tenemos que elegir 3 niños de los 6 de tal forma que:

- No hay repetición (un regalo para cada niño)
- Influye el orden (son regalos distintos)

Variación de 6 elementos de 3 en 3→ $V_{6,3}=6\cdot 5\cdot 4=120$ formas de repartir los regalos

b) Tenemos que elegir 3 niños de los 6 de tal forma que:

- No hay repetición (un regalo para cada niño)
- No influye el orden (son regalos iguales)

Combinación de 6 elementos de 3 en 3→ $C_{6,3}=\binom{6}{3}=20$ formas de repartir los regalos

c) Tenemos que elegir 3 niños de los 6 de tal forma que:

- Puede haber repetición (puede tocar varios regalos a un niño)
- Influye el orden (son regalos distintos)

Variación con repetición de 6 elementos de 3 en 3→$VR_{6,3}=6^3=216$ formas de repartirlos

17. pag 235. ¿De cuantas formas se pueden sentar tres personas en un banco de 5 asientos?

Tenemos que elegir 3 puestos del banco de los 5 de tal forma que:

- No hay repetición (un puesto para cada persona)
- Influye el orden (son puestos distintos)

Variación de 5 elementos de 3 en 3→ $V_{5,3}=5\cdot 4\cdot 3=60$ formas de sentarse

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

20. pag 235. Las 28 fichas de un dominó se reparten entre cuatro jugadores. ¿cuántos juegos distintos puede tener cada jugador?

Tenemos que elegir 7 fichas de las 28 de tal forma que:

- No hay repetición (las fichas son distintas)
- No influye el orden (da igual el orden en el que se eligen las 7 fichas)

Combinación de 28 elementos de 7 en 7→ $C_{28,7}=\binom{28}{7}=1184040$ formas de elegir las fichas.

22. pag 235. a)¿De cuantas formas se pueden ordenar las letras de las palabras PALOTE?. b)¿Cuántas empiezan por P?, c) ¿En cuántas de ellas ocupan las consonantes los lugares impares y las vocales las pares?

a) Tenemos que ordenar 6 letras tal que:

- No hay repetición (las letras son distintas)
- Influye el orden (según el orden son palabras distintas)

Permutación de 6 elementos $P_6=6!=720$ palabras distintas.

b) Tenemos que ordenar 5 letras (la P es fija) tal que:

- No hay repetición (las letras son distintas)
- Influye el orden (según el orden son palabras distintas)

Permutación de 5 elementos $P_5=5!=120$ palabras distintas.

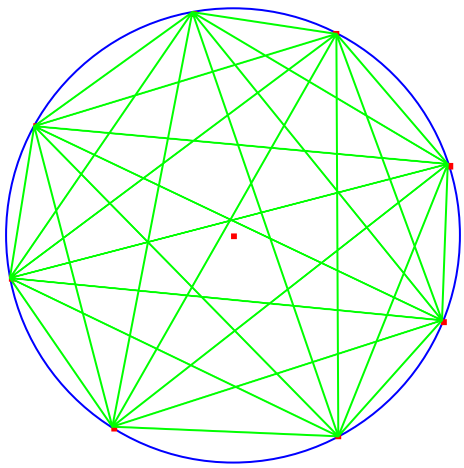
c) Tenemos dos niveles:

A_1={colocar las consonantes}→$n_1=P_3=3!=6$

A_2={colocar las vocales}→$n_2=P_3=3!=6$

Como son niveles independientes tenemos que por la regla del producto el número de soluciones son $N=n_1\cdot n_2=36$ palabras distintas

25. pag 236. Señala 8 puntos distintos en una circunferencia. Traza las cuerdas que unen cada punto con todos los demás. ¿Cuántas cuerdas son?



Tenemos que agrupar los 8 puntos de 2 en 2, tal que

- No hay repetición (segmento formado por puntos distintos)
- No influye el orden (da igual segmento AB que BA)

Combinación de 8 elementos de 2 en 2: $C_{8,2}=\binom{8}{2}=28$ cuerdas distintas.

46. pag 237. Cuántos triángulos se pueden hacer de modo que tengan los vértices en los puntos de estas redes:

a)

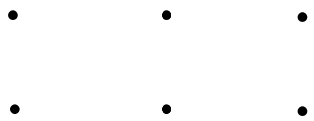
Tenemos que agrupar los 4 puntos de 3 en 3, tal que:

- No se pueden repetir los puntos
- No influye el orden, 3 puntos dan un triángulo independientemente como los unamos

Combinación de 4 elementos de 3 en 3 → $C_{4,3}=4$ triángulos diferentes

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

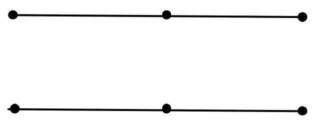
b)



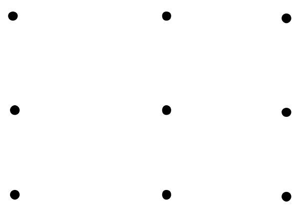
Tenemos que agrupar los 6 puntos de 3 en 3, tal que:

- No se pueden repetir los puntos
- No influye el orden, 3 puntos dan un triángulo independientemente como los unamos

Combinación de 6 elementos de 3 en 3 → $C_{6,3}$ =20 triángulos diferentes. Pero tenemos 2 agrupaciones de 3 puntos que no nos generan un triángulo, luego realmente son 18 triángulos diferentes.



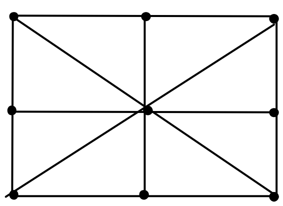
c)



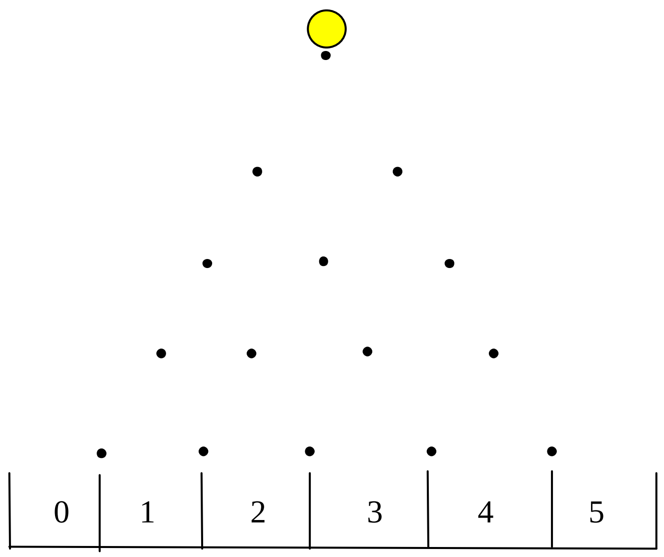
Tenemos que agrupar los 9 puntos de 3 en 3, tal que:

- No se pueden repetir los puntos
- No influye el orden, 3 puntos dan un triángulo independientemente como los unamos

Combinación de 9 elementos de 3 en 3 → $C_{9,3}$ =84 triángulos diferentes. Pero tenemos 8 agrupaciones de 3 puntos que no nos generan un triángulo, luego realmente son 76 triángulos diferentes.



¿Cuántos caminos hay para ir del inicio a los 5 cajetines?



0) Para llegar a la posición 0, tenemos que en cada nivel ir siempre a la izquierda. Luego de los 5 niveles tenemos que elegir 5 en los que la moneda va a la izquierda tal que :
   - No hay repetición, ya que sólo se gira una vez en cada nivel
   - No influye el orden ya que independientemente en el que elijamos este se realiza siempre primero en el primer nivel, luego en el segundo…

   Combinación de 5 elementos de 5 en 5 → $C_{5,5}$=1 camino

1) Para llegar a la posición 1, tenemos que en 4 niveles ir a la izquierda. Luego de los 5 niveles tenemos que elegir 4 en los la moneda va a la izquierda tal que :
   - No hay repetición, ya que sólo se gira una vez en cada nivel
   - No influye el orden ya que independientemente en el que elijamos este se realiza siempre primero en el primer nivel, luego en el segundo…

   Combinación de 5 elementos de 4 en 4 → $C_{5,4}$=5 caminos

2) Para llegar a la posición 2, tenemos que en 3 niveles ir a la izquierda. Luego de los 5 niveles tenemos que elegir 3 en los la moneda va a la izquierda tal que :
   - No hay repetición, ya que sólo se gira una vez en cada nivel
   - No influye el orden ya que independientemente en el que elijamos este se realiza siempre primero en el primer nivel, luego en el segundo…

   Combinación de 5 elementos de 3 en 3 → $C_{5,3}$=10 caminos

3) Para llegar a la posición 3, tenemos que en 2 niveles ir a la izquierda. Luego de los 5 niveles tenemos que elegir 2 en los la moneda va a la izquierda tal que :
   - No hay repetición, ya que sólo se gira una vez en cada nivel
   - No influye el orden ya que independientemente en el que elijamos este se realiza siempre primero en el primer nivel, luego en el segundo…

   Combinación de 5 elementos de 2 en 2 → $C_{5,2}$=10 caminos

4) Para llegar a la posición 4, tenemos un sólo 1 nivel en el que va a la izquierda. Luego de los 5 niveles tenemos que elegir 1 en donde la moneda va a la izquierda tal que :
   - No hay repetición, ya que sólo se gira una vez en cada nivel
   - No influye el orden ya que independientemente en el que elijamos este se realiza siempre primero en el primer nivel, luego en el segundo…

   Combinación de 5 elementos de 1 en 1 → $C_{5,1}$=5 caminos

5) Para llegar a la posición 5, tenemos en ningún nivel va a la izquierda. Luego de los 5 niveles tenemos que elegir 0 en donde la moneda va a la izquierda tal que :
   - No hay repetición, ya que sólo se gira una vez en cada nivel
   - No influye el orden ya que independientemente en el que elijamos este se realiza siempre primero en el primer nivel, luego en el segundo…

   Combinación de 5 elementos de 0 en 0 → $C_{5,0}$=1 caminos

48. pag 237. En una pizzería preparan pizzas con al menos 4 ingredientes. Si disponemos de 6 tipos de ingredientes. ¿Cuántos tipos de pizza se pueden preparar?. Pueden hacer las pizzas de 4, 5 o 6 ingredientes.

Tres formas de hacer las pizzas:

A_1={con 4 ingredientes} Formas de elegir 4 ingredientes de los 6 tal que no se repiten y da igual el orden→ $n_1=C_{6,4}$=15 pizzas diferente con 4 ingredientes

A_2={con 5 ingredientes} Formas de elegir 5 ingredientes de los 6 tal que no se repiten y da igual el orden→ $n_2=C_{6,5}$=6 pizzas diferentes con 5 ingredientes

A_3={con 6 ingredientes} Formas de elegir 6 ingredientes de los 6 tal que no se repiten y da igual el orden→ $n_3=C_{6,6}$=1 pizza diferente con 6 ingredientes

Como son soluciones diferentes y no tienen soluciones en común entonces podemos aplicar la regla de la suma:

$N=n_1+ n_2+ n_3=15+6+1=22$ pizzas diferentes

5. Factorial de un número y números combinatorios. Propiedades

Número factorial: el factorial se define sólo para números naturales, tal que es de la siguiente forma:

- Si n≠0 → n!=n·(n-1)·…·1. Ejemplo: 6!=6·5·4·3·2·1=720
- Si n=0 → 0!=1

Propiedades del número factorial:

1) n!=n·(n-1)!=n·(n-1)·(n-2)!=…Ejemplo: 7!=7·6!=7·6·5!

2) (n+1)·n!=(n+1)!. Ejemplo: 8·7!=8!

Número combinatorio: de dos naturales (m≥n), $\binom{m}{n}=\frac{m!}{n!(m-n)!}$. *Ejemplo:* $\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!\cdot 3!}$

Propiedades del número combinatorio:

P1: $\binom{m}{0}=\binom{m}{m}=1$

Dem: $\binom{m}{0}=\frac{m!}{0!\cdot m!}=\frac{1}{0!}=1$; $\binom{m}{m}=\frac{m!}{m!\cdot 0!}=\frac{1}{0!}=1$

Significado en combinatoria → grupos con m elementos de m en m o de 0 en 0)

P2: $\binom{m}{1}=\binom{m}{m-1}=m$. Ejemplo: $\binom{5}{4}=\binom{5}{1}=5$

Dem:

$$\binom{m}{1}=\frac{m!}{1!\cdot(m-1)!}=\frac{m\cdot(m-1)!}{1\cdot(m-1)!}=m \qquad \binom{m}{m-1}=\frac{m!}{(m-1)!\cdot(m-(m-1))!}=\frac{m\cdot(m-1)!}{(m-1)!\cdot 1!}=m$$

Significado combinatoria→grupos de m elementos de 1 en 1 o de m-1 en m-1.

P3: $\binom{m}{n}=\binom{m}{m-n}$. Ejemplo: $\binom{5}{2}=\binom{5}{3}=10$

Dem: $\binom{m}{n}=\frac{m!}{n!(m-n)!}$ y $\binom{m}{m-n}=\frac{m!}{(m-n)!\cdot(m-(m-n))!}=\frac{m!}{(m-n)!\cdot n!}$

Significado combinatoria→ con m elementos es lo mismo formar grupos con n elementos que con la diferencia m-n, pues por cada grupo con n elementos que hacemos también un grupo con m-n (que son los que no están en el grupo anterior).

P4: $\binom{m-1}{n-1}+\binom{m-1}{n}=\binom{m}{n}$. Ejemplo $\binom{5}{2}+\binom{5}{3}=\binom{6}{3}$ →10+10=20

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Demostración:

$$\binom{m-1}{n-1}+\binom{m-1}{n}=\frac{(m-1)!}{(n-1)!(m-n)!}+\frac{(m-1)!}{n!(m-n-1)!}=\frac{n\cdot(m-1)!}{n!(m-n)!}+\frac{(m-n)\cdot(m-1)!}{n!(m-n)!}=$$

$$=\frac{(m-1)!(n+m-n)}{n!(m-n)!}=\frac{(m-1)!\cdot m}{n!(m-n)!}=\frac{m!}{n!(m-n)!}=\binom{m}{n}$$

P5: $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$

Triángulo de Tartaglia o Pascal

Con este triángulo podemos ver todas las propiedades vistas anteriormente de forma muy intuitiva:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
1=2^0\\
1+1=2=2^1\\
1+2+1=4=2^2\\
1+3+3+1=8=2^3\\
1+4+6+4+6+1=16=2^4\\
1+5+10+10+5+1=32=2^5
\end{array}$$

Ejercicios:

1. **Pag 231.** Escribe como cociente de números factoriales.

a) $7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3=\frac{7!}{2!}$
b) $19\cdot 18\cdot 17=\frac{19!}{16!}$
c) $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)=\frac{n!}{(n-4)!}$
d) $(n+1)\cdot n\cdot(n-1)=\frac{(n+1)!}{(n-2)!}$
e) $(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-9)=\frac{(n-1)!}{(n-10)!}$

3. Resolver las siguientes ecuaciones

a) $V_{x,2}=7x$ → $x\cdot(x-1)=7x$ → $x\cdot(x-1-7)=0$ → x=0, **x=8**. El valor de x=0 no es una posible solución, pues x es el número de elementos, que ha de ser por lo menos igual a 2.
b) $VR_{x,2}-V_{x,2}=8$ → $x^2-x\cdot(x-1)=8$ → **x=8**
c) $V_{x,2}-V_{x-2,2}=62$ → $x(x-1)-(x-2)(x-3)=62$ → $4x-6=0$ → **x=3/2. No es solución**
d) $VR_{x,2}-V_{x,2}=8$ → $x^2-x\cdot(x-1)=8$ → **x=8**

6. Calcular

$$\binom{8}{0}+\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\ldots+\binom{8}{8}=2^8 \text{ (P5)}$$

8. Resolver sin desarrollar

a) $\binom{8}{3}+\binom{8}{x}=\binom{9}{4}$ → x=4 (P4)
b) $\binom{11}{3}+\binom{11}{x}=\binom{12}{3}$ → x=2 (P4)
c) $\binom{17}{x}=\binom{17}{x+1}$ → x=x+1 (no solución) y x+x+1=17 → x=8 (P3)

Veamos si es solución x=8→ $\binom{17}{8}=\binom{17}{9}$. Si pues los números de abajo son enteros menores que 17

$\binom{39}{5+2x}=\binom{39}{2x-2}$ →5+2x=2x-2 (no solución) (P3)→5+2x+2x-2=39 →x=9 Veamos si es solución que x=9→ $\binom{39}{23}=\binom{39}{16}$. Si pues los números de abajo son enteros menores que 39

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

d) $\binom{33}{x}+\binom{33}{x+y}=\binom{34}{5}$ → (P4) dos soluciones: $\begin{cases} x=4,\ y=1 \\ x=5,\ y=-1 \end{cases}$

35. pag 236. Calcular x en las siguientes expresiones:

a) $\binom{10}{3}=\binom{10}{x}$ →Dos soluciones: la trivial x=3 y x=7, pues 7+3=10 (P3)

b) $\binom{x}{7}=\binom{x}{8}$ → x=15 pues así 7+8=15 (P3)

c) $\binom{9}{2}=\binom{9}{x-2}$ →Dos soluciones: la trivial 2=x-2→ x=4, y 2+x-2=9 →x=9 (P3)

d) $\binom{11}{5}+\binom{11}{x}=\binom{12}{5}$ → Por P4 x=4

e) $\binom{13}{x}=\binom{13}{x-1}$ → x=x-1 no solución. Luego por P3 x+x-1=13 → x=7

f) $\binom{18}{7}+\binom{x}{8}=\binom{19}{8}$ → P4 se cumple x=18

g) $\binom{25}{3+2x}=\binom{25}{x-2}$ Dos posibles soluciones

a) 3+2x=x-2 →x=-5 $\binom{25}{-7}=\binom{25}{-7}$ que no es solución pues el número de abajo ha de ser positivo.

b) 3+2x+x-2=25 →x=8 $\binom{25}{19}=\binom{25}{6}$ Luego x=8 si es solución

h) $\binom{17}{3x-2}=\binom{17}{x-1}$ →3x-2=x-1→ x=1/2 $\binom{17}{-1/2}=\binom{17}{-1/2}$ No solución

Por la propiedad 3: 3x-2+x-1=17 →x=5 $\binom{17}{13}=\binom{17}{4}$ Si solución

j) $\binom{23}{x}+\binom{23}{y}=\binom{24}{8}$ → P4. $\begin{cases} x=7 & y=8 \\ x=8 & y=7 \end{cases}$

k) $\binom{19}{x}+\binom{19}{x+1}=\binom{20}{7}$ → x=6

40. pag 237. Simplifica las siguientes expresiones

a) $\frac{x!}{(x-2)!}=\frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)!}{(x-2)!}=x\cdot(x-1)=x^2-x$

b) $\frac{(x+1)!}{(x-1)!}=\frac{(x+1)\cdot x\cdot(x-1)!}{(x-1)!}=(x+1)\cdot x=x^2+x$

c) $\frac{4x!}{3\cdot(x-1)!}=\frac{4x\cdot(x-1)!}{3\cdot(x-1)!}=\frac{4}{3}x$

6. Binomio de Newton

Mediante el binomio de Newton calculamos el desarrollo de todo binomio (suma o resta de dos monomios) elevado a un número natural.

Veamos las 4 primeras potencias (hacer en casa las operaciones) para luego entender su comportamiento general, cuya demostración no veremos.

$(a+b)^0=1$

$(a+b)^1=a+b$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

…

Como puedes ver los coeficientes son los del triángulo de Tartaglia. Así de forma general tenemos que un binomio elevado a n, con n∈N:

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}\cdot b+\binom{n}{2}a^{n-2}\cdot b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}a^1\cdot b^{n-1}+\binom{n}{n}b^n$$

Veamos algunos ejemplos:

a)

$$(x+3)^5=\binom{5}{0}x^5+\binom{5}{1}x^4 3^1+\binom{5}{2}x^3 3^2+\binom{5}{3}x^2 3^3+\binom{5}{4}x^1 3^4+\binom{5}{5}3^5=$$

$$=x^5+15x^4+90x^3+270x^2+405x+243$$

b)

$$(2x-x^2)^4=\binom{4}{0}(2x)^4+\binom{4}{1}(2x)^3(-x^2)+\binom{4}{2}(2x)^2(-x^2)^2+\binom{4}{3}(2x)^1(-x^2)^3+\binom{4}{4}(-x^2)^4=$$

$$=16x^4-32x^5+24x^6-8x^7+x^8$$

c)

$$\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}\right)^6=\binom{6}{0}\left(\frac{x}{2}\right)^6+\binom{6}{1}\left(\frac{x^2}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{x}\right)+\binom{6}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2+\binom{6}{3}\left(\frac{x^2}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^3$$

$$+\binom{6}{4}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^4+\binom{6}{5}\left(\frac{x^2}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^5+\binom{6}{6}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^6=$$

$$=\frac{x^{12}}{64}+\frac{9x^9}{16}+\frac{135x^6}{16}+\frac{135x^3}{2}+\frac{1215}{4}+\frac{729}{x^3}+\frac{729}{x^6}$$

d)

$$\left(-\frac{4}{\sqrt{x}}+2\right)^5=\binom{5}{0}\left(\frac{-4}{\sqrt{x}}\right)^5+\binom{5}{1}\left(\frac{-4}{\sqrt{x}}\right)^4\cdot 2^1+\binom{5}{2}\left(\frac{-4}{\sqrt{x}}\right)^3\cdot 2^2+\binom{5}{3}\left(\frac{-4}{\sqrt{x}}\right)^2\cdot 2^3+$$

$$+\binom{5}{4}\left(\frac{-4}{\sqrt{x}}\right)^1\cdot 2^4+\binom{5}{5}\cdot 2^5=-\frac{1024}{\sqrt{x^5}}+\frac{2560}{x^2}-\frac{2560}{\sqrt{x^3}}+\frac{1280}{x}-\frac{320}{\sqrt{x}}+32$$