Tema 2. Operaciones con Números Reales

1. Operaciones con fracciones

1.1. Introducción

Recordemos que una fracción es un cociente indicado de dos números enteros $\frac{a}{b}$, donde a **siempre distinto de cero**. El número situado debajo de la fracción, b, es el **denominador** y nos indica las partes en las que se divide la unidad; el situado debajo, a, es el **numerador** y nos indica las partes que tomamos. Si el valor absoluto del numerador es mayor que el numerador entonces el número es superior a la unidad.

Como vimos en el tema anterior la expresión decimal de las fracciones puede ser exacta o periódica (pura o mixta). Centrémonos ahora en las operaciones con fracciones.

1.2. Suma y diferencia.

Para **sumar o restar** dos o más fracciones es necesario que estas tengan el mismo denominador. Para obtener el **común denominador** se busca la **fracción equivalente** (multiplicando numerador y denominador por mismo número) cuyos denominadores sean un múltiplo de todos los denominadores iniciales (preferiblemente el **mínimo común múltiplo** para que esté lo más simplificado posible). Una vez que los denominadores sean los mismos sumamos y restamos los denominadores.

Ejemplo:

$$\frac{3}{4}-\frac{2}{5}+\frac{7}{2}+\frac{11}{6}=\frac{3\cdot 15-2\cdot 12+7\cdot 30+11\cdot 10}{60}=\frac{341}{60}$$

1.3. Producto y división

El **producto** de dos fracciones es otra fracción cuyo denominador es el producto de los denominadores y el numerador el de los numeradores.

$$\boldsymbol{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}}$$

El **cociente** de dos fracciones es otra fracción en donde el numerador es igual al producto del numerador de la primera fracción con el denominador de la segunda fracción y el denominador el producto del denominador de la primera con el numerador de la segunda. Regla nemotécnica: **numerador producto de medios y denominador producto de extremos.** Si la división viene expresada como una "torre" de fracciones la regla a aplicar es la misma. Se pueden entender la división de dos fracciones como un producto de la primera con la inversa[1] de la segunda

$$\boldsymbol{\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}}$$

Ejemplos:

$\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{-2}{5}\right)=\frac{-6}{20}=\frac{-3}{10}$, $\quad\frac{-2}{5}:\left(\frac{-4}{3}\right)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$, $\quad\frac{\frac{-5}{4}}{\frac{3}{8}}=\frac{-40}{12}=-\frac{10}{3}$

[1] Inversa de una fracción $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$ de forma que el producto de ambas es la unidad → $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$

Regla de los signos en la multiplicación y división:

+·+=+ ; +:+=+

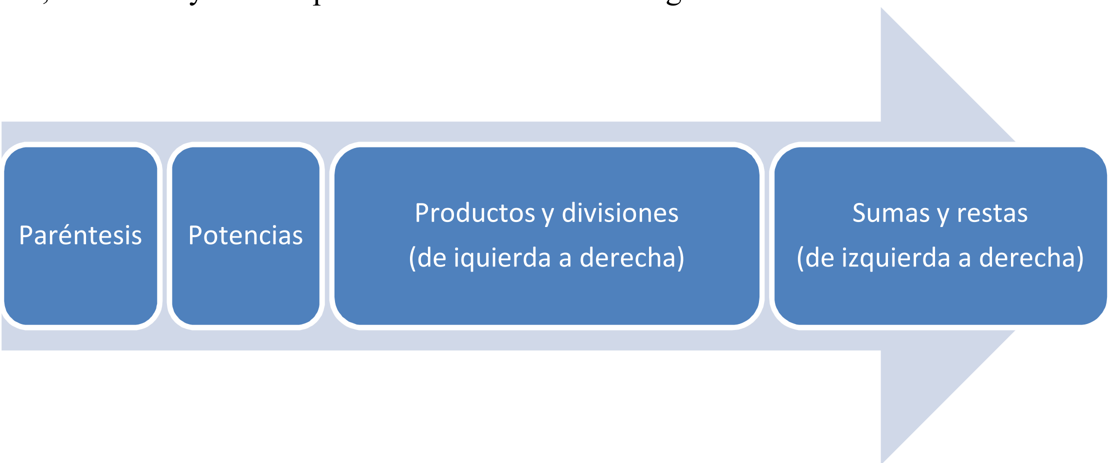
+·-=- ; +:-=-

-·+=- ; -:+=-

-·-=+ ; -:-=+

1.4. Operaciones combinadas.

Las reglas de las operaciones combinadas son las mismas que las de los números enteros, cuando hay varias operaciones se hacen en el siguiente orden:



Notas: Si hay operaciones que no afectan a las otras aunque tengan menos prioridad se pueden realizar. Simplifica en cada paso, esto te permite operar con números más pequeños y que no tengas que simplificar tanto al final

Ejemplo:

$$\frac{\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{-4}{3}\right):\frac{2}{5}-\frac{3}{5}-\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}\cdot 6\right)}{\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{2}}=\frac{-\frac{4}{15}:\frac{2}{5}-\frac{3}{5}-\left(\frac{1}{5}-\frac{12}{3}\right)}{\frac{18}{6}}=\frac{-\frac{20}{30}-\frac{3}{5}-\left(\frac{1}{5}-4\right)}{3}=\frac{-\frac{2}{3}-\frac{3}{5}-\left(\frac{-19}{5}\right)}{3}=\frac{-\frac{10}{15}-\frac{9}{15}+\frac{57}{15}}{3}=\frac{\frac{38}{15}}{3}=\frac{38}{45}$$

Ejercicio 1. Operar y simplificar:

a) $\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdot\left(2-3:\frac{2}{5}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{3}:\frac{15}{9}\right)\cdot\frac{1}{2}$

b) $\left(\frac{1}{3}-1+\frac{2}{4}\right):\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+3\right)-2+\frac{7}{3}:4$

c) $2\cdot\left(\frac{9}{2}-\frac{4}{5}:\frac{1}{10}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\right)-3$

d) $\left[2-\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{6}+\frac{3}{2}\right)\cdot 4\right]-\left(2-\frac{3}{5}+1\right)\cdot 10$

e) $\frac{1}{3}:\left(\frac{2}{5}\cdot 3\right)\cdot\left(\frac{1}{6}-2\right)-2\cdot\left(\frac{2}{5}-3\right)$

f) $\frac{7}{4}-\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{1}{3}-2\cdot\frac{1}{3}\right]:\left(\frac{7}{30}-1\right)$

g) $\frac{7}{3}:\left[\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{3}-2+\frac{1}{5}\right)\right]+\frac{3}{4}-\left(5+\frac{4}{3}:4\right)$

h) $\dfrac{\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}-\frac{7}{2}\right)-2}{\frac{2}{5}-\frac{12}{5}}$

i) $\dfrac{\frac{1}{2}-\left(\frac{5}{3}:\frac{5}{6}-\frac{1}{2}\right):2}{\frac{2}{5}-\left(\left(1-\frac{2}{3}\right)-4\right)}$

j) $\dfrac{\left(\frac{1}{3}-1+\frac{2}{4}\right):\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+3\right)}{\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{1}{3}-2\cdot\frac{1}{3}\right]}$

2. Potencias.

En este apartado aprenderemos a usar la calculadora además de operar sin ella.

2.1. Potencias de exponente natural

Definición: se llama potencia en base $a\in R$ y exponente $n\in N$ y se denota a^n al producto de n veces a:

$a^n=\underbrace{a\cdot a\ldots\cdot a}_{\text{n veces}}$

Ejemplo:

$5^4=5\cdot5\cdot5\cdot5=725$

$(-1,2)^4=(-1,2)\cdot(-1,2)\cdot(-1,2)\cdot(-1,2)=2,0736$

$$(-a)^n\begin{cases}+ & si\ \ n\ \ par\\ - & si\ \ n\ \ es\ \ impa\end{cases}$$

Propiedades:(demostrar por el alumno)

1) $\left((a)^n\right)^m=a^{n\cdot m}$ → ej: $(3^3)^2=9^2=81=3^4$
2) $a^n\cdot a^m=a^{n+m}$ → ej: $2^3\cdot2^4=8\cdot16=64=2^7$
3) $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ → ej: $\frac{4^3}{4^2}=\frac{64}{16}=4=4^1$
4) $a^0=1$ → ej: $5^0=\frac{5^3}{5^3}=1$
5) $a^1=a$ → ej: $1,3^1=1,3$

6) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ → ej: $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2^3}{3^3}$

7) $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$ → ej: $(2\cdot 3)^2=6^2=4\cdot 9=2^2\cdot 3^2$

***Nota*: estas propiedades son ciertas también cuando el exponente no es natural**

2.2. Exponente entero (negativo)

En este apartado vamos a estudiar las potencias cuando el exponente es un número entero negativo. Veamos el significado de a^{-n}:

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Ejemplos:

$(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = -\frac{1}{125}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

Ejercicio 2. Escribe como potencias de exponente positivo:

a) 8^{-3} b) 5^{-2} c) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-4}$ d) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$ e) $(-4)^{-2}$ f) $\left(\frac{-3}{5}\right)^{-3}$

Ejercicio 3. Expresar como potencia única aplicando las propiedades de las potencias y calcula el resultado

a) $5^2\cdot 5^{-4}\cdot 5^5\cdot 5^{-3}$ b) $3^2:3^{-3}\cdot 3^5:3^4$ c) $2^2\cdot 4^{-4}\cdot 2^5:8^{-2}$ d) $\frac{6^2\cdot 6^{-4}}{6^3:6^4}$

e) $(2^5)^{-2}\cdot(2^{-2})^{-5}:(2^3)^{-4}$

3. Notación Científica

Fíjate en los siguientes números:

e(carga e^-)=-0,00000000000000000016 C
$d_{pluton—Sol}$=5910000000000m
$gasto_{empresa}$=312600000000 €

Cuando tenemos cantidades muy pequeñas o muy grandes se utiliza la notación científica, consiste en poner un número multiplicado por una **potencia de 10**. Así los números en notación científica constan de:

- Parte entera formada por una sola cifra ≠0 (1ª cifra del número)
- Parte decimal(formada por el resto de cifras del número)
- Potencia en base 10 que nos informa del orden de magnitud.

X=a,bcd…·10ⁿ

En los ejemplos anteriores:

$e=-1{,}6\cdot10^{-19}C$
$d=5{,}91\cdot10^{12}m$
$gasto=3{,}126\cdot10^{11}€$

La notación científica tiene las siguientes ventajas:

a) Escribimos los números grades y pequeños de forma más abreviada
b) Con una simple mirada al número podemos entender como es de grande o pequeño ese valor.

Otra ventaja de la notación científica es que es muy útil para operar con esta clase de números, en especial cuando las operaciones son el producto o el cociente. Veamos algunos ejemplos:

a) $(5{,}24\cdot10^{6})\cdot(6{,}3\cdot10^{8})=(5{,}24\cdot6{,}3)\cdot10^{14}=33{,}012\cdot10^{14}=3{,}3012\cdot10^{15}$

b) $\dfrac{5{,}24\cdot10^{6}}{6{,}3\cdot10^{-8}}=(5{,}24:6{,}3)\cdot10^{14}=0{,}8317\cdot10^{14}=8{,}317\cdot10^{13}$

c) $5{,}83\cdot10^{9}+6{,}932\cdot10^{12}-7{,}5\cdot10^{10}=5{,}83\cdot10^{9}+6932\cdot10^{9}-75\cdot10^{9}=(5{,}83+6932-75)\cdot10^{9}=$
$=6862'83\cdot10^{9}=6{,}86283\cdot10^{12}$

Nota: correr la coma hacia la izquierda es como dividir, luego para no modificar el resultado tendremos que aumentar el exponente de 10 en tantas unidades como veces que corramos la coma. Al revés si corremos la coma hacia la derecha que es como multiplicar y por tanto tendremos que disminuir el exponente de 10 tantas veces como corramos la coma:

coma → == restar al exponente nº posiciones desplazada
coma ← == sumar al exponente nº posiciones desplazada

Ejercicio 4 : Calcular y expresar el resultado en notación científica.

a) $7{,}823\cdot10^{-5}\cdot1{,}84\cdot10^{18}$

b) $2{,}35\cdot10^{8}+1{,}43\cdot10^{7}$

Ejercicio 5: Expresar en notación científica:

a) 4230000000
b) 0,00000004
c) 84300
d) -0,000572

Ejercicio 6: Calcular y expresar el resultado en notación científica:

a) $(3\cdot10^{-7})\cdot(8\cdot10^{18})$
b) $(5\cdot10^{12}):(2\cdot10^{-3})$
c) $(5\cdot10^{9})^{2}$
d) $3{,}1\cdot10^{12}+2\cdot10^{10}$

Ejercicio 7 Calcular y expresar el resultado en notación científica:

a) $\dfrac{30 \cdot 10^{-4} + 7 \cdot 10^{-4}}{10 \cdot 10^{5} - 5 \cdot 10^{5}}$

b) $\dfrac{7{,}35 \cdot 10^{4}}{5 \cdot 10^{-3}} + 3{,}2 \cdot 10^{7}$

c) $(4{,}3 \cdot 10^{3} - 7{,}2 \cdot 10^{5})^{2}$

4. Raíces. Potencias de exponente fraccionario

4.1. Raíz de un número.

La raíz es la **operación inversa de la potencia**, y por tanto es la que se utiliza para despejar una ecuación de la forma $x^n=a$, siendo el resultado $x=\sqrt[n]{a}$. Veamos un **ejemplo**: calcular el lado de un depósito de agua de forma cúbica de $125dm^3$. Como el volumen del cubo es $V=l^3$, buscamos un valor de l, tal que su cubo sea $125dm^3$, es decir resolver $l^3=125dm^3$, la solución está en la raíz cúbica → $l=\sqrt[3]{125dm^3}=5dm$

Definición: la raíz enésima de un número a es aquel número b ($b=\sqrt[n]{a}$) tal que $b^n=a$.

índice → $\sqrt[n]{a}=b$ ← raíz

radicando

Número de soluciones de una **raíz** según la paridad del índice y el signo del radicando:

Paridad n \ Signo a	Positivo (a>0)	Negativo (a<0)
n es par	Dos soluciones $\sqrt{4}=\pm 2$	No solución $\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$
n es impar	Una solución $\sqrt[3]{8}=2$	Una solución $\sqrt[3]{-8}=-2$

Ejercicio 8. Calcular las siguientes raíces

a) $\sqrt[3]{125}$ b) $\sqrt[5]{-32}$ c) $\sqrt[4]{625}$ d) $\sqrt[6]{-1.000.000}$ e) $\sqrt[3]{216}$

Ejercicio 9. Calcular las siguientes raíces con la calculadora

a) $\sqrt[3]{1345}$ b) $\sqrt[5]{-4352}$ c) $\sqrt[4]{1224}$ d) $\sqrt[6]{-13465}$ e) $\sqrt[3]{2516}$

4.2. Potencias de exponente fraccionario. Radicales

En los apartados anteriores hemos estudiado las potencias cuando los exponentes eran o bien números naturales o enteros. Nos falta ahora entender el significado cuando la potencia es una fracción. Veamos el significado de $a^{\frac{n}{p}}$

$$\boxed{a^{\frac{n}{p}}=\sqrt[p]{a^n}}$$

Ejemplos:

$(-3)^{4/5} = \sqrt[5]{(-3)^4} = \sqrt[5]{81}$ $\qquad$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2/3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}}$

La ventaja de poner una raíz como potencia fraccionaria es que cuando este está representado mediante una potencia podremos aplicar las propiedades de las potencias visto en el apartado 2.1

Ejemplos:

a) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}}\cdot 7^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 7^1 = 7$

b) $\sqrt[3]{5^6} = 5^{\frac{6}{3}} = 5^2 = 25$

c) $\frac{1}{\sqrt[5]{4}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{5}}} = 4^{-\frac{1}{5}}$

d) $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{16^{\frac{1}{2}}}{16^{\frac{1}{4}}} = 16^{\frac{1}{2}}\cdot 16^{-\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = \pm 2$

Ejercicio 10. Pasar las raíces a potencias y las potencias a raíces

a) $\sqrt[4]{7}$ **b)** $\sqrt[3]{2^4}$ **c)** $\sqrt[3]{3^6}$ **d)** $2^{1/5}$ **e)** $12^{2/3}$ **f)** $3^{3/4}$

Ejercicio 11. Expresar como potencia única y radical pasando previamente a potencia y aplicando las propiedades de las potencias.

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}$ **b)** $2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ **c)** $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt[3]{4}}$ **d)** $\frac{\sqrt[3]{a^8}}{a^2}$ **e)** $\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}$ **f)** $a\cdot\sqrt{\frac{1}{a}}$

Ejercicio 12: Calcular el valor aproximado con la calculadora

a) $\sqrt[5]{9{,}5^2}$

b) $\sqrt[3]{-173}$

c) $\sqrt[4]{\left(\frac{14}{9}\right)^3}$

d) $\sqrt[4]{5^{-9}}$

e) $28^{\frac{3}{4}}$

f) $8^{-\frac{1}{3}}$

g) $0{,}03^{-\frac{3}{2}}$

h) $\left(\sqrt[5]{0{,}0025}\right)^{-1}$

i) $\sqrt{-2}$

Ejercicio 13: Expresar en forma de exponencial

a) $\sqrt[3]{x^2}$ **b)** $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}$ **c)** $\left(\sqrt[5]{a^2}\right)^3$

d) $\left(\sqrt{a}\right)^{-3}$ **e)** $\sqrt[8]{a^5\cdot a^2}$ **f)** $\left(\sqrt[4]{a^2}\right)^2$

Ejercicio 14: Expresar en forma de raíz

a) $(a^2)^{\frac{1}{3}}$ **b)** $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$ **c)** $(x^{-1})^{\frac{5}{4}}$ **d)** $\left(3^{-\frac{2}{5}}\right)^{\frac{10}{3}}$

e) $\left(a^{\frac{1}{5}}\right)^{-4}$ **f)** $2^{1,\hat{3}}$

4.3. Radicales equivalente

Observa las siguientes igualdades:

$3=\sqrt{3^2}=\sqrt[3]{3^3}=\sqrt[4]{3^4}=\ldots=\sqrt[n]{a^n}$, se dice que todos estos radicales son equivalentes

Veámoslo en forma de potencia:

$3=3^{\frac{2}{2}}=3^{\frac{3}{3}}=3^{\frac{4}{4}}=\ldots=3^{\frac{n}{n}}$

Definición: dos radicales son equivalentes si expresados en forma exponencial los exponentes son fracciones equivalentes:

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[p]{a^q}\leftrightarrow a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{p}{q}}\leftrightarrow\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$$

Construcción de radicales equivalentes: a veces nos interesa tener un radical equivalente para operar, veamos como generar radicales equivalentes:

$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}}$

Ejemplo: $\sqrt[3]{a^4}=\sqrt[6]{a^8}$

Esta propiedad es muy útil para:

1) Simplificar radicales: $\sqrt[8]{2^4}=\sqrt{2}$

2) Productos de radicales: $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[5]{2}=\sqrt[15]{2^5}\sqrt[15]{2^3}=\sqrt[15]{2^8}$ (se puede hacer en forma de potencia fraccionaria, $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[5]{2}=2^{\frac{1}{3}}\cdot2^{\frac{1}{5}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}=2^{\frac{8}{15}}=\sqrt[15]{2^8}$)

Ejercicio 15: simplificar los siguientes radicales:

a) $\sqrt[8]{625}$

b) $\sqrt[12]{64000}$

Ejercicio 16: reduce al mismo índice los siguientes grupos de radicales

a) $\sqrt[4]{6},\ \sqrt{3},\ \sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt[6]{8},\ \sqrt[5]{3},\ \sqrt[3]{6}$

4.4. Operaciones con raíces

Veremos primero como operar con radicales con mismo índice. Estas propiedades se pueden entender si expresamos las raíces como potencias fraccionarias.

1) **Multiplicación:** $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b} \rightarrow a^{1/n}\cdot b^{1/n}=(a\cdot b)^{1/n}$

Ejemplo: $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{7}=\sqrt[3]{14}$

2) **División:** $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} \rightarrow \dfrac{a^{1/n}}{b^{1/n}}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{1/n}$

Ejemplo: $\dfrac{\sqrt[3]{14}}{\sqrt[3]{7}}=\sqrt[3]{2}$

3) **Potencia:** $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m} \rightarrow \left(a^{1/n}\right)^m=a^{m/n}$

Ejemplo: $\left(\sqrt[5]{2}\right)^3=\sqrt[5]{8}$

4) **Raiz:** $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a} \rightarrow \left(a^{1/n}\right)^{1/m}=a^{1/(m\cdot n)}$

Ejemplo: $\sqrt{\sqrt[5]{2}}=\sqrt[10]{2}$

5) **Suma** → ¡¡¡no se pueden sumar raíces que no sean iguales!!!

Ejemplo: $\sqrt{2}+\sqrt{3}\neq\sqrt{5}$

Si podemos sumar raíces iguales: $\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=(1+3-2)\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

Cuando multiplicamos o dividimos radicales, para operar con ellos es necesario que tengan mismo índice, por esto tendremos que buscar radicales equivalentes con mismo índice. Otra forma es utilizar potencias fraccionarias y las propiedades de las potencias.

Ejemplos:

1) $\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[15]{2^3}\cdot\sqrt[15]{5^5}=\sqrt[15]{2^3\cdot5^5}=\sqrt[15]{8\cdot3125}=\sqrt[15]{25000}$

$2^{1/5}\cdot5^{1/3}=2^{3/15}\cdot5^{5/15}=\left(2^3\cdot5^5\right)^{1/15}=(25000)^{1/15}=\sqrt[15]{25000}$

2) $\dfrac{\sqrt[4]{x^2y^3}}{\sqrt[3]{xy}}=\dfrac{\sqrt[12]{\left(x^2y^3\right)^3}}{\sqrt[12]{(xy)^4}}=\dfrac{\sqrt[12]{\left(x^6y^9\right)}}{\sqrt[12]{x^4y^4}}=\sqrt[12]{\dfrac{x^6y^9}{x^4y^4}}=\sqrt[12]{x^2y^5}$

Ejercicio 17: Opera utilizando las propiedades de las raíces

a) $\sqrt{\sqrt[3]{4}}$ **b)** $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{3}$ **c)** $\left(\sqrt[3]{2}\right)^4$ **d)** $\sqrt[4]{24}:\sqrt{2}$

e) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}}\cdot\sqrt[6]{3}$ **f)** $\left(\sqrt{4}\right)^3:\sqrt[4]{2}$ **g)** $\sqrt{2}+2\sqrt{2}-4\sqrt{2}+1/2\sqrt{2}$

4.5. Introducción y extracción de factores en un radical.

1) Extracción: cuando podemos expresar el radical como producto de factores elevados a exponentes, de forma que algún exponente es mayor que el índice del radical, este factor se puede extraer de la raíz de la siguiente forma:

$$\sqrt{360}=\sqrt{2^3\cdot 3^2\cdot 5}=\sqrt{2^2\cdot 2\cdot 3^2\cdot 5}=2\cdot 3\sqrt{10}=6\sqrt{10}$$

$$\sqrt[4]{1536}=\sqrt[4]{2^9\cdot 3}=\sqrt[4]{2^8\cdot 2\cdot 3}=2^2\sqrt[4]{6}=4\sqrt[4]{6}$$

$$\sqrt[3]{6750}=\sqrt[3]{2\cdot 5^3\cdot 3^3}=15\sqrt[3]{2}$$

Ejercicio 18. Extraer todos los factores posibles:

a) $\sqrt{512}$ **b)** $\sqrt[3]{216}$ **c)** $\sqrt[4]{405}$ **d)** $\sqrt{6250}$

2)Introducción: para introducir factores dentro de una raíz tendremos que elevar este factor al índice de la raíz. Veamos algunos ejemplos:

$$5\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3\cdot 5^3}=\sqrt[3]{375}$$

$$2^2\sqrt{5}=\sqrt{2^4\cdot 5}=\sqrt{80}$$

$$\frac{\sqrt[3]{81}}{3}=\sqrt[3]{\frac{81}{3^3}}=\sqrt[3]{3}$$

Ejercicio 19. Introducir dentro de los radicales:

a) $\frac{\sqrt[3]{810}}{3}$ **b)** $\frac{\sqrt[4]{320}}{2}$ **c)** $\frac{\sqrt{83}}{4}$ **d)** $5\sqrt[3]{2}$

4.6. Suma de radicales

Para sumar o restar radicales es necesario que estos tengan mismo índice y mismo radicando, es decir sean iguales. Veamos cómo se suman o restan:

$$a\cdot\sqrt[n]{c}\pm b\cdot\sqrt[n]{c}=(a\pm b)\cdot\sqrt[n]{c}$$

Ejemplos:

a) $3\cdot\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{3}+5\cdot\sqrt{3}=(3-2+5)\cdot\sqrt{3}=6\cdot\sqrt{3}$

b) $3\cdot\sqrt[3]{2}-4\cdot\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}=3\cdot\sqrt[3]{2}-4\cdot\sqrt[3]{2\cdot 2^3}+\sqrt[3]{2\cdot 3^3}=3\cdot\sqrt[3]{2}-8\cdot\sqrt[3]{2}+3\cdot\sqrt[3]{2}=-2\cdot\sqrt[3]{2}$

Ejercicio 19. Operar:

a) $\sqrt{12}-\sqrt{27}+3\cdot\sqrt{48}$ **b)** $3\cdot\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{375}+\sqrt[3]{648}$ **c)** $3\cdot\sqrt[4]{32}-5\cdot\sqrt[4]{162}+\sqrt[4]{512}$

Soluciones a los ejercicios

Ejercicio 1

a) $\frac{47}{12}$ **b)** $\frac{-301}{204}$ **c)** $\frac{-59}{6}$ **d)** -30 **e)** $\frac{2533}{540}$

f) $\frac{125}{92}$ **g)** $\frac{-565}{66}$ **h)** $\frac{79}{24}$ **i)** $\frac{-15}{244}$ **j)** $\frac{10}{51}$

Ejercicio 2.

a) $8^{-3}=\frac{1}{8^3}$ b) $5^{-2}=\frac{1}{5^2}$ c) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-4}=\left(\frac{2}{5}\right)^{4}=\frac{2^4}{5^4}$ d) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=4^2$

e) $(-4)^{-2}=\frac{1}{(-4)^2}=\frac{1}{4^2}$ f) $\left(\frac{-3}{5}\right)^{-3}=\left(-\frac{5}{3}\right)^{-3}=-\left(\frac{5}{3}\right)^{-3}$

Ejercicio 3.

a) $5^2\cdot 5^{-4}\cdot 5^5\cdot 5^{-3}=5^0=1$

b) $3^2:3^{-3}\cdot 3^5:3^4=3^6=19683$

c) $2^2\cdot 4^{-4}\cdot 2^5:8^{-2}=2^5=32$

d) $\frac{6^2\cdot 6^{-4}}{6^3:6^4}=6^{-1}=1/6$

e) $(2^5)^{-2}\cdot(2^{-2})^{-5}:(2^3)^{-4}=2^{12}=4096$

Ejercicio 4.

a) $7{,}823\cdot 10^{-5}\cdot 1{,}84\cdot 10^{18}=14{,}39432\cdot 10^{13}=1{,}439432\cdot 10^{14}$

b) $2{,}35\cdot 10^8+1{,}43\cdot 10^7=23{,}5\cdot 10^7+1{,}43\cdot 10^7=24{,}93\cdot 10^7=2{,}493\cdot 10^8$

Ejercicio 5

a) $4230000000=4{,}23\cdot 10^9$
b) $0{,}00000004=4\cdot 10^{-8}$
c) $84300=8{,}43\cdot 10^4$
d) $-0{,}000572=-5{,}72\cdot 10^{-4}$

Ejercicio 6

a) $(3\cdot 10^{-7})\cdot(8\cdot 10^{18})=24\cdot 10^{11}=2{,}4\cdot 10^{12}$
b) $(5\cdot 10^{12}):(2\cdot 10^{-3})=10\cdot 10^9=10^{10}$

c) $(5\cdot 10^9)^2=25\cdot 10^{18}=2{,}5\cdot 10^{19}$

d) $3{,}1\cdot 10^{12}+2\cdot 10^{10}=310\cdot 10^{10}+2\cdot 10^{10}=312\cdot 10^{10}=3{,}12\cdot 10^{12}$

Ejercicio 7

a) $7{,}4\cdot 10^{-9}$
b) $4{,}67\cdot 10^7$
c) $5{,}12\cdot 10^{11}$

Ejercicio 8

a) $\sqrt[3]{125} = 5$ b) $\sqrt[5]{-32}$=-2

c) $\sqrt[4]{625} = 5$ d) $\sqrt[6]{-1.000.000} \notin \mathbb{R}$ e) $\sqrt[3]{216} = 6$

Ejercicio 9.

a) $\sqrt[3]{1345}$ b) $\sqrt[5]{-4352}$ c) $\sqrt[4]{1224}$ d) $\sqrt[6]{-13465}$ e) $\sqrt[3]{2516}$

Ejercicio 10.

a) $\sqrt[4]{7}=7^{1/4}$ **b)** $\sqrt[3]{2^4}=2^{4/3}$ **c)** $\sqrt[3]{3^6}=3^{6/3}=3^2=9$

d) $2^{1/5}=\sqrt[5]{2}$ **e)** $12^{2/3}=\sqrt[3]{12^2}$ **f)** $3^{3/4}=\sqrt[4]{3^4}$

Ejercicio 11

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 3^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{3^5}$

b) $2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{4}} = 2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2^2}} = 2\cdot\sqrt[3]{2^{-2}} = 2\cdot 2^{-\frac{2}{3}} = 2^{1-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

c) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt{2^3}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{2}{3}}} = 2^{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5}$

d) $\frac{\sqrt[3]{a^8}}{a^2} = \frac{a^{\frac{8}{3}}}{a^2} = a^{\frac{8}{3}-2} = a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$

e) $\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}} = \left(\frac{1}{a^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{2\cdot\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = a^{-\frac{2}{3}}$

f) $a\cdot\sqrt{\frac{1}{a}} = a\sqrt{a^{-1}} = a\cdot a^{-\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

Ejercicio 12

a) $\sqrt[5]{9{,}5^2} = 2{,}46...$

b) $\sqrt[3]{-173} = -5{,}57...$

c) $\sqrt[4]{\left(\frac{14}{9}\right)^3} = 1{,}39...$

d) $\sqrt[4]{5^{-9}} = 0{,}0267...$

e) $28^{\frac{3}{4}} = 12{,}17...$

f) $8^{-\frac{1}{3}} = 0{,}5$

g) $0{,}03^{-\frac{3}{2}} = 192{,}45...$

h) $\left(\sqrt[5]{0{,}0025}\right)^{-1} = 3{,}31...$

i) $\sqrt{-2} \rightarrow \textit{no existe}$

Ejercicio 13:

a) $\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$

b) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}=\sqrt[3]{x^{\frac{1}{4}}}=\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{12}}=\sqrt[12]{x}$

c) $\left(\sqrt[5]{a^2}\right)^3=\left(a^{\frac{2}{5}}\right)^3=a^{\frac{6}{5}}$

d) $\left(\sqrt{a}\right)^{-3}=\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{-3}=a^{-\frac{3}{2}}$

e) $\sqrt[8]{a^5\cdot a^2}=\sqrt[8]{a^7}=a^{\frac{7}{8}}$

f) $\left(\sqrt[4]{a^2}\right)^2=\left(a^{\frac{2}{4}}\right)^2=a^{\frac{4}{4}}=a$

Ejercicio 14

a) $(a^2)^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}$

b) $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}$

c) $(x^{-1})^{\frac{5}{4}}=x^{-\frac{5}{4}}=\dfrac{1}{x^{\frac{5}{4}}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^5}}$

d) $\left(3^{-\frac{2}{5}}\right)^{\frac{10}{3}}=3^{-\frac{2}{5}\cdot\frac{10}{3}}=3^{-\frac{4}{3}}=\dfrac{1}{3^{\frac{4}{3}}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3^4}}$

f) $\left(a^{\frac{1}{5}}\right)^{-4}=a^{-\frac{4}{5}}=\dfrac{1}{a^{\frac{4}{5}}}=\dfrac{1}{\sqrt[5]{a^4}}$

g) $2^{1,\hat{3}}=2^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{2^4}$

Ejercicio 15:

a) $\sqrt[8]{625}=\sqrt[8]{5^4}=\sqrt{5}$

b) $\sqrt[12]{64000}=\sqrt[12]{2^9\cdot 5^3}=\sqrt[12]{\left(2^3\cdot 5\right)^3}=\sqrt[4]{40}$

Ejercicio 16:

a) $\sqrt[4]{6},\ \sqrt{3},\ \sqrt[3]{2}$ → mcm(4,3,2)=12

$\sqrt[12]{6^3},\ \sqrt[12]{3^6},\sqrt[12]{2^4}$

b) $\sqrt[6]{8},\ \sqrt[5]{3},\ \sqrt[3]{6}$ → mcm(6,5,3)=30

$\sqrt[30]{8^5},\ \sqrt[30]{3^6},\ \sqrt[30]{6^{10}}$

Ejercicio 17:

a) $\sqrt{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[6]{4}$

b) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{3}=\sqrt[12]{2^4\cdot 3^3}=\sqrt[12]{432}$

c) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^4=\sqrt[3]{2^4}$

d) $\sqrt[4]{24}:\ \sqrt{2}=\sqrt[4]{24:2^2}=\sqrt[4]{6}$

e) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}}\cdot\sqrt[6]{3}=\sqrt[9]{2}\cdot\sqrt[6]{3}=\sqrt[18]{2^2\cdot 3^3}=\sqrt[18]{108}$

f) $\left(\sqrt{4}\right)^3:\sqrt[4]{2}=\sqrt{4^3}:\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{4^2:2}=\sqrt[4]{8}$

g) $\sqrt{2}+2\sqrt{2}-4\sqrt{2}+1/2\sqrt{2}=-1/2\sqrt{2}$

Ejercicio 18.

a) $\sqrt{512}=\sqrt{2^9}=\sqrt{2^8\cdot 2}=2^4\sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{216}=\sqrt[3]{2^3\cdot 3^3}=2\cdot 3=6$

c) $\sqrt[4]{405}=\sqrt[4]{3^4\cdot 5}=3\cdot\sqrt[4]{5}$

d) $\sqrt{6250}=\sqrt{2\cdot 5^5\cdot}=\sqrt{2\cdot 5\cdot 5^4}=5^2\sqrt{10}=25\sqrt{10}$

Ejercicio 19.

a) $\dfrac{\sqrt[3]{810}}{3}=\sqrt[3]{\dfrac{810}{81}}=\sqrt[3]{10}$

b) $\dfrac{\sqrt[4]{320}}{2}=\sqrt[4]{\dfrac{320}{16}}=\sqrt[4]{20}$

c) $\dfrac{\sqrt{83}}{4}=\sqrt{\dfrac{83}{16}}$

d) $5\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2\cdot 5^3}=\sqrt[3]{250}$

Ejercicio 19.

a) $\sqrt{12}-\sqrt{27}+3\cdot\sqrt{48}=\sqrt{2^2\cdot 3}-\sqrt{3^3}+3\sqrt{3\cdot 2^4}=2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+3\cdot 2^2\sqrt{3}=11\sqrt{3}$

b) $3\cdot\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{375}+\sqrt[3]{648}=3\cdot\sqrt[3]{2^3\cdot 3}-\sqrt[3]{5^3\cdot 3}+\sqrt[3]{2^3\cdot 3^4}=3\cdot 2\cdot\sqrt[3]{3}-5\sqrt[3]{3}+2\cdot 3\cdot\sqrt[3]{3}=7\cdot\sqrt[3]{3}$

c) $3\cdot\sqrt[4]{32}-5\cdot\sqrt[4]{162}+\sqrt[4]{512}=3\cdot\sqrt[4]{2^5}-5\cdot\sqrt[4]{3^4\cdot 2}+\sqrt[4]{2^9}=3\cdot 2\cdot\sqrt[4]{2}-5\cdot 3\cdot\sqrt[4]{2}+2^2\cdot\sqrt[4]{2}=-5\cdot\sqrt[4]{2}$