Tema 3. Polinomios y fracciones algebraicas

1. Monomios

1.1. Definiciones

Un monomio es una expresión del tipo $a\cdot x^n$ donde:

- $a\in R$ y se denomina coeficiente
- x: es la variable (puede ser otra letra y, z…). Esta "letra" puede tomar cualquier valor real
- $n\in N$ es el grado del monomio
- x^n se denomina parte literal

Ejemplos: $5x^2, -\frac{2}{3}y^3, z^4, -\pi x, -3$

	Coeficiente	Grado	Variable
$5x^2$	5	2	x
$-\frac{2}{3}y^2$	$-\frac{2}{3}$	2	y
z^4	1	4	z
$-\pi x$	$-\pi$	1	x
-3	-3	0	--

Los monomios de grado 0 son los números reales $-3=-3\cdot x^0$

Definición: monomios semejantes son todos aquellos que tiene misma parte literal, es decir misma variable y grado.

Ejemplo: $-4x^3, \pi x^3, -x^3$

1.2. Operaciones con monomios

<u>Suma y resta:</u> sólo se pueden sumar los monomios semejantes, sumándose y restándose los coeficientes:

$ax^n\pm bx^n=(a\pm b)x^n$

Ejemplo: $-7x^2+3x^2-12x^2=-16x^2$;

$$\sqrt{8}x-\sqrt{2}x=(\sqrt{8}-\sqrt{2})x=(2\sqrt{2}-\sqrt{2})x=\sqrt{2}x$$

<u>Multiplicación:</u> se multiplican los coeficientes y se suman los exponentes de las variables iguales:

$(ax^n)\cdot(bx^m)=(a\cdot b)x^{n+m}$

Ejemplos: $5x^2\cdot(-3x^4)=-15x^6$; $\sqrt{3}y\cdot\sqrt[3]{2}y^2=(\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2})\cdot y^3=\sqrt[6]{3^3\cdot 2^2}\cdot y^3=\sqrt[6]{108}\cdot y^3$; $2x\cdot(-3y^2)=-6\cdot x\cdot y^2$

<u>División:</u> se dividen los coeficientes y se restan los exponentes de variables iguales:

$(ax^n):(bx^m)=(a:b)x^{n-m}$

Ejemplo: $5x^3:(2x^2)=\frac{5}{2}x$, $\frac{\sqrt{6}x^3}{\sqrt{3}x^2}=\sqrt{2}x$

Potencia: se eleva el coeficiente y se multiplica el exponente por el grado del número.

$(ax^n)^m=a^m\cdot x^{n\cdot m}$

Ejemplos: $(5\cdot x^3)^4=5^4x^{12}=625\cdot x^{12}$; $(-3y)^3=-27y^3$

2. Polinomios

2.1. Definiciones

Definición: se llama polinomio de variable x a la expresión algebraica que resulta de sumar 2 o más monomios de variable x, siendo del tipo:

$P(x)=a_nx^n+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$ Donde:

- $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$ y son los coeficientes y a_0 término independiente
- n es el grado del polinomio (el grado mayor de los monomios)
- $a_nx^n, \ldots, a_1x, a_0$ son los términos del polinomio

Ejemplo: $P(x)=-6x^5-3x^2+\frac{3}{2}\cdot x+\sqrt{2}$ es un polinomio de variable x, de grado 5 con coeficientes $a_5=-6$, $a_4=a_3=0$, $a_2=-3$, $a_1=\frac{3}{2}$ y $a_0=\sqrt{2}$. Siendo $\sqrt{2}$ el término independiente.

Observa las siguientes expresiones que no son polinomios de variable x:

$\sqrt{x}+x$; $x^3-\frac{1}{x}$; x^2-y+2

Otras definiciones:

- *polinomio de grado cero*: son los números reales
- *polinomio nulo*: es el cero $0(x)=0$
- *polinomio completo*: es aquel donde todos los coeficientes desde el de mayor grado al término independiente son distintos de cero. Ejemplo: $P(x)=-2x^3+4x^2-5x+12$

Valor numérico de un polinomio: resulta de sustituir una variable por un número, obteniendo el correspondiente valor numérico.

Ejemplo: $P(x)=x^3-x^2+x-5 \rightarrow P(1)=1^3-1^2+1-5=-4$; $P(0)=0^3-0^2+0-5=-5$

Raíz de un polinomio P(x): es todo número real, $a\in R$, tal que su valor numérico es cero es decir $P(a)=0$

Ejemplo: $P(x)=7x^5-4x^2+11$ el -1 es una raíz de P(x) $\rightarrow P(-1)=-7-4+11=0$.

En siguientes apartados veremos cuantas y como calcular las raíces de los polinomios.

2.2. Operaciones con polinomios

Suma y diferencia: se suman y restan los monomios semejantes como vimos en el apartado anterior.

Ejemplo: $P(x)=2x^3-5x^2+3x-2$ y $Q(x)=6x^4-5x^3+6x-5$

$P(x)+Q(x)= 2x^3-5x^2+3x-2+(6x^4-5x^3+6x-5)=6x^4-3x^3-5x^2+9x-7$

$P(x)-Q(x)=2x^3-5x^2+3x-2-(6x^4-5x^3+6x-5)=2x^3-5x^2+3x-2-6x^4+5x^3-6x+5=$

$=-6x^4+7x^3-5x^2-3x+3$

Definición: polinomios opuestos son los que sumados el resultado es el polinomio nulo. El opuesto de P(x) se denota como –P(x).

Ejemplo: $P(x)=x^2-3x+5 \rightarrow -P(x)=-x^2+3x-5$

Multiplicación: la multiplicación de dos polinomios resulta de multiplicar cada monomio del primer polinomio por todos los monomios del segundo.

Ejemplo: $(5x^2-3x+5)\cdot(-7x^3+x+1)=-35x^5+5x^3+5x^2+21x^4-3x^2-3x-35x^3+5x+5=$

$=-35x^5+21x^4-30x^3+2x^2+2x+5$

Potencia de polinomios: la potencia n-esima de un polinomio P(x) se denota como $(P(x))^n$ y resulta de multiplicar P(x) n veces por si mismo: $(P(x))^n=\underbrace{P(x)\cdot P(x)\cdot \ldots \cdot P(x)}_{\text{n-veces}}$

Ejemplo: $P(x)=(5x^2+x+1) \rightarrow (P(x))^3=(5x^2+x+1)\cdot(5x^2+x+1)\cdot(5x^2+x+1)=$

$=125x^6+75x^5+90x^4+31x^3+18x^2+3x+1$

Identidades notables:

- Cuadrado de la suma de monomios: $\mathbf{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$.

  Demostración: $(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2$

  Ejemplo: $(5x+3)^2=(5x)^2+2\cdot5x\cdot3+3^2=25x^2+30x+9$
- Cuadrado de la diferencia de monomios: $\mathbf{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$.

  Demostración: $(a-b)^2=(a-b)\cdot(a-b)=a^2-ab-ba+b^2=a^2-2ab+b^2$

  Ejemplo: $(5x-3)^2=(5x)^2-2\cdot5x\cdot3+3^2=25x^2-30x+9$
- Suma por diferencia: $\mathbf{(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2}$

  Demostración: $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-ab+ba-b^2=a^2-b^2$

  Ejemplo: $(5x-3)\cdot(5x+3)=(5x)^2-3^2=25x^2-9$

Ejercicio 1, calcular

a) $\mathbf{(3x+1)^2}=9x^2+6x+1$

b) $\mathbf{(a^2+1/2)^2}=a^4+a^2+1/4$

c) $\mathbf{(2x^2-3)^2}=4x^4-12x^2+9$

d) $\mathbf{(2a^3+b^2)\cdot(2a^3-b^2)}=4\cdot a^6-b^4$

e) $\mathbf{(2x^3+2x-1)^2}=(2x^3+2x-1)\cdot(2x^3+2x-1)=4x^6+8x^4-4x^3+4x^2-4x+1$

<u>Sacar factor común:</u> cuando todos los términos del polinomio P(x) son múltiplos de un monomio m(x) podemos sacarlo factor común.

Ejemplo: $6x^4-9x^3+12x^2-3x=3x\cdot(2x^3-3x^2+4x-1)$

Ejercicio 2, sacar factor común:

a) $\mathbf{490x^3-420x^2+90x}=10x\cdot(49x^2-42x+9)=10x(7x-3)^2$
b) $\mathbf{1/4x^3-3/20x^2+5/4x}=x/4\cdot(x^2-3/5x+5)$

<u>División de polinomios:</u> veamos como se divide a partir de un ejemplo

$$
\begin{array}{llllll|l}
\multicolumn{6}{c}{\overbrace{\hspace{6em}}^{P(X)}} & \overbrace{\hspace{4em}}^{Q(x)} \\
6x^4 & & +8x^2 & +7x & +40 & & 2x^2-4x+5 \\ \cline{7-7}
-6x^4 & +12x^3 & -15x^2 & & & & 3x^2+6x+17/2=C(x)\ \mathit{cociente} \\ \cline{1-3}
 & +12x^3 & -7x^2 & & & & \\
 & -12x^3 & +24x^2 & -30x & & & \\ \cline{2-4}
 & & 17x^2 & -23x & & & \\
 & & -17x^2 & +34x & -85/2 & & \\ \cline{3-5}
 & & & 11x & -5/2 & =R(x) & \\ \cline{4-5}
 & & & \multicolumn{2}{c}{\mathit{resto}} & &
\end{array}
$$

$P(x)=Q(x)\cdot C(x)+R(x)$

Si la división es exacta se cumple $R(x)=0 \rightarrow P(x)=Q(x)\cdot C(x)$, luego P(x) <u>múltiplo</u> de Q(x) y C(x), o estos <u>divisores</u> de P(x).

Se cumple también: $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=C(x)+\dfrac{R(x)}{Q(x)}$

Ejemplo: $\dfrac{6x^4+8x^2+7x+40}{2x^2-4x+5}=3x^2+6x+\dfrac{17}{2}+\dfrac{11-5/2}{2x^2-4x+5}$

Ejercicio 3: decir si $\mathbf{A(x)=x^4+3x^3-x^2-4x-1}$ es múltiplo de B(x)=x+3 y C(x)=x+1

Dividiendo tenemos que la división de A(x) entre (x+3) no es exacta → no múltiplo

La división entre (x+1) la división es exacta → es múltiplo

3. Factorización de un polinomio

3.1. Teorema del resto. Criterio de divisibilidad por (x-a)

Un polinomio P(x) será múltiplo del polinomio de primer grado de la forma (x-a), con $a\in\mathbb{Z}$ si se cumple que la división P(x):(x-a) es exacta, es decir el resto es cero.

Existen diversos teoremas que nos facilitan saber si (x-a) es divisor de P(x) sin necesidad de realizar la división. Veámoslos

Teorema 1: Sea $P(x)=a_nx^n+\ldots a_2x^2+a_1x+a_0$ con coeficientes enteros ($a_n,\ldots,a_1,a_0\in Z$) para que (x-a) con $a\in Z$ sea divisor de P(x) es necesario que el término independiente,a_0, sea múltiplo de a. Esta condición es necesaria pero no suficiente, es decir a puede ser divisor de a_0 y en cambio (x-a) no ser divisor.

Ejemplo: Sea el polinomio $P(x)=x^3-x^2-4x+4$ los posibles divisores de la forma (x-a) con a nº entero son los siguientes (compruébalo dividiendo):

- a=1 → (x-1), si dividimos la división es exacta → (x-1) divisor de P(x)
- a=2 → (x-2), si dividimos la división es exacta → (x-2) divisor de P(x)
- a=4 → (x-4), si dividimos la división no es exacta, resto=36
- a=-1 → (x+1), si dividimos la división no es exacta, resto=6
- a=-2 → (x+2), si dividimos la división es exacta → (x+2) divisor de P(x)
- a=-4 → (x+4), si dividimos la división no es exacta , resto=-60

Teorema del resto: el resto de dividir P(x) entre (x-a) es igual al valor numérico de P(a) → resto=P(a).

Ejemplo: comprobémoslo en el polinomio anterior $P(x)=x^3-x^2-4x+4$ y los factores anteriores:

- a=1 → (x-1), resto=P(1)=0
- a=2 → (x-2), resto=P(2)=0
- a=4 → (x-4), resto=P(4)=36
- a=-1 → (x+1), resto=P(-1)=6
- a=-2 → (x+2), resto=P(-2)=0
- a=-4 → (x+4), resto=P(-4)=-60

A partir del teorema del resto podemos saber si un polinomio es múltiplo de P(x) de (x-a) sin necesidad de dividir, simplemente calculando P(a):

a) Si P(a)=0 entonces (x-a) divisor de P(x) pues el resto es 0

b) Si $P(a)\neq 0$ entonces (x-a) no es divisor de P(x) pues el resto no es cero.

Relación entre raíces de un polinomio soluciones ecuación y divisibilidad por (x-a): Recordemos todos los teoremas y definiciones vistas anteriormente para relacionarlas entre si, sea $P(x)= a_nx^n+\ldots a_2x^2+a_1x+a_0$

a es raíz si P(a)=0 ←→ a solución a la ecuación $a_nx^n+\ldots a_2x^2+a_1x+a_0$ ←→ (x-a) divisor de P(x) pues el resto de la división r=P(a)=0.

Luego todas las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a es raíz del polinomio P(x)
- a solución de la ecuación $a_nx^n+\ldots a_2x^2+a_1x+a_0=0$
- (x-a) divisor de P(x)

Teorema fundamental del álgebra: sea un polinomio de P(x) de grado n, el número máximo de raíces es n, y por tanto el número máximo de polinomios de la forma (x-a) divisores y de soluciones a la ecuación $a_nx^n+\ldots a_2x^2+a_1x+a_0=0$

Ejercicio 4: Sean el polinomio $P(x)=x^3+2x^2-x-2$ $Q(x)= x^3-5x^2-9x+45$ calcular

a) Los posibles polinomios (x-a) con $a\in Z$ divisores de P(x)
b) El número máximo de ellos que puede ser divisores de P(x)
c) Cuales son los divisores
d) Calcular las soluciones de la ecuación de $x^3+2x^2-x-2=0$

Solución:

$P(x) =x^3+2x^2-x-2$

a) Pueden ser a=1 → (x-1); a=2 → (x-2); a=-1 → (x+1); a=-2 →(x+2)
b) Como mucho sólo 3 pueden ser divisores de P(x)
c) No hace falta dividir simplemente calcular el resto es decir P(a):
   - **(x-1)** → r=P(1)=1+2-1-2=0 divisor
   - (x-2) → r=P(2)=8+8-2-2=12 no divisor
   - **(x+1)**→ r=P(-1)=-1+2+1-2=0 divisor
   - **(x+2)**→ r=P(-2)=-8+8+2-2=0 divisor
d) El número máximo de soluciones de la ecuación es de 3, son x=1, x=-1, x=-2

$Q(x) = x^3-5x^2-9x+45$

a) Pueden ser a=1 →(x-1); a=3 →(x-3); a=5 →(x-5); a=9 →(x-9); a=15→ (x-15) a=45 →(x-45); a=-1 → (x+1); a=-3 → (x+3); a=-5 → (x+5); a=-9 → (x+9); a= -15 →(x+15); a=-45 → (x+45)
b) Como mucho sólo 3 pueden ser divisores de P(x)
c) No hace falta dividir simplemente calcular el resto es decir P(a):
   - (x-1) → r=P(1)=32 no divisor
   - **(x-3)** → r=P(3)=0 divisor
   - **(x-5)** → r=P(5)=0 divisor
   - (x-9)→ r=P(9)=288 no divisor
   - (x-15) → r=P(15)=2160 no divisor
   - (x-45)→r=P(45)=80640 no divisor
   - (x+1)→ r=P(-1)=48 no divisor
   - **(x+3)**→ r=P(-3)=0 divisor
   - (x+5)→ r=P(-5)=-160 no divisor
   - (x+9)→ r=P(-9)=-1008 no divisor
   - (x+15) → r=P(-15)=-4320 no divisor
   - (x+45)→r=P(-45)=-100800 no divisor

d) El número máximo de soluciones de la ecuación es de 3, son x=3, x=-3, x=5

Soluciones cuando a no es un número entero: hasta ahora sólo hemos considerado las raíces enteras, habiendo visto que estas deben de ser divisores del término independiente. Pero estás no son las únicas que pueden ser raíces, veamos algún ejemplo:

Ejemplos:

a) $P(x)=6x^2+x-1$ → Las únicas raíces enteras pueden ser a=1 y a=-1, pero estas no son raíces P(1)=6 y P(-1)=4, entonces (x-1) y (x+1) no son divisores de P(x) . ¿entonces no tiene raíces ni divisores?. Veamos como si. Las raíces de P(x) serán también soluciones de $6x^2+x-1=0$, que como bien sabemos podemos calcular a partir de las soluciones de ecuaciones de segundo grado.

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{12}=\frac{-1\pm 5}{12}=\left\langle \begin{array}{l}\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Luego (x+1/2) y (x-1/3) son divisores de P(x) pues P(-1/2)=0 y P(1/3)=0.

b) $P(x)=x^2-3x-3$ → Las únicas raíces enteras pueden ser a=1 y a=-1, a=3 y a=-3 pero estas no son raíces P(1)≠0, P(-1)≠0, P(3)≠0 y P(-3)≠0, entonces (x-1), (x-3), (x+1) y (x-3) no son divisores de P(x) . ¿entonces no tiene raíces ni divisores?. Veamos como si. Las raíces de P(x) serán también soluciones de $x^2-3x-3=0$, que como bien sabemos podemos calcular a partir de las soluciones de ecuaciones de segundo grado.

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9+12}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}=\left\langle \begin{array}{l}\frac{3+\sqrt{21}}{2}\\ \frac{3-\sqrt{21}}{2}\end{array}\right.$$

Luego (x-$\frac{3+\sqrt{21}}{2}$) y (x- $\frac{3-\sqrt{21}}{2}$) son divisores de P(x) pues P($\frac{3+\sqrt{21}}{2}$)=0 y P($\frac{3-\sqrt{21}}{2}$)=0.

Regla de Ruffini: cuando dividimos un polinomio P(x) entre un binomio de la forma (x-a) podemos aplicar la regla de Ruffini, que es más sencillo que la división

Ejemplos:

$(x^3-2x^2-3):(x+2)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & 0 & -3\\ -2 & & -2 & 8 & -16\\ \hline & 1 & -4 & 8 & \underline{|-19}\end{array}$$

→ $C(x)=x^2-4x+8$ r=-19

$(x^3-2x^2-3):(x-1/2)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -2 & 0 & -3 \\ \tfrac{1}{2} & & \tfrac{1}{2} & -\tfrac{3}{4} & -\tfrac{3}{8} \\ \hline & 1 & -\tfrac{3}{2} & -\tfrac{3}{4} & -\tfrac{27}{8} \end{array} \quad \rightarrow C(x)=x^2-\tfrac{3}{2}x-\tfrac{3}{4} \quad r=-\tfrac{27}{8}$$

3.2. Propiedades de la divisibilidad

3.2.1. Polinomios irreducibles

Definición: un polinomio se dice irreducible cuando no tiene ningún otro polinomio divisor de grado inferior (siempre es posible encontrar uno del mismo grado)

Teorema: los únicos polinomios irreducibles son los de 1er grado y los de segundo grado con soluciones no reales.

Ejemplos: $P(x)=x-3$, $Q(x)=x+5$, $H(x)=3x+3$, $I(x)=x^2-3x+3$, $J(x)=x^2+1$

Nota: darse cuenta que 3x+3 es divisible por x+1, pero este polinomio es del mismo grado.

Ejercicio 5: decir cuáles de los siguientes polinomios son irreducibles: x^2-3x+1, x^3+x, x^2+x+6, $7x-3/2$

- $x^2-3x+1 \rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$,2 divisores $x^2-3x+1=(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2})(x-\frac{3-\sqrt{5}}{2})$
- x^3+x No al ser de tercer grado→ 2 divisores, 1 raíz $x^3+x=x(x^2+1)$
- $x^2+x+6 \rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1-24}}{2}=no\,sol$, **Irreducible,** no raíces ni divisores
- 7x-3/2, es **irreducible** al ser de primer grado

Proposición: desde el punto de vista de la divisibilidad todos dos polinomios son equivalentes si son proporcionales→ P(x) equivalente a Q(x) si $P(x)=K\cdot Q(x)$

Ejemplos: $x^3+3x+2 \equiv 3x^3+9x+6 \equiv \tfrac{1}{3}x^3+x+\tfrac{2}{3}$

Nota: de todos los polinomios equivalentes se toma el que tiene el coeficiente de mayor grado igual a la unidad.

Ejemplos: $5x^3+3x^2+15x \rightarrow x^3+3/5x^2+3x$; $2x^2-4x+2 \rightarrow x^2-2x+1$

3.2.2. Número de raíces y divisores de primer grado de un polinomio.

Teorema: un polinomio P(x) tiene a lo sumo n raíces (y por tanto n divisores de primer grado) siendo n el grado del polinomio.

Demostración: supongamos que $P(x)=x^n+\ldots+a_1x+a_0$ tiene n+1 raíces $a^1, a^2,\ldots,a^{n+1}$, entonces P(x) se puede poner como $P(x)=(x-a^1)\cdot\ldots\cdot(x-a^{n+1})$ y sería entonces de grado n+1 y no degrado n.

Definición: una raíz "a" de un polinomio P(x) tiene multiplicidad 2 si P(x) es divisible por $(x-a)^2$, multiplicidad 3 si es divisible por $(x-a)^3$, etc.

Ejemplos:

$P(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2$, luego a=-1 es raíz doble

$Q(x)=x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$, luego a=1 es raíz triple.

Nota: a la hora de contar el número de raíces las raíces dobles cuentan como 2, raíces triples como 3, etc. De esta forma un polinomio de grado 3 no podrá tener 2 raíces dobles (pues sería como 4 raíces)

3.3. Descomposición factorial de un polinomio

Definición: la descomposición factorial de un polinomio consiste en expresarlo como producto de polinomios irreducibles (de 1^er^ grado y de 2º sin soluciones).

Diferentes métodos:

a) Sacar factor común: cuando el término independiente es nulo, pudiendo sacar factor común x^m siendo m el grado del monomio de menor grado. De esta forma a=0 es raíz de multiplicidad m.

   Ejemplo: $P(x)=x^5-5x^4-9x^3+45x^2=x^2(x^3-5x^2-9x+45)$ a=0 es raíz doble.

b) Buscar divisores de la forma (x-a) por Ruffini: por Ruffini sólo buscaremos divisores donde la raíz, a, es entera. Recordar que entonces a debe de ser divisor del término independiente.

   Ejemplo: Q(x)=$x^3-5x^2-9x+45$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -5 & -9 & 45 \\ 3 & & 3 & -6 & -45 \\ \hline & 1 & -2 & -15 & 0 \\ -3 & & -3 & 15 & \\ \hline & 1 & -5 & 0 & \end{array}$$

$$P(x)=(x-3)(x^2-2x-15)$$

$$(x^2-2x-15)=(x+3)(x-5)$$

→ Q(x)=(x-3)(x+3)(x-5)

   Luego el polinomio P(x) del ejemplo anterior es $P(x)=x^2\cdot(x-3)(x+3)(x-5)$

c) A partir soluciones de ecuación de 2º grado: cuando las raíces no son enteras no es fácil encontrarlas a partir de Ruffini. Si tenemos una ecuación de 2º grado podemos obtener las raíces a partir de sus soluciones.

   Ejemplo: $P(x)=x^3-5x^2+5x-1$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -5 & 5 & -1 \\ 1 & & 1 & -4 & 1 \\ \hline & 1 & -4 & 1 & 0 \end{array} \qquad P(x)=(x-1)(x^2-4x+1)$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-4}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}=\left\langle\begin{array}{l}2+\sqrt{3}\\2-\sqrt{3}\end{array}\right. \qquad (x^2-4x+1)=(x-(2+\sqrt{3}))\cdot(x-(2-\sqrt{3}))$$

   $P(x)=(x-1)\cdot(x-(2+\sqrt{3}))\cdot(x-(2-\sqrt{3}))$

Ejercicio 6: factorizar:

- **a)** $P(x)=x^3+4x^2+x+4 \rightarrow P(x)=x^3+4x^2+x+4=(x+4)(x^2+1) \rightarrow$ raíz -4
- **b)** $Q(x)=2x^3+x^2-8x-4 \rightarrow Q(x)=2(x+\frac{1}{2})(x-2)(x+2) \rightarrow$ raíz $-\frac{1}{2}, \pm 2$
- **c)** $H(x)=3x^2+10x+3 \rightarrow H(x)=3\cdot(x+3)(x+1/3) \rightarrow$ raíz -3 y -1/3
- **d)** $I(x)=2x^3+4x^2-2x-4 \rightarrow I(x)=2\cdot(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+2) \rightarrow$ raíz -1, 1 y -2
- **e)** $J(x)=x^3+x \rightarrow J(x)=x(x^2+1) \rightarrow$ raíz 0
- **f)** $K(x)=x^3+x^2+x-3 \rightarrow K(x)=(x-1)\cdot(x^2+2x+3) \rightarrow$ raíz 1
- **g)** $L(x)=x^4+2x^3+x^2 \rightarrow L(x)=x^2\cdot(x+1)^2 \rightarrow$ raíz 0 y -1 doble
- **h)** $M(x)=x^4-3x^3-2x^2+2x \rightarrow M(x)=x\cdot(x+1)\cdot(x-(2+\sqrt{2}))\cdot(x-(2-\sqrt{2})) \rightarrow$ raíz 0,-1, $2+\sqrt{2}$, $2-\sqrt{2}$

Ejercicio 7: A partir de los teoremas visto hasta ahora decir si están bien o mal factorizados los siguientes polinomios. Decir por qué.

a) $P(x)=x^3-3x^2+2x+3=(x+5)\cdot(x+1)\cdot(x-2)$ Falso, 2 y 5 no son divisores de 3

b) $Q(x)=x^3-2x^2+1=(x-1)^2(x+1)^2$ Falso, 4 raíces (dos de multiplicidad doble) y grado 3

c) $H(x)=x^3-5x^2-x+5=(x-5)\cdot(x+1)\cdot(x-1)$. Verdadero 3 raíces$\rightarrow H(1)=H(-1)=H(5)=0$

d) $I(x)=x^3+5x^2+6x+10=(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+5)$ Falso. $I(-1)=-1+5-6+10\neq 0$

e) $S(x)=2x^2+4x+2=(x+1)^2$. Falso, falta multiplicar por 2.

Ejercicio 8: Decir el polinomio que cumple las siguientes propiedades

a) El polinomio P(x) cumple:
- (i) Solo tiene dos raices:
  - · El -1 es una raiz simple (multiplicidad 1)
  - · El 2 es una raiz doble (multiplicidad 2)
- (ii) Es de grado 3
- (iii) El coeficiente de mayor grado es 2

b) El polinomio Q(x) cumple.
- (i) Solo tiene dos raices:
  - · El 3 es una raiz simple (multiplicidad 1)
  - · El -2 es una raiz simple (multiplicidad 1)
- (ii) Es divisible por x^2+1
- (iii)El coeficiente de mayor grado es 1
- (iv) De todos los posibles es el de menor grado

a) $P(x)=2\cdot(x+1)\cdot(x-2)^2$

b) $Q(x)=(x-3)\cdot(x+2)\cdot(x^2+1)$

Ejercicio 9: Decir el valor de a para que $x^3+3x^2+3ax+1$ sea divisible por (x+1)

$P(-1)=-1+3-3\cdot a+1=0 \rightarrow a=1$

4. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

4.1. Máximo común divisor

Definición: el máximo común divisor de 2 o más polinomios es otro polinomio que cumple:

a) es divisor de todos ellos

b) de todos ellos es el de mayor grado con coeficiente de mayor grado igual a la unidad.

Veamos como calcular el máximo común divisor:

1) descomponer factorialmente cada polinomio en polinomios irreducible

2) el máximo común divisor es el polinomio cuya descomposición factorial está formada por los polinomios irreducibles comunes a todos los polinomios con menor exponente.

Ejemplo:

mcd $(x^2-1, x^2+2x+1,x^2+3x+2)=(x+1)$

$x^2-1=(x+1)(x-1)$
$x^2+2x+1=(x+1)^2$
$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$

4.2. Mínimo común múltiplo

Definición: mínimo común múltiplo de dos o más polinomios es otro polinomio que cumple:

a) es un polinomio múltiplo de todos los polinomios

b) de todos los polinomios múltiplos es aquel que tiene menor grado con coeficiente de mayor grado unidad.

Veamos como calcular el mínimo común múltiplo:

1) descomponer factorialmente cada polinomio en polinomios irreducible

2) el mínimo común múltiplo es el polinomio cuya descomposición factorial está formada por los polinomios irreducibles comunes y no comunes a todos los polinomios con mayor exponente.

Ejemplo:

mcm$(x^2-1, x^2+2x+1,x^2+3x+2)=(x+1)^2\cdot(x-1)\cdot(x+2)=x^4+3x^3+x^2+-3x-2$

$x^2-1=(x+1)(x-1)$
$x^2+2x+1=(x+1)^2$
$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$

Ejercicio 10: calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes polinomios:

a) $p(x)=x^4-3x^2+2x$, $q(x)=x^3+3x^2-4$

$p(x)=x\cdot(x-1)^2\cdot(x+2)$

$q(x)=(x-1)\cdot(x+2)^2$

$mcm(p(x),q(x))=(x-1)^2\cdot(x+2)^2\cdot x=x^5+2x^4-3x^3-4x^2+4x$

$mcd(p(x),q(x))=(x-1)\cdot(x+2)=x^2+x-2$

b) $p(x)=x^5-x^3-x^2+1$, $q(x)=x^4-2x^3-x^2+2x$

$p(x)=(x+1)^2\cdot(x-1)\cdot(x^2+x+1)$

$q(x)=x\cdot(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-2)$

$mcm(p(x),q(x))=x\cdot(x+1)^2\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x^2+x+1)=x^7-2x^6-x^5+x^4+2x^3+x^2-2x$

$mcd(p(x),q(x))=(x+1)\cdot(x-1)=x^2-1$

5. Fracciones algebraicas

5.1. Definición

Definición : se llama fracción algebraica al cociente de dos polinomios, es decir de la forma $\frac{Px)}{Q(x)}$.

Ejemplos: $\frac{2x+3}{x^2+x-1}, \frac{2}{x+1}, \frac{2x+5}{x^3-x^2+3}$

Las fracciones algebraicas se comportan de forma semejante a las fracciones numéricas como veremos en siguientes apartados.

5.2. Simplificación

Si el numerador y el denominador de una fracción algebraica se pueden dividir por el mismo polinomio (es decir son múltiplos de este polinomio) al dividirlos se simplifica la fracción.

Ejemplo: $\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-2x+1} \underset{:(x-1)}{=} \frac{x^2-x-2}{x-2}$

Si dividimos numerador y denominador por el máximo común divisor de los dos polinomios se obtiene la fracción irreducible.

Ejemplo: $\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^3-x^2-x+1}=\frac{(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+3)}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{x+3}{x-1}$

5.3. Reducción a común denominador

Al multiplicar numerador y denominador de una fracción por el mismo polinomio se obtiene una fracción equivalente. Si tenemos varias fracciones y queremos obtener fracciones equivalentes con el mismo denominador tenemos dos opciones poner como denominador el producto de los dos denominadores o el mínimo común múltiplo de ambos.

Ejemplos:

$$\frac{x+7}{x},\frac{x^2+3}{x^2+x},\frac{x^2-1}{x+1}\rightarrow\frac{(x+7)\cdot(x+1)}{x^2+x},\frac{x^2+3}{x^2+x},\frac{(x^2-1)\cdot x}{x^2+x}\rightarrow\frac{x^2+8x+7}{x^2+x},\frac{x^2+3}{x^2+x},\frac{x^3-x}{x^2+x}$$

$$\frac{x^2-3x+5}{x^2-3x+2},\frac{x-1}{x+3}\rightarrow\frac{(x^2-3x+5)\cdot(x+3)}{(x^2-3x+2)\cdot(x+3)},\frac{(x-1)\cdot(x^2-3x+2)}{(x^2-3x+2)\cdot(x+3)}\rightarrow\frac{x^3-4x+15}{x^3-7x+6},\frac{x^3-4x^2+5x-2}{x^3-7x+6}$$

5.4. Operaciones

Suma y resta: se reduce a común denominador y se suman o restan los numeradores

Ejemplo: $\frac{x+7}{x}-\frac{x^2+x}{x^2-x}=\frac{(x+7)\cdot(x-1)}{x^2-x}-\frac{x^2+x}{x^2-x}=\frac{x^2+6x-7-(x^2+x)}{x^2-x}=\frac{5x-7}{x^2-x}$

Producto: el resultado es una fracción algebraica cuyo numerador es el producto de los numeradores y su denominador el producto de los denominadores.

Ejemplo: $\frac{x+1}{x-3}\cdot\frac{x-2}{x}=\frac{(x+1)\cdot(x-2)}{(x-3)\cdot x}=\frac{x^2-x-2}{x^2-3x}$

División: es una fracción algebraica donde el numerador es igual al producto del numerador de la primera por el denominador de la segunda y el denominador es igual al producto del denominador de la primera por el numerador de la segunda.

Ejemplo: $\frac{x+1}{x-3}:\frac{x-2}{x}=\frac{(x+1)\cdot x}{(x-3)\cdot(x-2)}=\frac{x^2+x}{x^2-5x+6}$

Nota: cuando multiplicamos o dividimos, muchas veces al igual que con las fracciones numéricas estas pueden ser simplificables. Para que sea más sencilla la simplificación es mejor factorizar primero los polinomios, y luego simplificar, antes de multiplicar. Veamos un ejemplo:

$$\frac{x^4-2x^3-4x^2+2x+3}{x^3-25x}\cdot\frac{x^3+7x^2+10x}{x^3-6x^2+11x-6}=\frac{(x+1)^2\cdot(x-1)\cdot(x-3)}{x\cdot(x-5)\cdot(x+5)}\cdot\frac{x\cdot(x+5)\cdot(x+2)}{(x-1)\cdot(x-3)\cdot(x-2)}=$$

$$=\frac{(x+1)^2\cdot\cancel{(x-1)}\cdot\cancel{(x-3)}}{\cancel{x}\cdot(x-5)\cdot\cancel{(x+5)}}\cdot\frac{\cancel{x}\cdot\cancel{(x+5)}\cdot(x+2)}{\cancel{(x-1)}\cdot\cancel{(x-3)}\cdot(x-2)}=\frac{(x+1)^2\cdot(x+2)}{(x-5)(x-2)}=\frac{x^3+4x^2+5x+2}{x^2-7x+10}$$

Ejercicios finales

Ejercicio 11. Factorizar los siguientes polinomios:

a) $x^2-6x-7=(x+1)\cdot(x-7)$
b) $x^2+12x+35=(x+5)\cdot(x+7)$
d) $2x^3+2x^2-24x=2\cdot x\cdot(x-3)\cdot(x+4)$
f) $3x^3-9x^2-30x=3\cdot x\cdot(x+2)\cdot(x-5)$

Ejercicio 12. Comprobar si las siguientes fracciones son equivalentes

Dos métodos, haremos cada apartado por uno.

a) $\frac{x-3}{2x-6}$ y $\frac{1}{2}$ → si son equivalentes se cumple $(x-3)\cdot 2=(2x-6)\cdot 1$ → $2x-6=2x-6$. Si son equivalentes

b) $\frac{x^2}{x^2+x}$ y $\frac{1}{x}$ → factorizamos y simplificamos $\frac{x^2}{x\cdot(x+1)}=\frac{x}{x+1}$ y $\frac{1}{x}$ → No son equivalentes

Ejercicio 13. A partir de los productos notables simplifica

a) $\frac{x^2-1}{x+1}=\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x+1}=x-1$

b) $\frac{x^2-25}{x^2+25-10x}=\frac{(x+5)\cdot(x-5)}{(x-5)^2}=\frac{x+5}{x-5}$

c) $\frac{x^2-1}{x^4-1}=\frac{(x+1)\cdot(x-1)}{(x^2-1)\cdot(x^2+1)}=\frac{1}{x^2+1}$

Ejercicio 14. Decir las raíces de los siguientes polinomios

a) $P(x)=(x+5)^2\cdot(2x-3)\cdot x$ → x=0, x=-5(doble) y x=3/2
b) $Q(x)=(x-2)\cdot(x^2+1)$ → x=2
c) $R(x)=3x\cdot(x^2+5)$ → x=0
d) $S(x)=2x^2(x-7)$ → x=0 (doble) y x=7

Ejercicio 15. Opera y simplifica

a) $\left(\frac{3}{x}-\frac{x}{3}\right):\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{9-x^2}{3x}\right):\left(\frac{3+x}{3x}\right)=\frac{(9-x^2)\cdot(3x)}{3x\cdot(3+x)}=\frac{(3+x)(3-x)}{(3+x)}=3-x$

b) $\left[\left(x+\frac{1}{x}\right):\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]\cdot(x-1)=\left[\left(\frac{x^2}{x}+\frac{1}{x}\right):\left(\frac{x^2}{x}-\frac{1}{x}\right)\right]\cdot(x-1)=\left[\frac{x^2+1}{x}:\frac{x^2-1}{x}\right]\cdot(x-1)=\frac{x^2+1}{x+1}$

c) $\left(\frac{x-1}{x^2}+\frac{3}{x}-\frac{5}{x-4}\right)\cdot 2x^2=\left(\frac{(x-1)\cdot(x-4)}{x^2(x-4)}+\frac{3\cdot x\cdot(x-4)}{x^2(x-4)}-\frac{5x^2}{x^2(x-4)}\right)\cdot 2x^2=$

$$=\left[\frac{(x^2+1)\cdot x}{(x^2-1)\cdot x}\right]\cdot(x-1)=\left[\frac{x^2+1}{x^2-1}\right]\cdot(x-1)=\frac{(x^2+1)\cdot(x-1)}{x^2-1}=\frac{x^2+1}{x+1}=$$

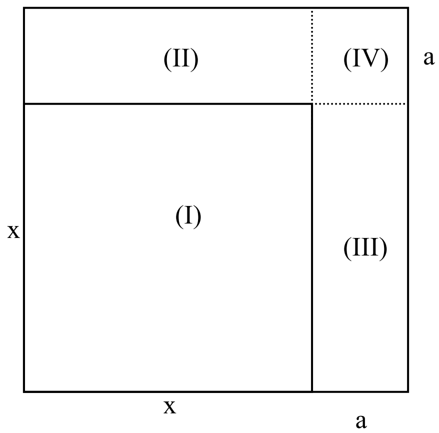
$$=\left(\frac{x^2-5x+4+3x^2-12x-5x^2}{x^2(x-4)}\right)\cdot 2x^2=\frac{-x^2-17x+4}{x^2(x-4)}\cdot 2x^2=\frac{-2x^2-34x+8}{x-4}$$

Ejercicio 16. Calcular en cada caso el polinomio oculto para que las fracciones sean equivalentes

a) $\frac{x^2-x}{x^2-1}=\frac{---}{x+1}\rightarrow P(x)=\frac{(x^2-x)\cdot(x+1)}{x^2-1}=\frac{x^2-x}{x-1}=\frac{x(x-1)}{x-1}=x$

b) $\frac{x}{2x+1}=\frac{x^2}{---}\rightarrow P(x)=\frac{x^2(2x+1)}{x}=x(2x+1)=2x^2+x$

Ejercicio 17. El lado x de un cuadrado aumenta en a cm. Formándose otro cuadrado. Suma las áreas de los rectángulos y cuadrados de la figura y comprueba que obtienes el área del cuadrado de lado x+a



Área cuadrado (I) = x^2

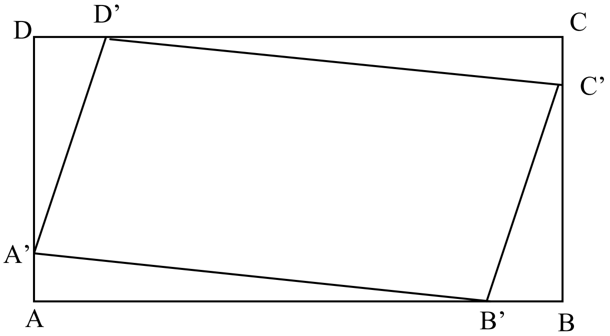
Área cuadrado (IV)= a^2

Área rectángulo (II)=xa

Área rectángulo (III)=ax

Área total = $x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$

Ejercicio 18. Calcula el área del cuadrilátero A'B'C'D' mediante un polinomio en x, sabiendo que AB=3cm, BC=5cm y AA'=BB'=CC'=DD'=x



área (A'B'C'D')=area(ABCD)-2·area(BB'C')-2· area(CC'D')=$3\cdot 5-2\cdot\frac{1}{2}\cdot x\cdot(3-x)-2\cdot\frac{1}{2}\cdot x\cdot(5-x)=15-(3x-x^2)-(5x-x^2)=15-8x+2x^2$

Ejercicio 19. Hallar el mcd y el mcm

a) $x^2;\ x^2-x;\ x^2-1 \rightarrow x^2=x^2;\ \ x^2-x=x\cdot(x-1);\ x^2-1=(x+1)\cdot(x-1)$
$\text{mcd}(x^2;\ x^2-x;\ x^2-1)=1$
$\text{mcm}(x^2;\ x^2-x;\ x^2-1)=x^2\cdot(x-1)\cdot(x+1)=x^4-x^2$

b) $2x;\ 2x+1;\ 4x^2-1 \rightarrow 2x=2\cdot x;\ 2x+1=2\cdot(x+1/2);\ \ 4x^2-1=4\cdot(x^2-1/4)=4\cdot(x+1/2)\cdot(x-1/2)$
$\text{mcd}(2x;\ 2x+1;\ 4x^2-1)=1$
$\text{mcm}(2x;\ 2x+1;\ 4x^2-1)=x\cdot(x+1/2)\cdot(x-1/2)=x^3-\frac{1}{4}x$

Ejercicio 20. Efectúa:

a) $\frac{x-2}{x^2}+\frac{x+2}{x^2-x}-\frac{1}{x^2-1}=\frac{(x-2)\cdot(x^2-1)+(x+2)\cdot x-x^2}{x^2(x-1)(x+1)}=\frac{x^3-2x^2+x+2}{x^2(x^2-1)}$

b) $\left(1-\frac{x-1}{x}\right)\cdot\frac{x^2}{x+3}-1=\left(\frac{x}{x}-\frac{x-1}{x}\right)\cdot\frac{x^2}{x+3}-1=\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{x+3}-1=\frac{x}{x+3}-1=\frac{x-(x+3)}{x+3}=-\frac{3}{x+3}$

Ejercicio 21.Calcula m para que el polinomio P(x)=x^3-mx^2+5x-2 sea divisible por (x+1)

Si es divisible por (x+1) entonces-1 es raíz de P(x) es decir P(-1)=-1-m-5-2=0 → m=-8

Ejercicio 22. Calcular el valor de K si el resto de la división de ($2x^4+kx^3-7x+6$):(x-2) es -8

Resto=P(2)=32+8k-14+6=-8 → 8k=-32 k=-4

Ejercicio 23. Calcular m para que P(x)=$mx^3-3x^2+5x+9m$ sea divisible por (x+2)

Si P(x) divisible por (x+2) entonces P(-2)=0 → -8m-12-10+9m=0 → m=22

Ejercicio 24. Escribir los polinomios de segundo grado con siguientes raíces

a) 5 y -5 → P(x)=(x-5)·(x+5)=x^2-25

b) 0 y 4 → P(x)=x·(x-4)=x^2-4x

c) 2 y 3 → $P(x)=(x-2)\cdot(x-3)=x^2-5x+6$

d) -6 y 1 → $P(x)=(x+6)\cdot(x-1)=x^2+5x-6$

Ejercicio 25. Escribir polinomio de segundo grado cuya única raíz sea 3

$P(x)=(x-3)^2$

Ejercicio 26. Escribir polinomio de segundo grado sin raíces

$P(x)=x^2+2x+7$

Ejercicio 27. Inventa dos polinomios P(x) y Q(x) tal que $mcm(P(x),Q(x))=x^2(x-3)(x+2)$

$P(x)=x\cdot(x-3)$, $Q(x)=x^2\cdot(x+2)$

Ejercicio 28. Inventa dos polinomios P(x) y Q(x) tal que $mcd(P(x),Q(x))=x^2-4$

$P(x)=(x^2-4)\cdot x$; $Q(x)=(x^2-4)\cdot(x+1)$

Ejercicio 29. ¿Qué relación existe entre el mcd(P(x),Q(x)) y mcm(P(x),Q(x))?

El mcm(P(x),Q(x)) es múltiplo del mcd(P(x),Q(x)). Ya que el mcm tiene los polinomios irreducibles, comunes y no comunes con mayor exponente, y el mcd sólo los comunes y con menor exponente.