Tema 4. Ecuaciones e Inecuaciones.

1. Ecuaciones con una incógnita.

En mucha de las situaciones de la vida diaria se plantean problemas que se pueden resolver a partir de ecuaciones. Por ejemplo, si queremos saber el lado de un jardín cuadrado de $100m^2$:

x=lado → área=x^2=$100m^2$ → x=$\sqrt{100m^2}=10m$

1.1 Ecuaciones de primer grado

Son las mas sencillas de resolver, a partir de las operaciones de simplificación obtendremos una expresión de la forma

a·x+b=0 donde a y b son números reales. Cuya solución es única **x=-b/a**

Ejemplo:

$\frac{3(x+1)}{2}-x=\frac{x-4}{3}$ → $\frac{9(x+1)}{6}-\frac{6x}{6}=\frac{2\cdot(x-4)}{6}$ → *9x+9-6x=2x-8* → *x=-17*

Comprobación: $\frac{3(-17+1)}{2}-(-17)=\frac{-17-4}{3}$ → $-24+17=-7$

Ejercicio 1. Resolver**:**

a) $\frac{x-3}{2}+7=x-\frac{5-x}{3}$

b) $\frac{-3(5-x)}{10}-\frac{3x}{2}=7-\frac{5x}{3}$

1.2 Ecuaciones de segundo grado

Después de operar la expresión simplificada de ecuaciones de segundo grado es de la forma:

a·x²+bx+c=0.* → *solución: $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2\cdot a}$

Podemos ver que según el signo del ***discrimínate*** $\Delta=b^2-4ac$ podemos tener 1,2 o ninguna solución:

a) Δ>0 dos soluciones $x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}$, $x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}$

b) Δ=0 una solución $x=\frac{-b}{2\cdot a}$ (raíz doble)

c) Δ<0 ninguna solución real (números complejos)

Resolución de ecuaciones incompletas (b o c nulas). Se pueden resolver por el método general, pero también se puede resolver de manera más sencilla. Veamos los dos casos:

1) $ax^2+c=0 \rightarrow x^2=-\frac{c}{a} \rightarrow x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ $\begin{cases} si\ \frac{c}{a}>0\ no\,solución \\ si\ \frac{c}{a}<0\ 2\,soluciones \end{cases}$
2) $ax^2+bx=0 \rightarrow x(ax+b)=0 \rightarrow x=0,\ x=-b/a$. Siempre dos soluciones

Ejercicio 2. Resolver**:**

a) $x^2-6\sqrt{2}x+18=0$
b) $2x^2-7x+3=0$
c) $\frac{x+7}{x+3}+\frac{x^2-3x+6}{x^2+2x-3}=1$
d) $\frac{x+1}{x+5}+\frac{1-x}{x-4}=\frac{5}{2}$
e) $(x-\sqrt{3})^2-1+x=x$
f) $1+(x-2)^2=1$
g) $9x^2-25=0$
h) $x^2-2x=0$

1.3 Ecuaciones bicuadradas

Ecuaciones polinómicas de 4º grado sin términos impar, es decir de la forma:

$ax^4+bx^2+c=0$. con $a,b,c\in R$

Procedimiento para resolver las ecuaciones bicuadráticas:

1. Cambio variable: $x^2=t$, luego $x^4=t^2 \rightarrow at^2+bt+c=0$
2. Resolver la ecuación de segundo grado en t.
3. Soluciones son las raíces cuadradas de las soluciones en t (deshacer cambio variable). $x=\pm\sqrt{t}$.

El número de posibles soluciones son:

a) 0 soluciones, o no soluciones en t o son negativas.
b) 2 soluciones distintas
c) 2 soluciones dobles
d) 4 soluciones distintas

Ejemplo: $x^4-5x^2+4=0$

Paso1: $x^2=t \rightarrow t^2-5t+4=0$

Paso2: $t=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm 3}{2}=\left\langle\begin{matrix}4\\1\end{matrix}\right.$

Paso3 : $x=2,-2,1,-1$

Ejercicio 3 : Resolver las siguientes ecuaciones bicuadráticas.

a) $x^4-x^2-6=0$
b) $x^4-3x^2+2=0$
c) $-x^4-4x^2-45=0$

1.4 Ecuaciones polinómicas

Las ecuaciones polinómicas son expresiones de la forma p(x)=0 con p(x) un polinomio. Consiste en obtener los valores de x que anulan el polinomio, es decir las raíces. Las formas de proceder a calcular las soluciones son las mismas que las de obtener las raíces, vistas en el tema anterior (Ruffini, factor común, ecuaciones de 2º grado…)

Ejemplos:

$x^3+x^2=0 \rightarrow x^2(x+1)=0 \rightarrow x=0$ (doble) y $x=-1$

$x^5-3x^4-8x^3+12x^2+16x=0 \rightarrow x\cdot(x-4)\cdot(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x+1)=0 \rightarrow x=0, x=-2, x=2, x=-1, x=4$

Ejercicio 4. Resolver:

a) $(x+\pi)\cdot(x-1/2)\cdot(3x-7)=0$

b) $x^2\cdot(x-\sqrt{2})\cdot(5x+1)=0$

c) $4x^5+20x^4-53x^3+23x^2+13x-7=0$

1.5 Ecuaciones con radicales.

En este apartado veremos ecuaciones con raíces o con radicales. El objetivo a la hora de resolver estas ecuaciones es eliminar la raíz. Tres casos:

a) Si tenemos una única raíz tendremos que aislarla a un lado de la igualdad, tomando cuadrados ambos de la igualdad desaparecerá la raíz.
b) Si tenemos dos raíces y ningún otro factor dejamos una a cada lado de la igualdad y elevamos al cuadrado
c) Si tenemos dos raíces otro más factor sumando, tendremos que aislar una raíz, hacer el cuadrado y repetir el procedimiento para la otra raíz.

Una vez obtenidas las ***soluciones*** tendremos que ***comprobar*** que estas lo son realmente, ya que al elevar al cuadrado se introducen soluciones inexistentes.

Nota: la razón de que al elevar al cuadrado haya soluciones no válidas es que el signo al cuadrado se pierde, así $1\neq-1$ pero $(1)^2=(-1)^2$

Ejemplos:

1) $\sqrt{3x+4}-4=-2x \rightarrow \sqrt{3x+4}=4-2x \xrightarrow{\text{elev cuadrado}} 3x+4=(4-2x)^2$

$3x+4=16+4x^2-16x \rightarrow 4x^2-19x+12=0 \quad x=\begin{cases}4\\ 3/4\end{cases}$

Comprobación:

$x=4 \rightarrow \sqrt{16}-4\neq-8$ (no solución)

$x=3/4 \rightarrow \sqrt{\frac{25}{4}}-4=\frac{5}{2}-4=-\frac{3}{2}=-2\cdot\frac{3}{4}$ (solución)

2) $\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2+5}=0 \rightarrow \sqrt{x^2+3x-1}=\sqrt{x^2+5} \xrightarrow{el\,cuadrado} x^2+3x-1=x^2+5$
3x=6 → x=2
Comprobación:
x=2→ $\sqrt{2^2+3\cdot 2-1}-\sqrt{2^2+5}=\sqrt{9}-\sqrt{9}=0$ solución.

Ejercicio 5. Resolver**:**

a) $4x+2\sqrt{x+4}=4$

b) $x^2+\sqrt{4x^2-3}=0$

c) $x-\sqrt{x}=2$

1.6 Ecuaciones de fracciones polinómicas.

Son ecuaciones de suma y resta de fracciones polinómica. La forma de resolver estas ecuaciones se realiza siguiendo los siguientes pasos:

Paso 1: Se expresan todas las fracciones con común denominador a ambos lados de la igualdad

Paso 2: se igualan los denominadores y se resuelve dicha ecuación.

Paso 3: se comprueban las soluciones. En caso de que alguna de las soluciones anule algún denominador esta no será válida.

Ejemplo: $\frac{2x-2}{x-2}+\frac{x}{x+1}-\frac{x-2}{x+2}=\frac{5}{6}$

Paso 1:

$$\frac{6(2x-2)(x+1)(x+2)}{6(x-2)(x+1)(x+2)}+\frac{6x(x-2)(x+2)}{6(x-2)(x+1)(x+2)}-\frac{6(x-2)(x+1)(x-2)}{6(x-2)(x+1)(x+2)}=\frac{5(x-2)(x+1)(x+2)}{6(x-2)(x+1)(x+2)}$$

Paso 2
$12\cdot x^3+42\cdot x^2-36\cdot x-48=5\cdot x^3+5\cdot x^2-20\cdot x-20 \rightarrow 7\cdot x^3+37\cdot x^2-16\cdot x-28=0$

Soluciones: x=1, x=$\frac{-22\pm 12\sqrt{2}}{7}$

Paso 3: Las 3 soluciones son validas porque para estos valores de x no se anula ningún denominador.

Ejercicio 6. Resolver**:**

a) $\frac{2}{x}-\frac{2-x}{x+3}=1$

b) $\frac{x}{x+1}+\frac{2}{x+2}=3$

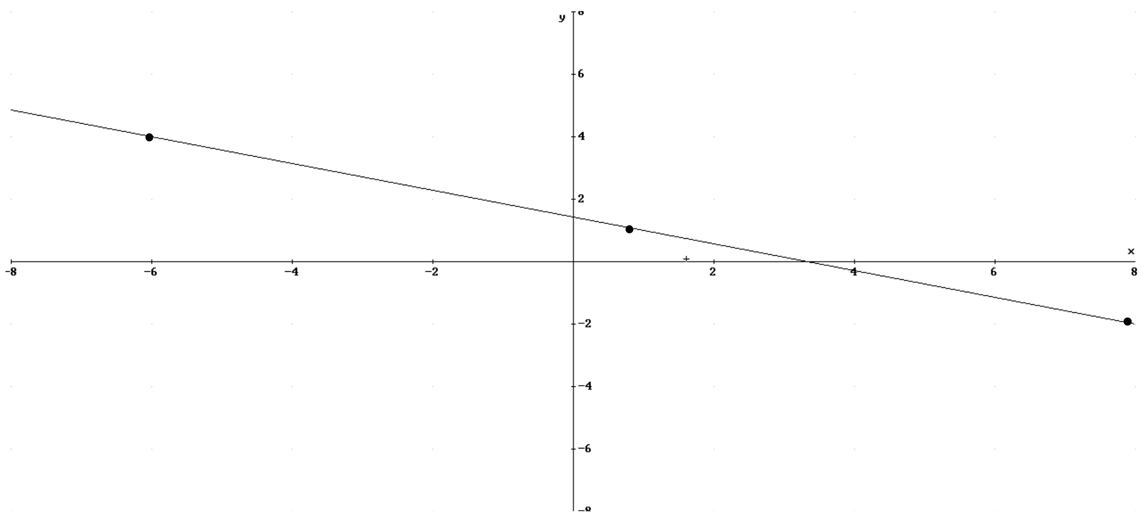
2. Ecuaciones lineales con dos incógnitas

Las ecuaciones lineales con dos incógnitas son de la forma **ax+by=c**, se caracterizan por tener infinitas soluciones para las dos variables (x,y) situadas sobre una recta.

Ejemplo: **3x+7y=10,** despejamos una variable (cualquiera de las dos) $x=\frac{10-7y}{3}$, damos valores a la variable no despejada y obtendremos valores de la despejada. Como es una recta si lo hacemos correctamente con dos valores sería suficiente, ya que por dos puntos pasa una única recta.

x	y
1	1
-6	4
8	-2

Representamos las soluciones:



Ejercicio 7. Representa las soluciones de las siguientes ecuaciones

a) –x+y=1

b) √3x+5y=√3

c) -7x+3y=-5

3. Sistemas de ecuaciones

3.1. Dos ecuaciones lineales

Los sistemas con dos ecuaciones lineales son de la forma:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ ax+by=c \\ (2)\ a'x+b'y=c'\end{array}\right\}$$

Las soluciones al sistema serán las soluciones comunes a la ecuación lineal con dos incógnitas de la ecuación primera (S_1) y las soluciones de la segunda ecuación (S_2). De esta forma si llamamos S a las soluciones del sistema, estas serán igual a

$S=S_1\cap S_2$

3.1.1. Soluciones. Interpretación gráfica de las soluciones.

Según el número de soluciones se puede distinguir entre los siguientes tipos de sistemas:

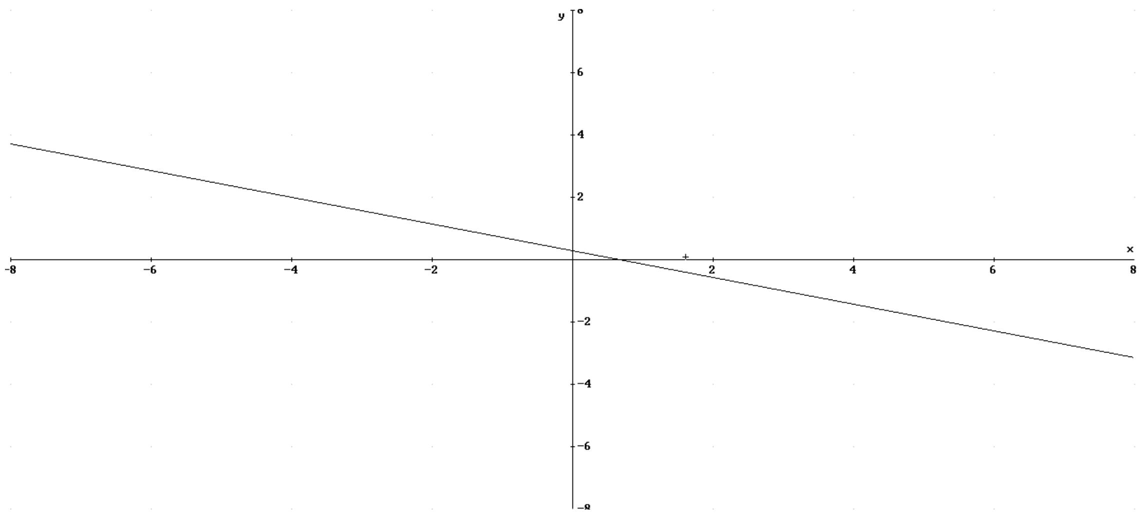
1. Sistema compatible indeterminado, infinitas soluciones

Ocurre cuando la ecuación (1) es equivalente a la (2), se cumple entonces:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

Ejemplo: $\left.\begin{array}{l}(1)\ 3x+7y=2\\(2)\ -6x-14y=-4\end{array}\right\}(2)\equiv(1)\rightarrow\frac{3}{-6}=\frac{7}{-14}=\frac{2}{-4}$

Si representamos las dos ecuaciones se trata de dos rectas iguales, por tanto las soluciones son todos los puntos situados en la recta que viene determinada por la ecuación (1) o (2). En nuestro ejemplo:



2. Sistema incompatible, no tiene soluciones

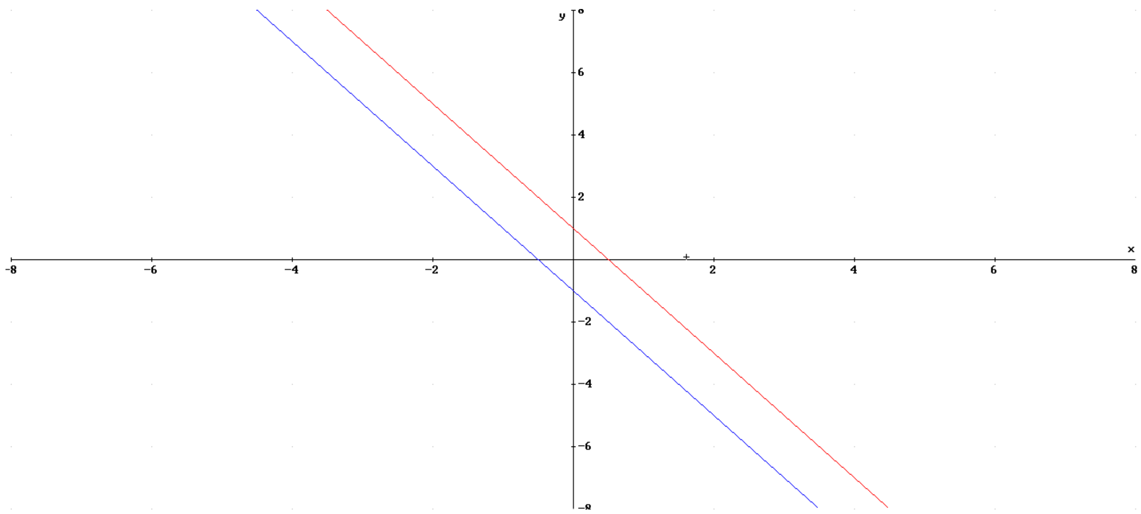
Ocurre cuando las dos ecuaciones son incompatibles, es decir tienen ninguna solución en común. Ocurre cuando la relación entre sus coeficientes son los siguientes:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$$

No tiene soluciones, al tratarse de dos rectas paralelas. Veamos un ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ 2x+y=1\\(2)\ 4x+2y=-2\end{array}\right\}\rightarrow\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\neq\frac{1}{-2}.$$

Interpretación gráfica:



3. Compatible determinado, una única solución.

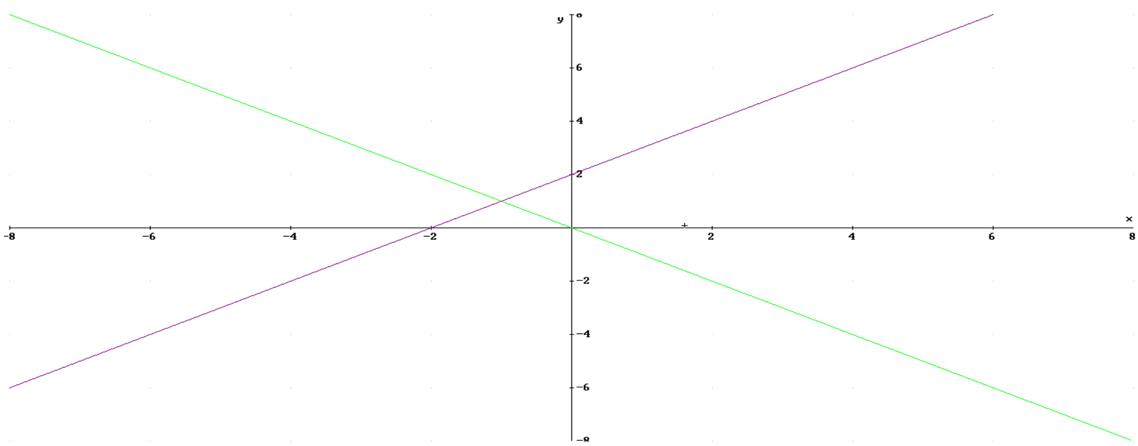
Ocurre cuando tienen una única solución. Gráficamente ocurre cuando las dos rectas se cortan en un único punto que será la solución a las dos ecuaciones. Ocurre si la relación entre los coeficientes:

$$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$$

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ x+y=0 \\ (2)\ -x+y=2\end{array}\right\} \frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1} \rightarrow comp \text{ det}$$

Se resuelven por los métodos de reducción, igualación y sustitución vistos el año pasado.



3.1.2. Resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales

Resolver un sistema es hallar sus soluciones, según el tipo de sistema tendremos:

1. ***Compatibles indeterminados:*** la solución es la de una de las dos ecuaciones, que resolvemos como hemos visto en el apartado anterior representando una recta.
2. ***Incompatibles:*** no tienen solución, por lo que no tendremos que resolverlas
3. ***Compatibles determinados:*** tiene una única solución que resolvemos por uno de los tres métodos vistos en el curso anterior. Veamos un ejemplo y resolvámoslo por los tres métodos:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\,x+y=1\\(2)\,x-y=0\end{array}\right\}$$

a) Sustitución: igualamos una incógnita en una ecuación y la introducimos en la otra ecuación, obteniendo una ecuación de primer grado con una incógnita:

y=1-x → x-(1-x) =0; 2x=1; x=1/2; y=1-1/2=1/2 → ***solución; x=1/2, y=1/2***

b) Igualación: consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones para luego igualarlas entre si y obtener una ecuación con una incógnita:

y=1-x; y=x → 1-x=x; 2x=1→ ***solución x=1/2; y=1/2***

c) Reducción: consiste en sumando o restando las ecuaciones multiplicadas por factores se anula alguna incógnita, la x o la y. Así obtenemos una ecuación de primer grado con una incógnita:

(1)+(2) → 2x=1, x=1/2, y=1-1/2=1/2 → ***solución x=1/2; y=1/2***

Ejercicio 8. Resuelve, clasifica e interpreta gráficamente las soluciones de los siguientes sistemas:

a) $$\left.\begin{array}{l}(1)\,3x-2y=1\\(2)\,6x-4y=2\end{array}\right\}$$

b) $$\left.\begin{array}{l}(1)\;\;4x-y=5\\(2)\,-8x+2y=3\end{array}\right\}$$

c) $$\left.\begin{array}{l}(1)\;\;x-3y=2\\(2)\;\;2x+y=4\end{array}\right\}$$

d) $$\left.\begin{array}{l}(1)\,-18x+6=6y\\(2)\,y+3x+5=6\end{array}\right\}$$

e) $$\left.\begin{array}{l}(1)\;\;\dfrac{x}{3}-2y=\dfrac{3}{4}\\(2)\;\;5x+y=0\end{array}\right\}$$

3.2. Sistemas no lineales con dos incógnitas

Estos sistemas son aquellos donde una o varias ecuaciones no son lineales, es decir aparecen términos cuadráticos, cúbico, etc. En este tema trataremos sólo cuando tenemos exponentes cuadráticos. Generalmente se resuelve por ***sustitución***. Veamos tres ejemplos:

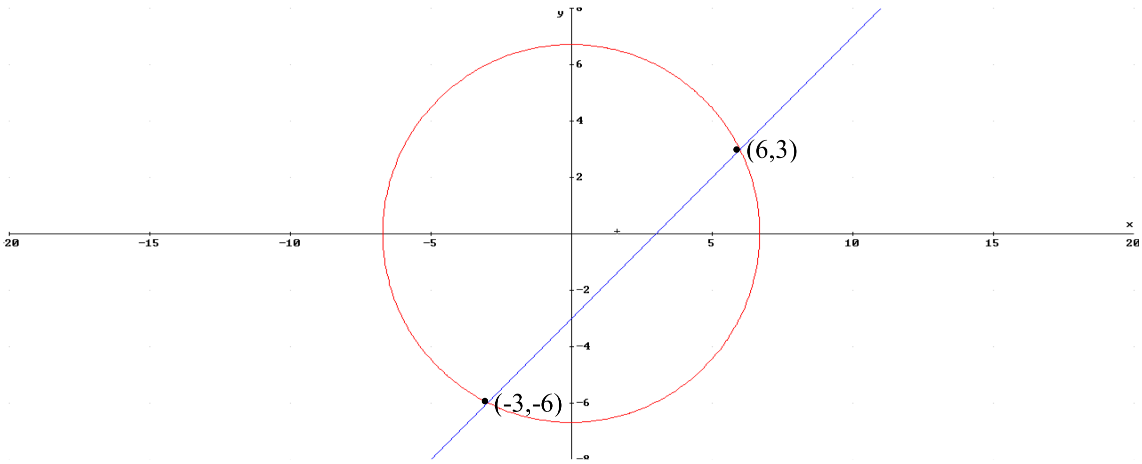
Ejemplo 1:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ x-y=3\\(2)\ x^2+y^2=45\end{array}\right\} \rightarrow x=3+y \text{ , sustituyendo en (2) } (3+y)^2+y^2=45;\ \ 2y^2+6y-36=0$$

$$y=\frac{-6\pm\sqrt{36+288}}{4}=\frac{-6\pm 18}{4}=\left\langle\begin{array}{l}-6\rightarrow x=3-6=-3\\ \\ 3\rightarrow x=3+3=6\end{array}\right. .$$

Dos soluciones (x=-3, y=-6); (x=6, y=3)

Para interpretar gráficamente la solución tendremos que saber que la ecuación de una circunferencia con centro en el origen y radio R es de la forma $x^2+y^2=R^2$. De esta forma la ecuación $x^2+y^2=45$, es una ecuación de una circunferencia de radio $R=\sqrt{45}$



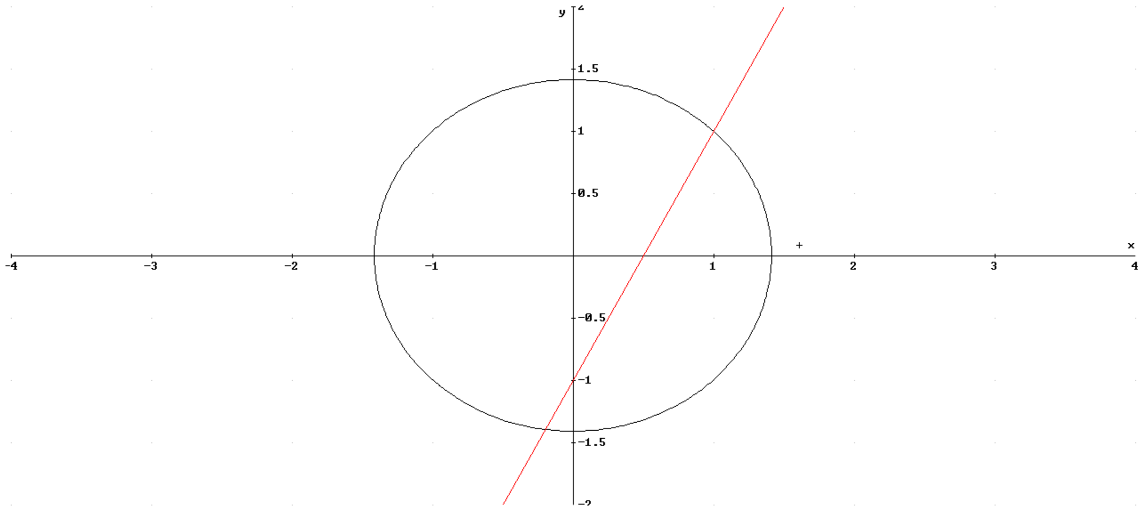
Ejemplo 2:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ y-x=-1+x\\(2)\ x^2+y^2=2\end{array}\right\} \rightarrow y=-1+2x \rightarrow x^2+(2x-1)^2=2;\ \ x^2+4x^2-4x+1-2=0$$

$$5x^2-4x-1=0 \rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16+20}}{10}=\frac{4\pm 6}{10}=\left\langle\begin{array}{l}1\rightarrow y=-1+2=1\\ \\ -1/5\rightarrow x=-1-2/5=-7/5\end{array}\right.$$

Soluciones (x=1, y=1); (x=$-1/5$, y=$-7/5$)

Interpretación gráfica (circunferencia de radio $\sqrt{2}$ y recta)



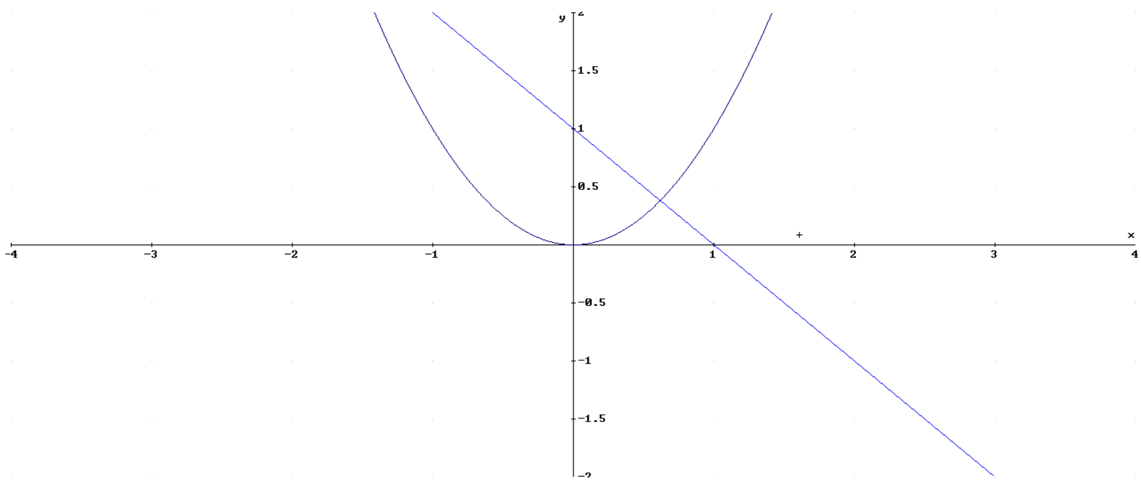
Ejemplo 3:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ y = x^2 \\ (2)\ \ y + x = 1\end{array}\right\} \rightarrow \quad y=1-x \quad \rightarrow \quad 1-x=x^2 \quad \rightarrow \quad x^2+x-1=0 \quad \rightarrow$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \rightarrow y = 1 - \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \rightarrow x = 1 - \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{array} \right.$$

Soluciones (x=$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, y=$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$) (x=$\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, y=$\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$)

Interpretación gráfica (y=x^2 es una parábola, y+x=1 una recta)



4. Inecuaciones lineales

Las inecuaciones son expresiones semejantes a las ecuaciones pero en vez de aparecer el signo = aparecen los signos $\leq, <, \geq, >$. Veamos diferentes tipos de inecuaciones

4.1. Inecuaciones lineales con una incógnita

Son expresiones de la forma (después de simplificar) de la forma:

ax+b<c , ax+b>c, ax+b≤c ó ax+b≥c siendo $a,b,c \in R$ y $a \neq 0$

Para resolver la inecuación hay que tener en cuenta las siguientes reglas:

a) Si un número está a un lado de la desigualdad y deseamos pasarla al otro lado pasará restando y al revés (igual que en las ecuaciones)

Ejemplo*:* $5x-2<6 \rightarrow 5x<6+2 \rightarrow 5x<8$

b) Si multiplicamos o dividimos la desigualdad por un número negativo entonces el signo $<$ o $\leq$ cambia a $>$ o $\geq$, y al revés. De esta forma si queremos despejar de x un número que le multiplica pasa dividiendo cambiando el sentido de la desigualdad si es un número negativo. Lo mismo pasa si está dividiendo

Ejemplos*:* $-3x<2 \rightarrow x>-2/3$

$-x/5\geq 2 \rightarrow x\leq -10$

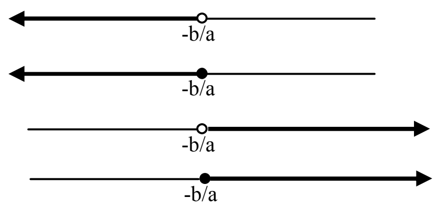
Despejando la x de la inecuación anterior tendremos las siguientes posibles expresiones:

$x<-b/a$ Solución=$(-\infty,-b/a)$

$x\leq -b/a$ Solución=$(-\infty,-b/a]$

$x>-b/a$ Solución=$(-b/a,\infty)$

$x\geq -b/a$ Solución=$[-b/a,\infty)$



Ejemplo: $3-5x< 8 \rightarrow -5x<8-3 \rightarrow -5x<5 \rightarrow x>-1 \quad x\in(-1,\infty)$

Ejercicio 9. Resolver las siguientes inecuaciones:

a) $2(x-2)+3x<5x+6$

b) $3x+7-5(2x-3)\geq(x-1)/2 -1$

c) $3\cdot(x-1)/2 -x > (x-3)/2$

4.2. Inecuaciones lineales con dos incógnitas

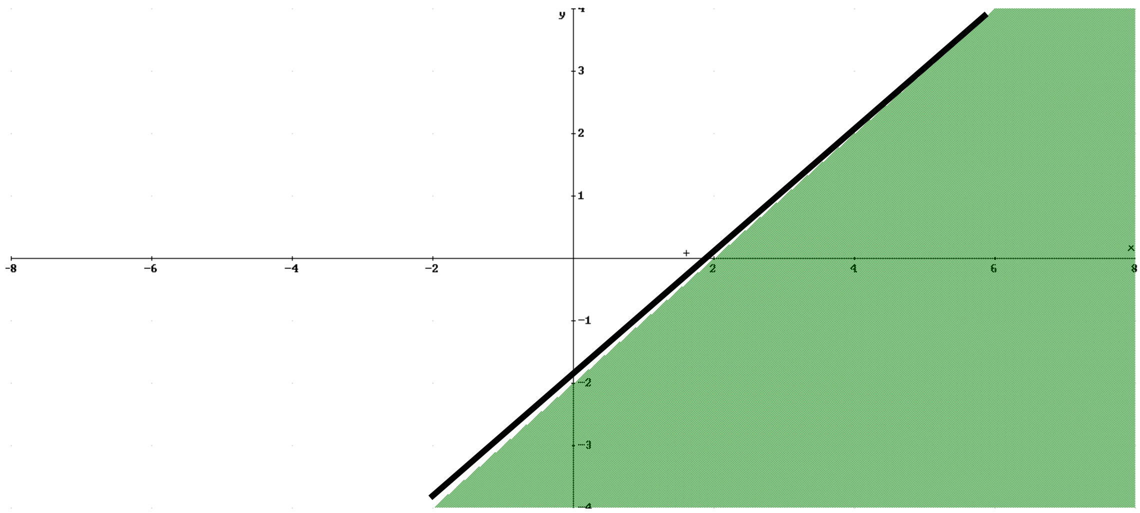
Una inecuación lineal con dos incógnitas es una expresión de la forma:

ax+by<c; ax+by>c; ax+by≤c ; ax+by≥c

Por lo general existen infinitos valores de parejas (x,y) que cumplen las soluciones a la inecuación lineal. Veremos las soluciones representadas en los ejes de coordenadas. Pasos a seguir para obtener las soluciones:

1. Representamos la recta determinada por ax+by=c. quedando dividido el plano en dos semiplanos (uno de ellos será la solución)
2. Tomamos un punto arbitrario con un valor de x e y. Si para estos valores de x y de y la inecuación es cierta, el semiplano que contiene el punto es la solución, sino es así es el otro semiplano
3. Si tenemos ≥ ó ≤ la recta será solución (que es la solución a la igualdad ax`by=c) si tenemos < ó > entonces la recta no será solución

***Ejemplo**:* x-y ≥ 2, representamos la recta y=x+2. Tomamos el punto (0,0) → 0-0 ≥2 que no cumple la inecuación, luego la solución es el semiplano que no contiene el origen. La recta es solución ya que el símbolo es ≥



Ejercicio 10. Resolver:

a) x+y<5

b) x-y ≤ 1

c) 2x-1/3 ≥x-y

4.3. Inecuaciones de segundo grado con una incógnita

Son expresiones que después de operar son de la forma:

$ax^2+bx+c<0,\ ax^2+bx+c>0;\ ax^2+bx+c\leq 0;\ ax^2+bx+c\geq 0$

Los pasos para la resolución de las inecuaciones son los siguientes:

1. Cálculo de las soluciones a la igualdad (raíces de ax^2+bx+c) que son x_1 y x_2
   a. Si son soluciones reales, factorizamos el polinomio $a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)<0$
      i. Dividimos la recta real en 3 intervalos(2 si es raíz doble) $(-\infty,x_1)$; (x_1,x_2) ; (x_2,∞). Estudiamos el signo en cada intervalo
      ii. Las soluciones son los intervalos que cumplen la desigualdad.

b. Si no son reales entonces ax^2+bx+c no cambia de signo, por lo que o es siempre positivo si c>0 o negativo si c<0. Así las soluciones serán o todo R o el vacío.

Ejemplos:

a) $x^2+x-6\leq 0$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\left\langle\begin{array}{l}-3\\2\end{array}\right.$$

$x^2+x-6\leq 0 \rightarrow (x+3)(x-2)\leq 0$

	(-∞,-3)	-3	(-3,2)	2	(2,∞)
Signo(x+3)	-	0	+	+	+
Signo(x-2)	-	-	-	0	+
Signo(x^2+x-6)	+	0	-	0	+

Solución $x\in[-3,2]$

b) $x^2+1<0$

$x^2=-1 \rightarrow$ no solución real.

x^2+1 siempre es positivo, por ejemplo en x=0: $0^2+1=1>0$

No soluciones S=∅

c) $x^2+1>0 \rightarrow x\in R$

Ejercicio 11. Resolver:

a) $x^2-6x+9>0$

b) $-3x^2-5x+2\leq 0$

c) $(x-3)^2\geq 4$

d) $(2x-1)/5>3x^2/2$

4.4. Inecuaciones polinómicas y fracciones algebraicas

4.4.1. Polinomios

En este apartado estudiaremos las inecuaciones del tipo:

$P(x)<0$, $P(x)>0$, $P(x)\leq 0$, $P(x)\geq 0$.

Resolución:

1. Factorizamos, obteniendo las raíces x_1, x_2, …,x_n
2. Estudiamos el signo en los intervalos $(-\infty,x_1)$, (x_1,x_2),…, (x_n,∞)
3. De los intervalos tomamos aquellos que solucionen la inecuación.

Ejemplo *:* $x^4+x^3+3x^2-11x-14\leq 0$; Factoriz→$(x+1)(x-2)(x^2+2x+7)\leq 0$.Raíces x=-1, x=2

	(-∞,-1)	-1	(-1,2)	2	(2,∞)
Signo(x+1)	-	0	+	+	+
Signo(x-2)	-	-	-	0	+
Signo(x^2+2x+7)	+	+	+	+	+
Signo($x^4+x^3+3x^2-11x-14$)	+	0	-	0	+

Solución $x\in[-1,2]$

Ejercicio 12. Resuelve

1) $-x^3-2x^2+x+2>0$
2) $-3x^3-24x^2-21x\leq 0$
3) $x^3-2x^2\leq x$

4.4.2. Inecuaciones de fracciones algebraicas

Las inecuaciones de fracciones algebraicas son expresiones de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}<0\ ;\ \frac{P(x)}{Q(x)}>0;\ \frac{P(x)}{Q(x)}\leq 0;\frac{P(x)}{Q(x)}\geq 0$$, siendo P(x) y Q(x) polinomios.

La forma de resolver estas inecuaciones es semejante a la de los polinomios. Los pasos son los siguientes:

1. Factorización de P(x) y de Q(x). Y simplificación de la fracción si coincide algún factor.
2. Estudiamos el signo en los intervalos comprendidos entre las raíces de P(x) y Q(X) que no han sido simplificadas
3. A partir de estudiar el signo de cada factor podemos determinar cuando la fracción algebraica es mayor, menor o igual que cero

Nota*: cuidado con las raíces del polinomio Q(x), ya que en estos valores* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *no se anula, sino que no existe (dividir por cero)*

Ejemplo: $\frac{x^2-1}{x^2+5x+6}\leq 0 \rightarrow \frac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x+3)}\leq 0$ → raíces son -3, -2, -1 y 1

	(-∞,-3)	-3	(-3,-2)	-2	(-2,-1)	-1	(-1,1)	1	(1,∞)
Sig(x+3)	-	0	+	+	+	+	+	+	+
Sig(x+2)	-	-	-	0	+	+	+	+	+
Sig(x+1)	-	-	-	-	-	0	+	+	+
Sig(x-1)	-	-	-	-	-	-	-	0	+
Sig($\frac{x^2-1}{x^2+5x+6}$)	+	No existe	-	No existe	+	0	-	0	+

Solución: x∈(-3,-2)∪[-1,1]

Ejercicio 13. Resolver las siguientes inecuaciones

a) $\frac{-x^2+6x-8}{x^2-4}\geq 0$

b) $\frac{2x^2+6x+10}{x^2-x}\leq 0$

5. Sistemas lineales de inecuaciones

5.1. Una incógnita

Los sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita son sistemas de la forma:

$$\left.\begin{array}{r}(1)\ ax+b\leq 0\\ (2)\ a'x+b'>0\end{array}\right\}$$ o con cualquier signo otro símbolo de desigualdad

La forma de resolver el sistema es el siguiente:

1. Obtenemos las soluciones de (1) y de (2), S_1 y S_2 respectivamente
2. Las soluciones del sistema tienen que ser de (1) y (2) luego es la intersección de sus soluciones $S=S_1\cap S_2$

Ejemplo: $\left.\begin{array}{r}(1)\ x+3>0\\ (2)\ 3x-6\geq 0\end{array}\right\}$

S_1→ x>-3 S_1=(-3,∞)

S_2→ 3x≥6; x≥2 S_2=[2,∞)

Solución $S=S_1\cap S_2$=[2,∞)

Ejercicio 14. Resolver

a) $\left.\begin{array}{l}(1)\ 5-3x \geq 4x+13 \\ (2)\ 2x+7 < 5x+11\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l}(1)\ 5(x-3) \leq -2+x \\ (2)\ 3x > 2x+1 \\ (3)\ \ x < 3\end{array}\right\}$

5.2. Dos incógnitas

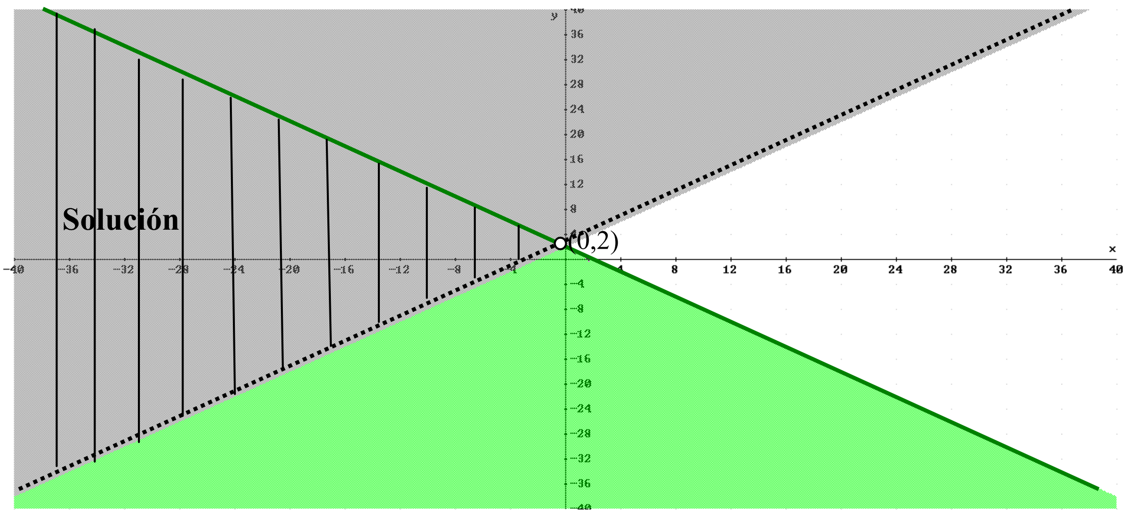
Son sistemas formados por dos o más inecuaciones con dos incógnitas (como los vistos en el apartado 4.2).

$\left.\begin{array}{l}(1)\quad ax+by \leq c \\ (2)\ a'x+b'y > c'\end{array}\right\}$ o con cualquier signo otro símbolo de desigualdad

Resolución de los sistemas:

1. Se representan en el plano cartesiano las soluciones de (1) y (2)
2. Las soluciones del sistema son la intersección de las soluciones a las dos inecuaciones

Ejemplo: $\left.\begin{array}{l}(1)\qquad x+y \leq 2 \\ (2)\ -2x+2y > 4\end{array}\right\}$



Punto de corte, es la solución al sistema $\left.\begin{array}{l}(1)\qquad x+y = 2 \\ (2)\ -2x+2y = 4\end{array}\right\}$. Resolviéndolo obtenemos x=0, y=2

Ejercicio 15. Resolver

a) $\left.\begin{array}{l}(1)\quad 3x+5y < 0 \\ (2)\ -2x+3y \geq 6\end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{l}(1)\quad x+y > 0 \\ (2)\ -3x-3y \geq -6\end{array}\right\}$ **c)** $\left.\begin{array}{l}(1)\ 2x-y \leq 0 \\ (2)\ x+y \geq 1 \\ (3)\ y \leq 10\end{array}\right\}$

Problemas finales.

Ejercicio 16. En una tienda venden un equipo de música y un ordenador. Mi hermana compro ambos el mes pasado y pago 2500 € por los dos. Ahora la tienda rebaja un 10% el equipo de música y un 15% el ordenador, siendo el precio total de ambos de 2157.5 €. ¿Cuál era el precio del equipo de música y del ordenador antes de las rebajas?

Ejercicio 17. En un examen tipo test hay 20 preguntas. Por cada pregunta acertada puntuamos 2 puntos y por cada pregunta fallada puntuamos -0.5 puntos; el aprobado esta en 20 puntos. Si respondemos a todas las preguntas ¿Cuántas preguntas hay que acertar para aprobar?

Ejercicio 18. Sea un cuadrado que cumple que al aumentar en 3m el lado su área aumenta en $75m^2$. Calcular el lado del cuadrado original.

Ejercicio 19. Puede un triangulo de lados de 9cm, 16cm y 18cm. Comprueba que no es rectángulo. Puede convertirse en un triangulo rectángulo al quitarle la misma cantidad a sus tres lados. ¿Cuánto valen sus nuevos lados?

Ejercicio 20. Calcular las dimensiones de un triangulo rectángulo isósceles de perímetro 24 cm.

Ejercicio 21. Calcular el tiempo que se tarda en llenar un cubo por dos grifos si se sabe que el segundo tarda el doble en llenarlo que el primero, y que cuando están los dos llenándolo tarda 3 minutos.

Ejercicio 22. Calcular la velocidad media de un coche que en la ida de un viaje entre las ciudades A y B va a una velocidad media de 60km/h y a la vuelta de 40km/h.

Soluciones

Ejercicio 1.

a) $\frac{x-3}{2}+7=x-\frac{5-x}{3}$ → solución x=43/5

b) $\frac{-3(5-x)}{10}-\frac{3x}{2}=7-\frac{5x}{3}$ → solución x=$\frac{255}{14}$

Ejercicio 2.

a) $x^2-6\sqrt{2}x+18=0$ → $x=\frac{6\sqrt{2}\pm\sqrt{72-72}}{2}=3\sqrt{2}$

b) $2x^2-7x+3=0$ → $x=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{2}=\left\langle\begin{array}{l}6\\1\end{array}\right.$

c) $\frac{x+7}{x+3}+\frac{x^2-3x+6}{x^2+2x-3}=1$ → $(x+7)\cdot(x^2+2x-3)+(x^2-3x+6)=(x+3)\cdot(x^2+2x-3)$ →

$5x^2+5x-6=0$ → $x=\frac{-5\pm\sqrt{25+120}}{10}=\frac{-5\pm\sqrt{145}}{10}=\left\langle\begin{array}{l}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{145}}{10}\\-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{145}}{10}\end{array}\right.$

d) $\frac{x+1}{x+5}+\frac{1-x}{x-4}=\frac{5}{2}$ → $2(x+1)(x-4)+2(1-x)(x+5)=5(x+5)(x-4)$ → $5x^2+19x-102=0$

$x=\frac{-19\pm\sqrt{361+2040}}{10}=\frac{-19\pm 49}{10}=\left\langle\begin{array}{l}3\\-\frac{34}{5}\end{array}\right.$

e) $(x-\sqrt{3})^2-1+x=x$ → $x^2-2\sqrt{3}x+3-1=0$ → $x=\frac{2\sqrt{3}\pm\sqrt{12-8}}{2}=\left\langle\begin{array}{l}\sqrt{3}+1\\\sqrt{3}-1\end{array}\right.$

f) $1+(x-2)^2=1$ → $(x-2)^2=0$ → x=2

g) $9x^2-25=0$ → $x^2=25/9$ → $x=\pm\sqrt{\frac{25}{9}}=\pm\frac{5}{3}$

h) $x^2-2x=0$ → $x(x-2)=0$ → x=0, x=2

Ejercicio 3.

a) $x^4-x^2-6=0$ → solución : x= $\pm\sqrt{3}$

b) $x^4-3x^2+2=0$ → solución x=$\pm\sqrt{2}$,±1

c) $-x^4-4x^2-45=0$ → No soluciones reales

Ejercicio 4. Resolver:

d) $(x+\pi)\cdot(x-1/2)\cdot(3x-7)=0$ → soluciones $x=-\pi$, $x=1/2$, $x=7/3$

e) $x^2\cdot(x-\sqrt{2})\cdot(5x+1)=0$ → soluciones $x=0$ (doble), $x=\sqrt{2}$, $x=-1/5$

f) $4x^5+20x^4-53x^3+23x^2+13x-7=0$ → soluciones $x=1$ (doble), $x=-7$, $x=1/2$, $x=-1/2$

Ejercicio 5.

a) $4x+2\sqrt{x+4}=4 \rightarrow 2\sqrt{x+4}=4-4x \rightarrow \left(2\sqrt{x+4}\right)^2=(4-4x)^2 \rightarrow$

$4(x+4)=16x^2-32x+16 \rightarrow 16x^2-36x=0 \rightarrow 4x(4x-9)=0 \quad x=\begin{cases}0\\ 9/4\end{cases}$

Comprobación:

$x=0 \rightarrow 0+2\cdot\sqrt{0+4}=4$ Solución

$x=9/4 \rightarrow 4\cdot\frac{9}{4}+2\sqrt{\frac{9}{4}+4}=9+2\cdot\frac{5}{2}\neq 4$ No solución

b) $x^2+\sqrt{4x^2-3}=0 \rightarrow x^2=-\sqrt{4x^2-3} \xrightarrow{elev} x^4=4x^2-3 \rightarrow x^4-4x^2+3=0$

$x^2=t,\ x^4=t^2 \rightarrow t^2-4t+3=0 \rightarrow t=\begin{cases}3\\1\end{cases} \quad x=\begin{cases}\pm\sqrt{3}\\ \pm 1\end{cases}$

Comprobación:

$x=1 \rightarrow 1^2+\sqrt{4\cdot 1^2-3}=2\neq 0$ No solución

$x=-1 \rightarrow (-1)^2+\sqrt{4\cdot(-1)^2-3}=2\neq 0$ No solución

$x=\sqrt{3} \rightarrow \left(\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{4\left(\sqrt{3}\right)^2-3}=6\neq 0$ No solución

$x=-\sqrt{3} \rightarrow \left(-\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{4\left(-\sqrt{3}\right)^2-3}=6\neq 0$ No solución

c) $x-\sqrt{x}=2 \rightarrow x-2=\sqrt{x} \xrightarrow{elv} (x-2)^2=x \rightarrow x^2-5x+4=0 \rightarrow x=\begin{cases}4\\1\end{cases}$

Comprobación:

$x=1 \rightarrow 1-\sqrt{1}=0\neq 2$ No solución

$x=4 \rightarrow 4-\sqrt{4}=2$ Solución

Ejercicio 6.

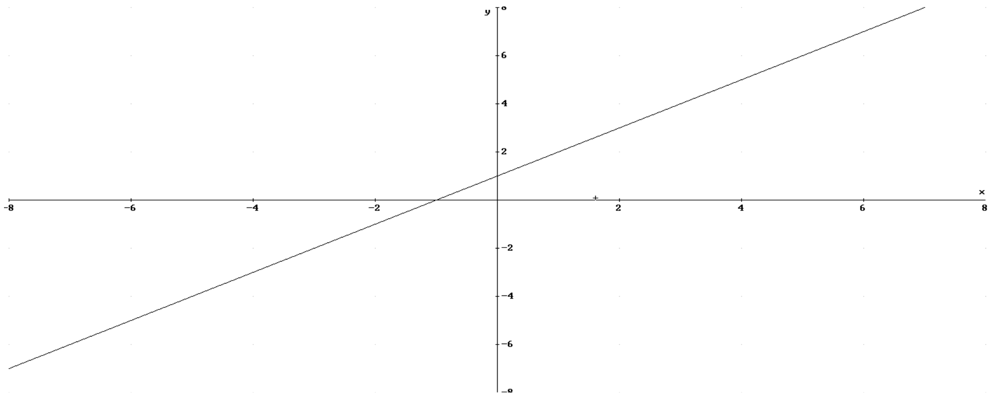
c) $\frac{2}{x}-\frac{2-x}{x+3}=1$ → Solución $x=2$

d) $\frac{x}{x+1}+\frac{2}{x+2}=3$ → No tiene soluciones.

Ejercicio 7.

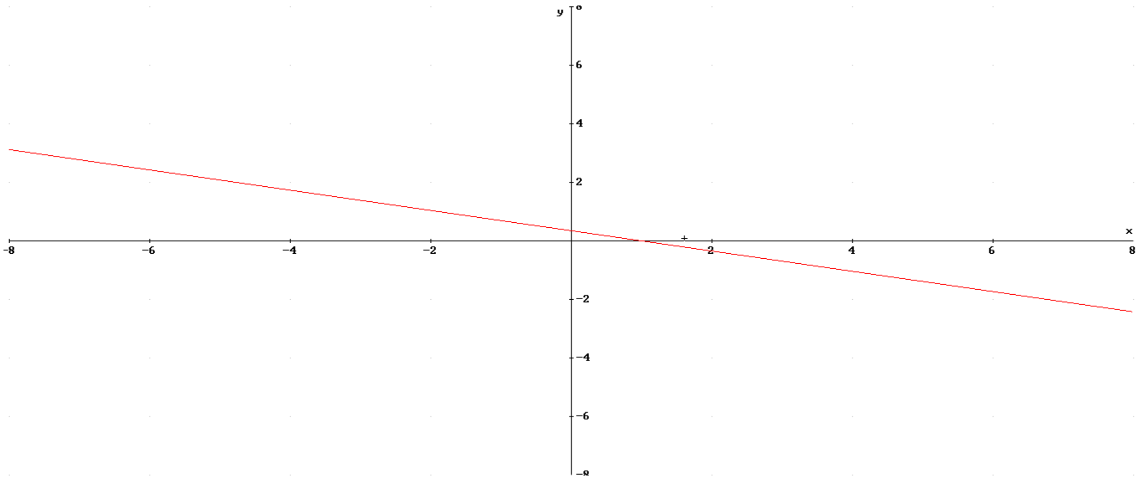
a) $-x+y=1 \rightarrow y=1+x$

x	y
1	2
0	1
-1	0



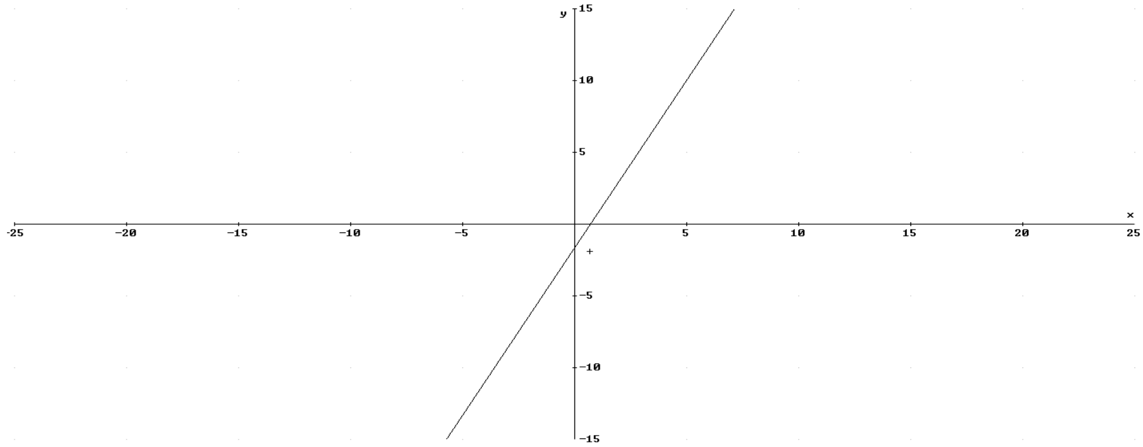
b) $\sqrt{3}x+5y=\sqrt{3} \rightarrow y=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{3}x}{5}$

X	y
1	0
2	$-\sqrt{3}/5 \approx -0{,}35$



c) $-7x+3y=-5 \rightarrow y=\dfrac{-5+7x}{3}$

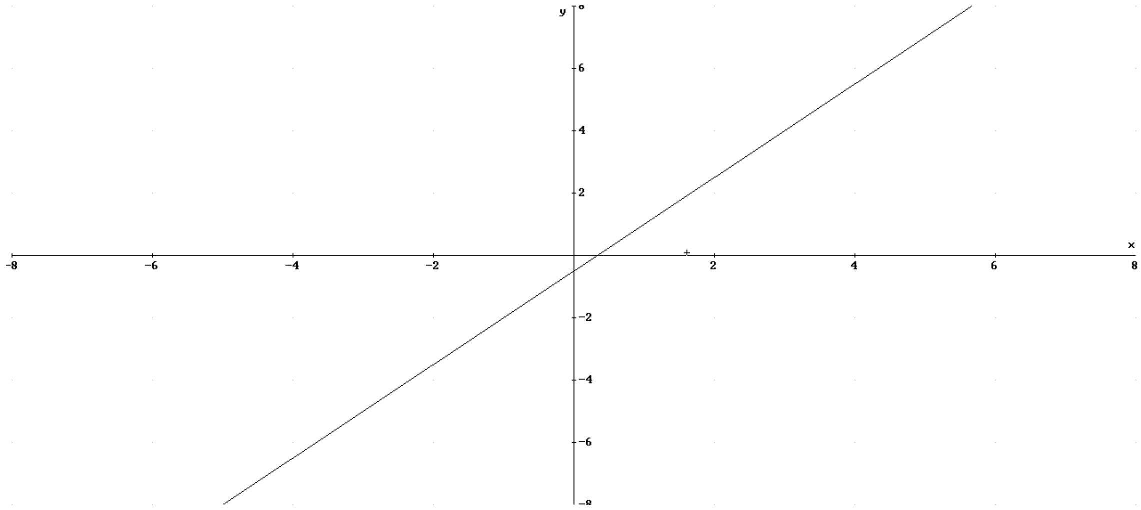
x	y
2	3
-1	-4



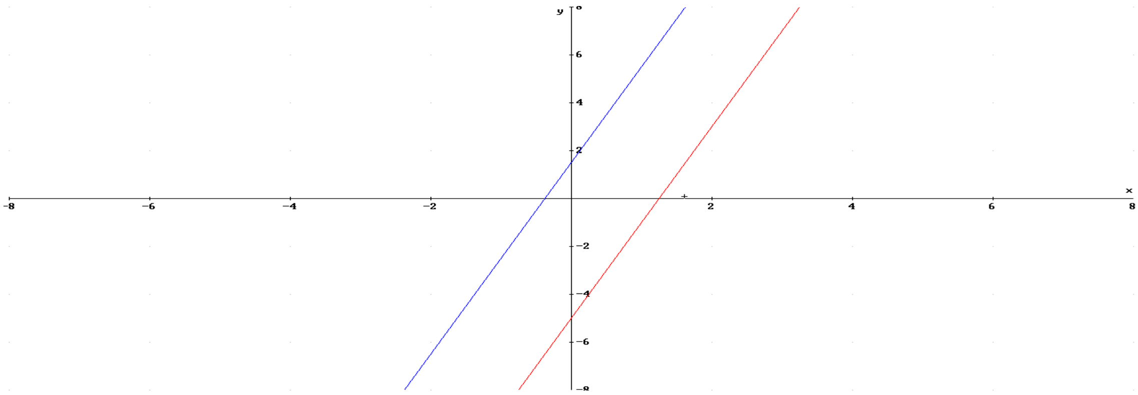
Ejercicio 8.

a) $\left.\begin{array}{l}(1)\,3x-2y=1\\(2)\,6x-4y=2\end{array}\right\}$

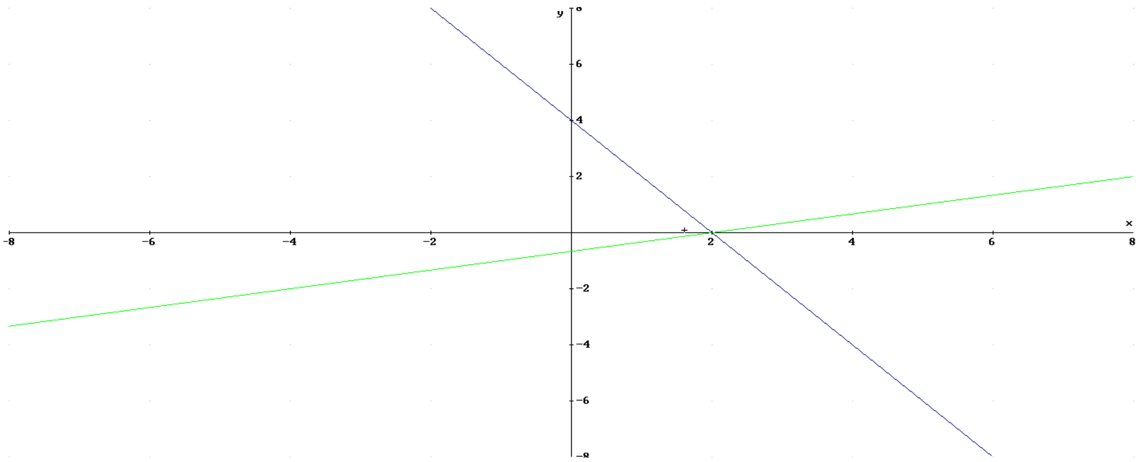
$\frac{3}{6}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$ Compatible indeterminado→ $x=\frac{1+2y}{3}$



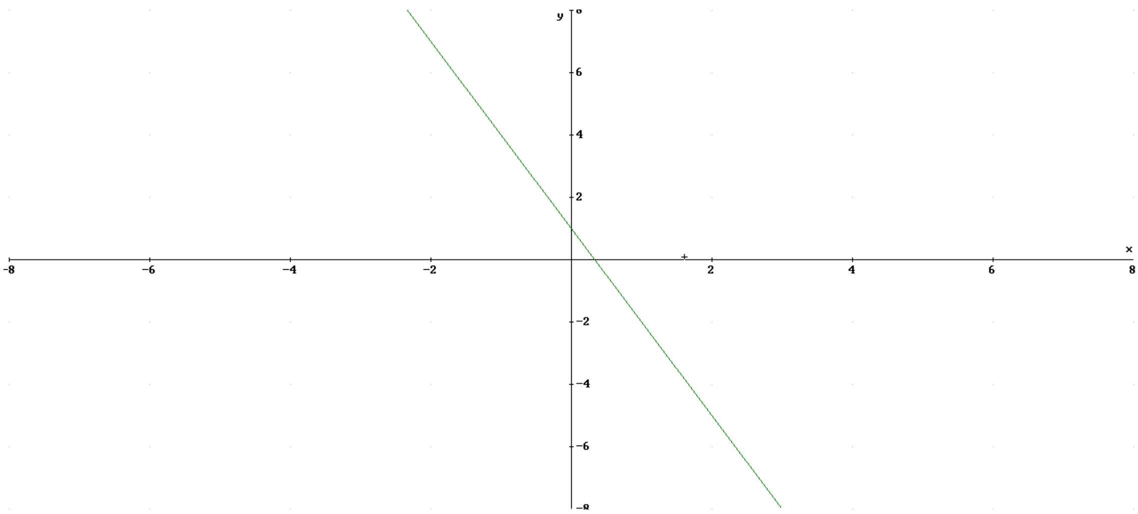
b) $\left.\begin{array}{l}(1)\;\;4x-y=5\\(2)-8x+2y=3\end{array}\right\}\frac{4}{-8}=\frac{-1}{2}\neq\frac{5}{3}$. Incompatible, no solución



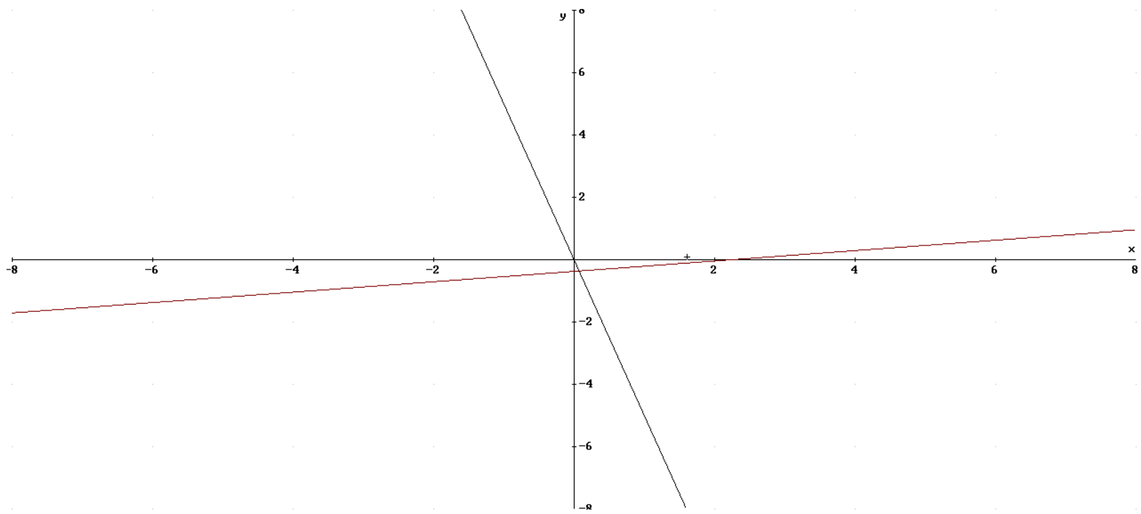
c) $\left.\begin{array}{l}(1)\ \ x-3y=2\\(2)\ 2x+y=4\end{array}\right\}\ \frac{1}{2}\neq\frac{-3}{1}$. Compatible determinado, una solución. **x=2, y=0**



d) $\left.\begin{array}{l}(1)-18x+6=6y\\(2)y+3x+5=6\end{array}\right\}\ \frac{-18}{3}=\frac{-6}{1}=\frac{-6}{1}$ → Compatible indeterminado. Infinitas soluciones.



e) $\left.\begin{array}{l}(1)\ \ \frac{x}{3}-2y=\frac{3}{4}\\(2)\ \ 5x+y=0\end{array}\right\}=\left.\begin{array}{l}(1)\ \ 4x-24y=9\\(2)\ \ 5x+y=0\end{array}\right\}\ \frac{4}{5}\neq\frac{-24}{1}$ → compatible determinado, una solución → Solución x=9/124, y=-45/124



Ejercicio 9.

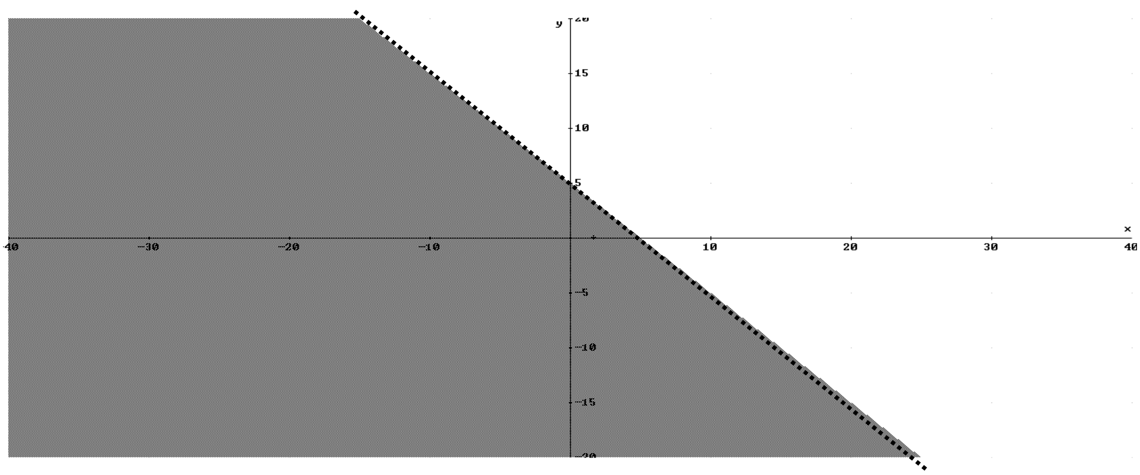
a) 2x-4+3x<5x+6 → 0x<10 → 0<10 ,que es cierto independientemente del valor de x, luego la solución es x∈R

b) 3x+7-10x+15≥(x-1)/2-1, -7x+22≥(x-1)/2-1 $\xrightarrow{mult\ \ por\ 2}$ -14x+44≥x-1-2→ -15x≥-47 → $x \leq \frac{47}{15}$, x∈(-∞, $\frac{47}{15}$]

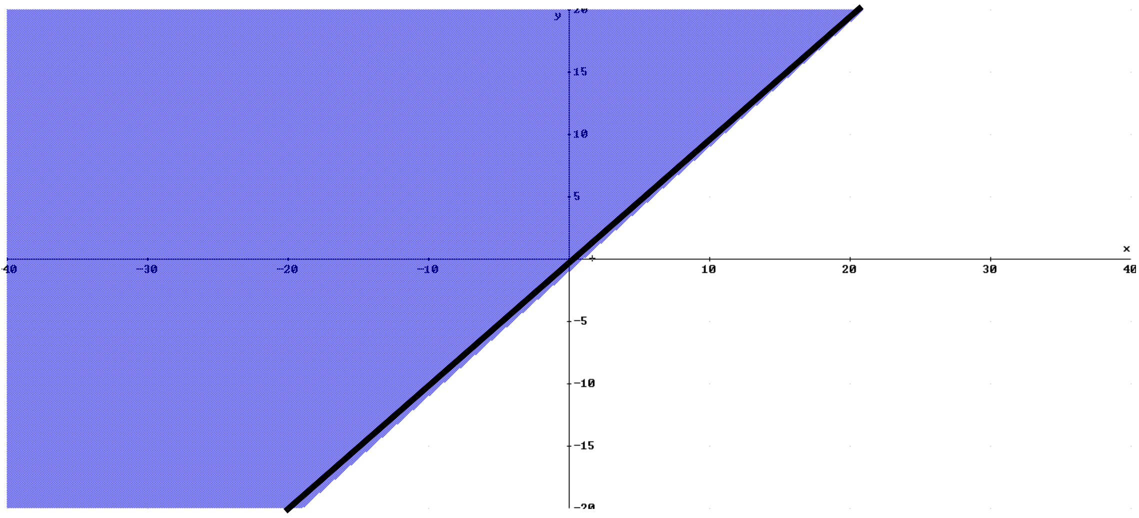
c) $\frac{3x-3}{2} - x > \frac{x-3}{2} \xrightarrow{mul\ por\ 2} 3x-3-2x > x-3 \to 0x > 0 \to 0 > 0$ No es cierto independientemente del valor de x, luego no hay soluciones S=∅

Ejercicio 10.

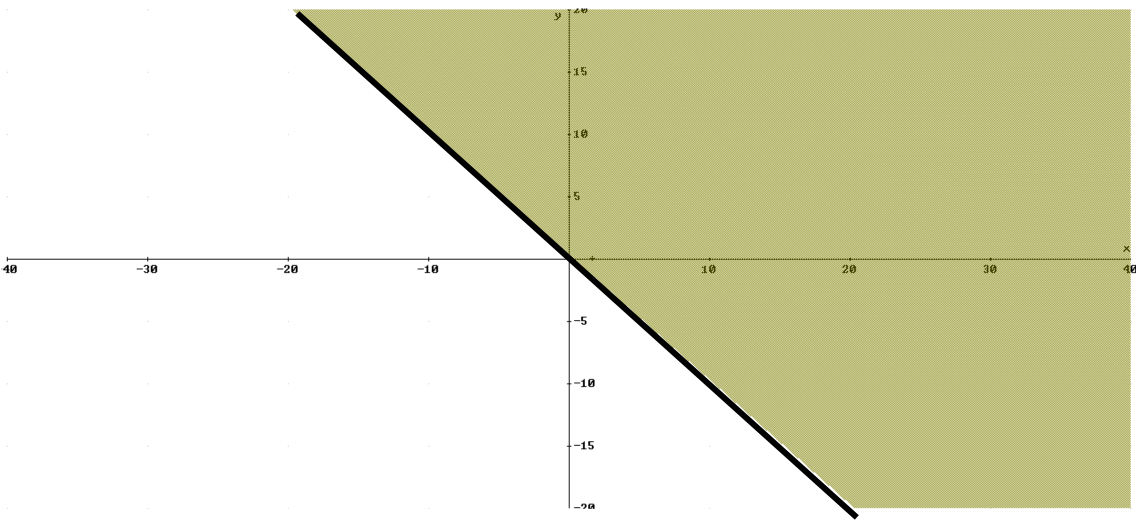
a) x+y<5



b) x-y ≤ 1



c) 2x-1/3 ≥x-y



Ejercicio 11.

a) $x^2-6x+9>0 \rightarrow (x-3)^2>0$

	$(-\infty,3)$	3	$(3,\infty)$
Signo(x-3)	-	0	+
Signo(x-3)	-	0	+
Signo(x^2-6x+9)	+	0	+

Solución $\rightarrow$ $x\in R-\{3\}$

b) $-3x^2-5x+2\leq 0 \rightarrow -3(x-1/3)(x+2)\leq 0$

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,1/3)$	1/3	$(1/3,\infty)$
Signo(x+2)	-	0	+	+	+
Signo(x-1/3)	-	-	-	0	+
-3	-	-	-	-	-
Signo(x^2+x-6)	-	0	+	0	-

Solución $\rightarrow$ $x\in(-\infty,-2]\cup[1/3,\infty)$

c) $(x-3)^2\geq 4 \rightarrow x^2-6x+5\geq 0 \rightarrow (x-5)\cdot(x-1)\geq 0$

	$(-\infty,1)$	1	$(1,5)$	5	$(5,\infty)$
Signo(x-1)	-	0	+	+	+
Signo(x-5)	-	-	-	0	+
Signo(x^2-6x+5)	+	0	-	0	+

Solución $\rightarrow$ $x\in(-\infty,1]\cup[5,\infty)$

Ejercicio 12.

1) $-x^3-2x^2+x+2=-(x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-1)>0$. Raíces x=-2, -1,1

	$(-\infty,-2)$	-2	(-2,-1)	-1	(-1,1)	1	$(1,\infty)$
Signo(x+2)	-	0	+	+	+	+	+
Signo(x+1)	-	-	-	0	+	+	+
Signo(x-1)	-	-	-	-	-	0	+
-1	-	-	-	-	-	-	-
Signo($-x^3-2x^2+x+2$)	+	0	-	0	+	0	-

Solución $x\in(-\infty,-2)\cup(-1,1)$

2) $-3x^3-24x^2-21x=-3\cdot x\cdot(x+7)\cdot(x+1)\leq 0$. Raíces x=-7,-1, 0

	$(-\infty,-7)$	-7	(-7,-1)	-1	(-1,0)	0	$(0,\infty)$
Signo(x+7)	-	0	+	+	+	+	+
Signo(x+1)	-	-	-	0	+	+	+
Signo(x)	-	-	-	-	-	0	+
-3	-	-	-	-	-	-	-
Signo($-x^3-2x^2+x+2$)	+	0	-	0	+	0	-

Solución $x\in[-7,-1]\cup[0,\infty)$

3) $x^3-2x^2\leq -x \rightarrow x^3-2x^2+x\leq 0 \rightarrow x(x-1)^2\leq 0$

	$(-\infty,0)$	0	(0,1)	1	$(1,\infty)$
Signo(x)	-	0	+	+	+
Signo(x-1)	-	-	-	0	+
Signo(x-1)	-	-	-	0	+
Signo(x^3-2x^2-x)	-	0	+	0	+

Solución $x\in(-\infty,0]\cup\{1\}$

Ejercicio 13.

a) $\dfrac{-x^2+6x-8}{x^2-4} \geq 0 \rightarrow \dfrac{-(x-4)\cancel{(x-2)}}{(x+2)\cancel{(x-2)}} \geq 0$ → raíces -2 y 4

	(-∞,-2)	-2	(-2,4)	4	(4,∞)
Signo(x+2)	-	0	+	+	+
Signo(x-4)	-	-	-	0	+
Signo(-1)	-	-	-	-	-
Signo($\dfrac{-x^2+6x-8}{x^2-4}$)	-	No existe	+	0	-

Solución x∈(-2,4]

b) $\dfrac{2x^2+6x+10}{x^2-x} \leq 0 \rightarrow \dfrac{2x^2+6x+10}{x(x-1)} \leq 0$ → raíces 0 y 1.

	(-∞,0)	0	(0,1)	1	(1,∞)
Signo(x)	-	0	+	+	+
Signo(x-1)	-	-	-	0	+
Signo($2x^2$+6x+10)	+	+	+	+	+
Signo($\dfrac{2x^2+6x+10}{x^2-x}$)	+	No existe	-	No existe	+

Solución x∈(0,1)

Ejercicio 14.

a) $\left.\begin{array}{l}(1)\ 5-3x\geq 4x+13\\(2)\ 2x+7<5x+11\end{array}\right\}$

$S_1\rightarrow$ -8≥7x ; x≤(-8/7) S_1=(-∞, -8/7]

$S_2\rightarrow$ -3x<4 ; x>-4/3 S_2=(-4/3,∞)

S=$S_1\cap S_2$=(-4/3,-8/7]

b) $\left.\begin{array}{l}(1)\ 5(x-3)\leq -2+x\\(2)\ 3x>2x+1\\(3)\ \ x<3\end{array}\right\}$

$S_1\rightarrow$ 4x≤13; S_1=(-∞,13/4]

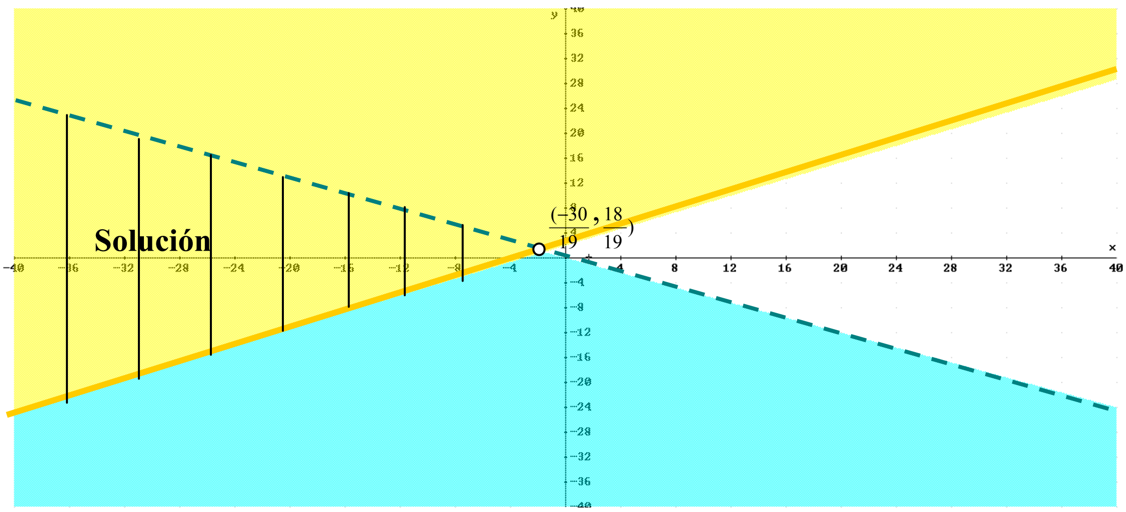
$S_2\rightarrow$ x>1 ; S_2=(1,∞)

$S_3\rightarrow$ x<3; S_3=(-∞,3)

S=$S_1\cap S_2\cap S_3$=(1,3)

Ejercicio 15.

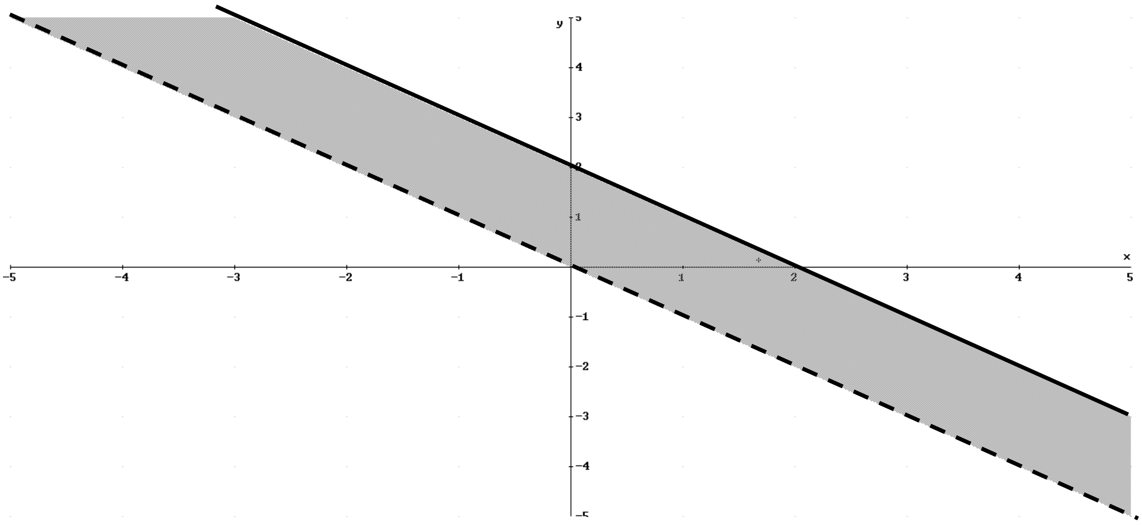
a) $\left.\begin{array}{l}(1)\quad 3x+5y<0\\(2)\ -2x+3y\geq 6\end{array}\right\}$



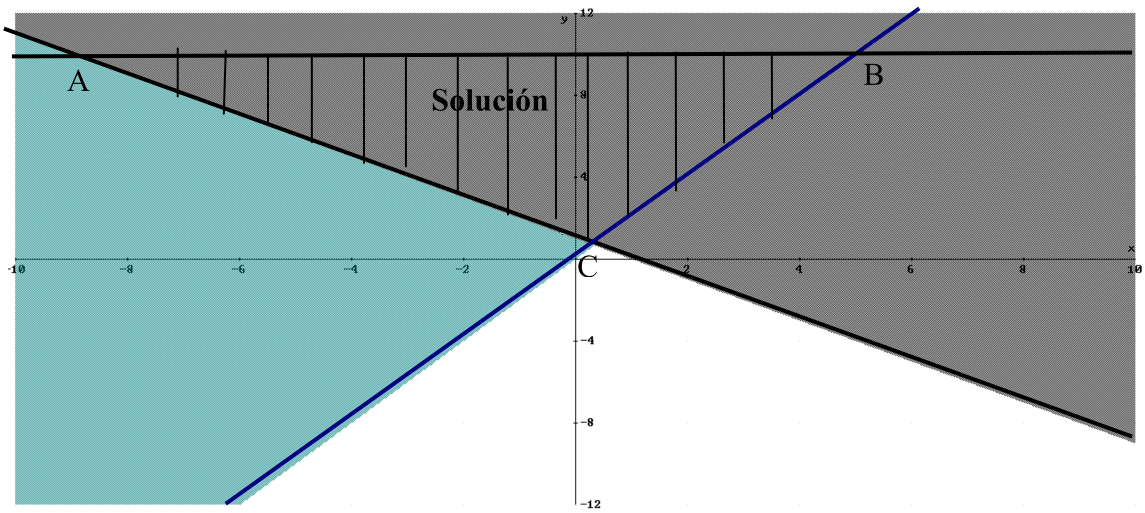
Puntos de corte es la solución del sistema $\left.\begin{array}{l}(1)\quad 3x+5y=0\\(2)\ -2x+3y=6\end{array}\right\}$. Resolviéndolo obtenemos x=$\frac{-30}{19}$, y=$\frac{18}{19}$

b) $\left.\begin{array}{l}(1)\quad x+y>0\\(2)\ -3x-3y\geq -6\end{array}\right\}$

Son rectas paralelas y la solución es el espacio comprendido entre ambas rectas. Veamos el dibujo



c) $\left.\begin{array}{l}(1)\,2x-y\leq 0\\ (2)\,x+y\geq 1\\ (3)\,y\leq 10\end{array}\right\}$



Calculemos A, B y C.

Cálculo de A: punto de corte de $\left.\begin{array}{r}y=10\\ x+y=1\end{array}\right\}$ → (-9,10)

Cálculo de B: punto de corte de $\left.\begin{array}{r}y=10\\ 2x-y=0\end{array}\right\}$ → (5,10)

Cálculo de C: punto de corte de $\left.\begin{array}{r}x+y=1\\ 2x-y=0\end{array}\right\}$ → (1/3, 2/3)

Ejercicio 16.

x= precio equipo de música
y= precio del ordenador

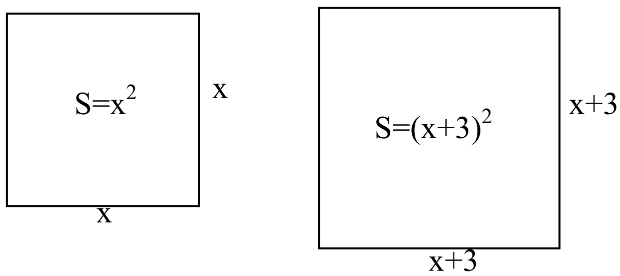
$$\left.\begin{array}{r} x+y=2500 \\ 0.9x+0.85y=2157{,}5 \end{array}\right\} \rightarrow$$ Resolviendo el sistema x=650€, y=1850€

Ejercicio 17.

x= preguntas acertadas
(20-x)= preguntas erróneas

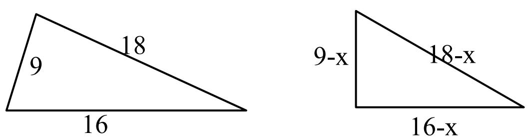
$$\left.\begin{array}{c} 2x-0{,}5\cdot(20-x)\geq 20 \\ x\leq 20 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c} x\geq 12 \\ x\leq 20 \end{array}\right\} \rightarrow x\in\{12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

Ejercicio 18.



$x^2+75=(x+3)^2 \rightarrow x^2+75=x^2+6x+9 \rightarrow 6x=66 \rightarrow$ **x=11m**

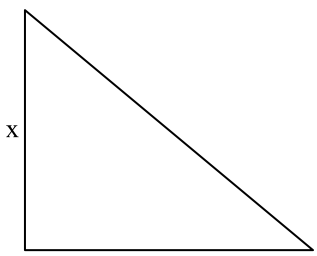
Ejercicio 19.



Teorema de Pitágoras para el triángulo rectángulos $\rightarrow (18-x)^2=(16-x)^2+(9-x)^2 \rightarrow$

$$x^2-14x+13=0 \rightarrow x=\begin{cases} 13 & no \ \ solución \ \ 9-13<0 \\ 1 & lados=8cm, 17cm, 15cm \end{cases}$$

Ejercicio 20.



hip=$\sqrt{x^2+x^2}=\sqrt{2}x$

perímetro=2x+$\sqrt{2}x$=24 cm

$\rightarrow$ x=

x

$$\frac{24}{2+\sqrt{2}}=\frac{24(2-\sqrt{2})}{2}=(24-12\sqrt{2})cm$$

Ejercicio 21.

t=tiempo llenar un cubo 1er grifo.
2t= tiempo llenar un cubo 2º grifo.
Capacidad cubo=c
Velocidad 1ergrifo=c/t
Velocidad 2ºgrifo=c/2t
Velocidad dos grifos= c/t+c/2t=3c/2t

Capacidad del cubo $c = v_{dos\ grifos} \cdot 3\,\text{min} \rightarrow c = \frac{3c}{2t} \cdot 3 \rightarrow 1 = \frac{9}{2t} \rightarrow t = 9/2 = 4{,}5\,\text{min}$

Tiempo llenar un cubo 1er grifo→4,5min
Tiempo llenar un cubo 2º grifo→9min

Ejercicio 22.

Coche de A→B v=60km/h → $t_{A\rightarrow B}$=d/v=d/60
Coche de B→A v=40km/h → $t_{B\rightarrow A}$=d/v=d/40

t_{total}=(d/60+d/40) → $v_{media} = \frac{2d}{\frac{d}{60}+\frac{d}{40}} = \frac{2}{\frac{100}{240}} = 48\,km/h$