Tema 1. Números Reales

1. Conjunto de los números Naturales (ℕ).

1.1. Introducción histórica

Los números naturales son los que ***se utilizan para contar*** 0, 1, 2… la necesidad del hombre en estos números surge desde el principio de los tiempos, lo complicado para la humanidad fue plasmar la información del número de ***forma simbólica***, es decir "representarlos" (tanto escrita como hablada).

La necesidad de los naturales es clara, los utilizamos desde que nos levantamos hasta que nos acostamos, la hora, el número de galletas que tomamos, las matrículas, el DNI, el número de alumnos que hay en clase…

Los Naturales tienen una doble aplicación, contar y ordenar que están intrínsecamente relacionadas entre sí. Veamos un ejemplo de cada uno y como se relacionan:

- ***Cardinales***: queremos saber cuántos alumnos hay en clase, para lo cual los colocamos (por ejemplo por orden de apellido) y contamos: 1, 2, 3…,24. Ya sabemos que hay 24 alumnos en nuestra clase.
- ***Ordinales***: queremos ordenar un grupo de elementos, a fin de identificar cada elemento con un número, por ejemplo los alumnos de una clase. Podemos ordenarlos como hicimos en el ejemplo anterior por apellido, así el que tenga el primer apellido por orden alfabéticos es el primero de la clase, el siguiente el segundo, el tercero…así hasta el último el vigésimo cuarto.

En un principio (prehistoria) la forma de identificar los números naturales se hacía mediante la identificación con el número de piedras, dedos o muescas en la pared; así cuatro muescas podían representar el número de visones que se habían cazado ese día.

Hoy en día todavía existen tribus en África que no tienen palabras para describir todos los números, y sólo distinguen entre la unidad y el par.

La dificultad de plasmar los números naturales al lenguaje simbólico es clara, pues recordemos que hay infinitos números naturales, por lo que no podremos identificar cada uno de ellos mediante un símbolo distinto. Surgen así distintas formas de identificar los naturales mediante los el lenguaje simbólico, es lo que llamamos códigos numéricos, que son esencialmente de de tres tipos:

1. ***Sumativo***: El número se identifica por sucesión símbolos que representan un determinado valor de elementos, siendo el número representado la suma de todos estos símbolos. El ejemplo más representativo son los códigos egipcios, griegos, babilónicos y chinos en ***base*** 10 y el maya en ***base*** 5.
2. ***Posicionales***: en donde un mismos símbolo toma diferente valor según la posición en que se encuentre; así el 5 en última posición representa 5 elementos, en la penúltima 50, en la anterior 500, etc. Esta notación es mucho más abreviada y cómoda que la posicional y fueron los árabes los que la introdujeron y Leonardo de Pisa (Fibonacci) quien la trajo a occidente en el siglo XI. En la actualidad es universalmente utilizado el código ***decimal de base*** 10
3. ***Mixta***: mezcla las dos anteriores, es sumativa pero a la vez un símbolo toma distinto valor según la posición en la que se encuentre. El ejemplo más característico es la numeración romana.

Antes de ver ejemplo de los distintos códigos, expliquemos que significa la palabra base que ha aparecido anteriormente en la explicación de los tipos de códigos.

La ***base*** no tiene el mismo significado para los códigos posicionales que para los sumativos, aunque intuitivamente son lo mismo:

- Así en los códigos posicionales la base es el ***número de símbolos distintos*** usados para escribir los diferentes números naturales, y que coinciden con los primeros números naturales. Base 10 tendremos entonces 10 símbolos {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}, a partir de los cuales representamos cualquier natural, por ejemplo cuatro mil trescientos veintidós es 4322.
- En los códigos sumativos la base es el ***número máximo*** de veces que se puede sumar un símbolo, una vez más y será necesario cambiar de símbolo. Por ejemplo la Maya que es base 5 para representar los cinco primeros números {0,1,2,3,4} se ponía un, dos, tres, cuatro puntos. Para el número 5 se pone otro símbolo distinto (raya) y el 6 es 5+1 (raya y punto) el 7 es 5+2 (raya y dos puntos), etc.

Veamos ahora como son los distintos códigos que hemos nombrado anteriormente, dándonos cuenta que si son del mismo tipo y la misma base la única diferencia será el símbolo usado en cada uno. (Figuras obtenidas de http://personales.ya.com/casanchi/)

Sumativos:

- **En Egipto mediante jeroglíficos (base 10)**

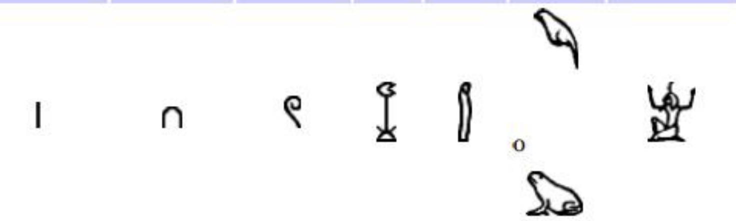
Valor	1	10	100	1.000	10.000	100.000	1 millón, o infinito
Jeroglífico						o	
Descripción	trazo vertical (bastoncito)	asa herradura invertida	o cuerda enrollada (espiral)	Flor de loto con tallo.	Dedo	Pájaro o rana.	Hombre arrodillado con las manos levantadas

Figura 1

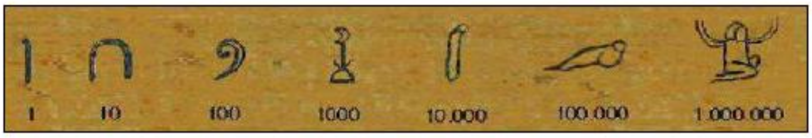


Figura 2

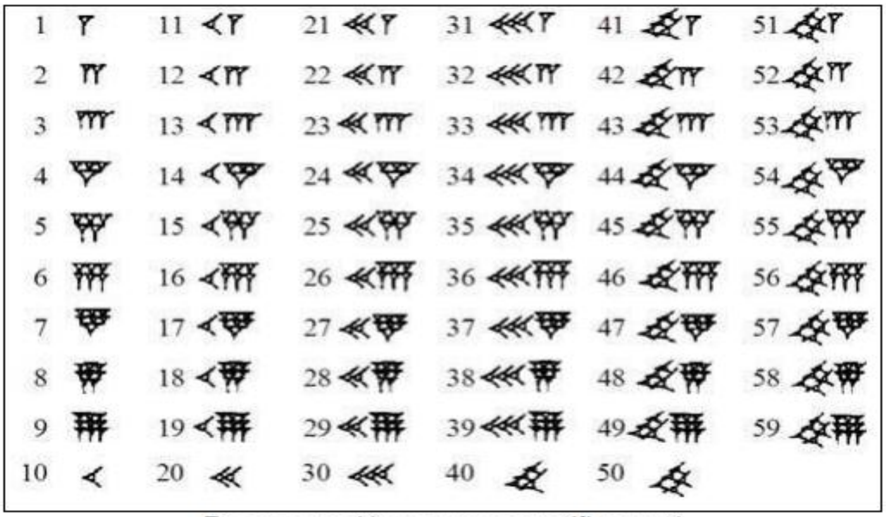
- **En Grecia mediante el alfabeto griego. (base 10)**

Relación entre letra y número (figura 3)

- **En China mediante ideogramas. (base 10)**

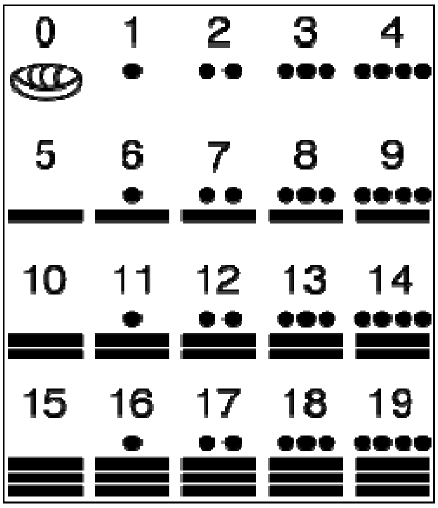
Notación China (figura 4)

- **En Babilonia mediante marcas. (base 10)**

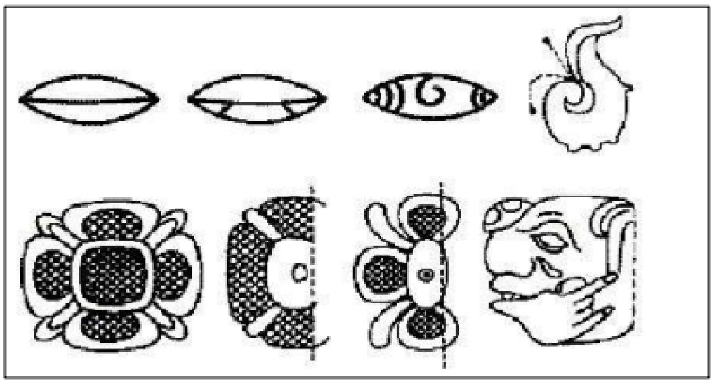


Representación por muescas (figura 5)

- **Notación Maya (código 5)**



Notación Maya (figura 6)



Representación del cero (figura7)

<u>Posicional:</u>

- la **actual** es de origen **arábiga**:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

Notación Arábiga, actual (figura 8)

<u>Mixta</u>

- **Romana**

I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI, XVII, XVIII, XIX

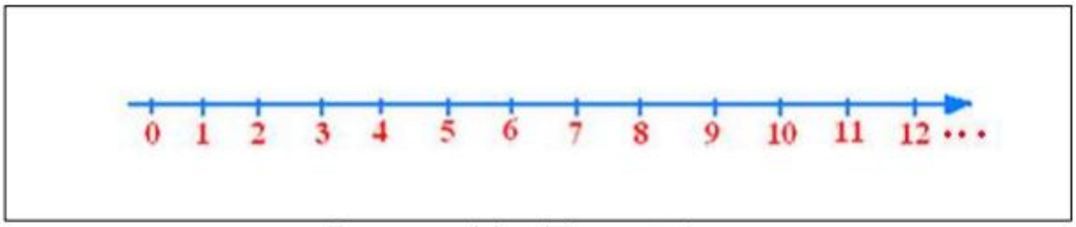
Notación Romana (figura 9)

1.2. Definición, representación y limitaciones de los Naturales.

La definición formal de los naturales tiene dos nombres propios, ***Peano*** (definición axiomática) y ***Cantor*** (a partir de teoría de conjuntos).

Los números naturales se identifican con la letra ℕ, y son como hemos dicho los que utilizamos para contar y ordenar, es decir ℕ={0, 1, 2, …}. Algunos autores no incluyen el ***cero*** dentro de los naturales.

Dado que los naturales están ordenados podemos representarlos en la recta real, sin más que fijar la posición del 0 y establecer el tamaño de la unidad:



Recta numérica (Figura 10.)

Las preguntas que planteo son las siguientes, ¿por qué necesitamos más tipos de números?, ¿Qué limitaciones tienen los naturales?. Por "desgracia" los naturales tienen muchas limitaciones, la más clara y que da origen a los números enteros es que no se pueden restar todos los naturales, sólo si en minuendo es mayor o igual al sustraendo; es decir 3-7 no se puede representar sólo con los números naturales, necesitamos ampliar el conjunto de números.

1.3. Distintos bases numéricas

Centrándonos ahora en los códigos de numeración posicional, vamos a ver como son estos códigos según la base con la que trabajemos. Estamos acostumbrados a usar la ***base 10***, y cualquier otra nos parece complicada y poco intuitiva, pero todas las bases son equivalentes en cuanto a dificultad y utilidad, si bien como hemos crecido desde pequeños usando el código decimal todo lo demás asusta y parece extraño, al igual que a los ingleses les resulta difícil el idioma español y a los españoles nos cuesta el idioma inglés.

¿Por qué código 10 si hemos dicho que son todos equivalentes?. La respuesta es el origen de la representación de los números, antes de haber el lenguaje simbólico los números se representaban con las manos, es decir con 10 dedos (ahora también sólo hay que ver a los niños pequeños cuando empiezan a contar). Así que estos 10 dedos se cree, y con lógica, que es la razón de que nuestro sistema de numeración sea decimal.

Vamos a ver cómo funciona el código decimal con un ejemplo para poder extrapolarlo al resto de códigos.

- Número a partir del código: $7.321=1\cdot10^0+2\cdot10+3\cdot10^2+7\cdot10^3$
- Dígitos a partir del número:

  7.321 | 10

  1   732 | 10

  2   73 | 10

  3   7

Los códigos numéricos más importantes son

- el ***código binario***, utilizado en informática (un bit es un dígito). Los símbolos son los que representan los dos primeros naturales {0,1}
- el ***código octal,*** también importante en sistemas computacionales ($8=2^3$). Los símbolos son los ocho primeros naturales {0,1,2,3,4,5,6,7}
- ***el código hexadecimal,*** también relacionado su uso con la computación ($16=2^4$). Los símbolos son los 16 primeros naturales, del natural 10 al 15 se representan por letras del abecedario:{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,a,b,c,d,e,f}

La notación que utilizaremos para distinguir cuando un número está escrito en uno u otro código es poniendo tras el número en pequeño la base (por comodidad para la base 10 no se pondrá tal información). Ejemplos: $126_{|8}$, $10101110_{|2}$, $a9b1e3_{|16}$

1.4. Cambio de bases

1.4.1. De código distinto del decimal a código decimal.

Es muy sencillo obtener la representación de un número en código decimal a partir de otro código, sólo hay que aplicar la definición y operar. Veamos algunos ***ejemplos***:

- $126_{|8} = 6\cdot 8^0+2\cdot 8+1\cdot 8^2=6+16+64=86$
- $10101110_{|2}=0\cdot 2^0+1\cdot 2^1+1\cdot 2^2+1\cdot 2^3+0\cdot 2^4+1\cdot 2^5+0\cdot 2^6+1\cdot 2^7=0+2+4+8+0+32+0+$ $+128=174$
- $a9b1e3_{|16}=3\cdot 16^0+14\cdot 16^1+1\cdot 16^2+11\cdot 16^3+9\cdot 16^4+10\cdot 16^5=11.121.123$

1.4.2. De código decimal a otro código.

Para pasar un número de código decimal a otro código n tendremos que expresar el número como potencias de n, para esto dividimos el número entre n sucesivas veces hasta que el cociente menor que n, tomando los restos obtendremos el número en dicho código. Veamos dos ***ejemplos***:

- 134 a código octal: $134=206_{|8}=6\cdot 8^0+0\cdot 8+2\cdot 8^2$

$$\begin{array}{l|l} 134 & 8 \\ \hline \underline{6} & 16 \;|\; 8 \\ & \underline{0} \quad 2 \end{array}$$

- 1.232 a código hexadecimal: $1.232=4d0_{|16}=0\cdot 16+13\cdot 16+4\cdot 16^2$

$$\begin{array}{l|l} 1.232 & 16 \\ \hline \underline{0} & 77 \;|\; 16 \\ & \underline{13} \quad 4 \end{array}$$

Ejercicio 1. Pasar a código decimal los siguientes números:

a) $157b_{|12}$
b) $321_{|4}$
c) $1010111_{|2}$

Ejercicio 2. Pasar el número 478 a los siguientes códigos:

a) Octal
b) Hexadecimal

2. El conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$)

2.1. Introducción histórica.

La necesidad de los enteros quedó de manifiesto en el apartado anterior cuando vimos la imposibilidad de con el conjunto de los naturales restar dos naturales cuando el sustraendo era mayor que el minuendo.

Corresponde a los Indios la diferenciación entre números positivos y negativos, que interpretaban como créditos y débitos, respectivamente, distinguiéndolos simbólicamente (hacia los años 650 d.C.).

En la Europa occidental tardó en llegar los números negativos, los primeros textos donde aparece la notación que identifican los negativos son de índole financiera, son textos del siglo XV. Surgen dos notaciones, la alemana (+ positivo, - negativo) y la italiana (p positivo, m negativos).

Aunque los negativos eran ya usados en el siglo XVIII no eran aceptados universalmente, de hecho se les llamó números absurdos o falsos. Fue el matemático Euler en este siglo el primero en darles estatuto legal y definir sus propiedades .

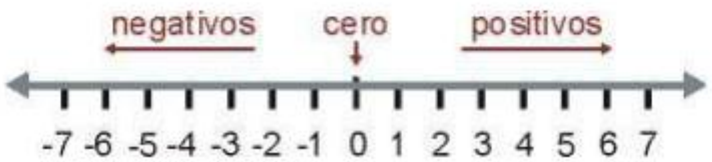
2.2. Definición, representación y limitaciones de los Enteros.

Los enteros se representan por la letra $\mathbb{Z}$ y es el conjunto de los números que incluyen a los naturales ({0,1,2,..}) y sus opuestos los ***negativos*** ({…,-2,-1}). Así los enteros son $\mathbb{Z}=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$.

Dentro de los enteros distinguimos los enteros positivos $\mathbb{Z}^+=\{1,2,3\ldots\}$, los enteros negativos $\mathbb{Z}^-=\{\ldots,-3,-2,1\}$. Con la notación anterior los enteros son por tanto la ***unión*** de los enteros positivos, los enteros negativos y el cero: $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$

Los enteros por tanto amplían el conjunto de los número naturales, ya que les contienen (todo número natural es entero). Esta ampliación se expresa de forma simbólica como $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\}$

La ***representación*** de los enteros en la recta real se hace de igual forma que los naturales, estando los enteros negativos a la izquierda del cero en la recta real pero igualmente espaciados que los naturales.



Pero los enteros al igual que los naturales siguen teniendo limitaciones. Cuando dividimos un entero entre otro que no sea divisor de éste (7:3 por ejemplo) el resultado no es entero…¡necesitamos seguir ampliando el conjunto de números!

3. El conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$)

3.1. Introducción histórica

Los números racionales o fraccionarios aparecieron muy pronto en la historia de las matemáticas. Como la gran mayoría de los conceptos matemáticos, su descubrimiento fue debido a la necesidad de resolver un problema.

Los antiguos necesitaban medir longitudes, áreas, tiempo, pesos y todo otro tipo de medidas. Al enfrentarse a esto en la vida cotidiana, pronto descubrieron que no era suficiente poder contar con los números naturales para hacerlo de manera exacta, ya que estas medidas eran susceptibles de divisiones más pequeñas que la unidad, o divisiones mayores que la misma pero que no eran números naturales, por lo que fue necesario ampliar el concepto de número natural. Así surgieron los números racionales.

Las fracciones aparecen ya en los primeros textos matemáticos de los que hay constancia, quizás uno de los más antiguos y más importantes sea el Papiro Rhind de Egipto, escrito hacia el 1.650 a.C. y que pasa por ser la mayor fuente de conocimiento de la matemática egipcia.

En Occidente no fue hasta el S. XIII cuando Leonardo de Pisa, más conocido por su apodo Fibonacci, introdujo el concepto de números quebrados o números “ruptus”, empleando además la raya para separar el numerador del denominador.

3.2. Definición, representación y limitaciones de los Racionales.

Antes de definir los números racionales hay que definir ***fracción:*** cociente indicado de dos números enteros en donde el ***divisor es distinto de cero*** ($\frac{a}{b}$). Al dividendo, a, se le denomina ***numerador*** e indica lo que dividimos y al divisor, b, se le llama ***denominador*** e indica las partes en las que se divide en numerador.

El conjunto de los números ***racionales o fraccionarios*** es aquel que puede expresarse mediante una fracción. Está claro que los números enteros están incluidos en los racionales, ya que este te puede poner en forma de fracción sin más que poner en el numerador el propio número y en el denominador el 1 (-7=-7/1)

Parece, a partir de la definición, que fracción es lo mismo que número racional, pero no es así. La fracción no es más que una forma de representar los números racionales, pero existen una infinidad de fracciones que representan el mismo número racional (las ***fracciones equivalentes***). Además como veremos los números racionales se pueden poner también de forma decimal.

Representar los números racionales es más complejo que los enteros. Antes de ver la representación vamos a ver cómo poner la fracción como ***número mixto.*** Numero mixto está formado por un numero entero sumado a una fracción en la que el denominador es mayor que el denominador. Veamos algunos ejemplos y como pasar de número mixto a fracción y al revés:

- Numero mixto a fracción:
  $2\,\frac{1}{3} = 2+\frac{1}{3} = \frac{5}{3}$;
  $4\frac{3}{5} = 4+\frac{3}{5} = \frac{23}{5}$
- Fracción a numero mixto
  $\frac{13}{5} = \frac{10+3}{5} = \frac{10}{5} + \frac{3}{5} = 2+\frac{3}{5} = 2\frac{3}{5}$

$$\frac{23}{6} = \frac{18+5}{6} = \frac{18}{6} + \frac{5}{6} = 3 + \frac{5}{6} = 3\,\frac{5}{6}$$

Nota: si el número es negativo se opera como si fuera positivo poniendo luego un signo menos delate del número mixto o la fracción:

$-\frac{15}{4}$=-3$\frac{3}{4}$ (para obtenerlo hacemos como si fuera positivo $\frac{15}{4}$=3+$\frac{3}{4}$ y luego cambiamos el signo)

-5$\frac{1}{6} = -5 - \frac{1}{6} = \frac{-31}{6}$

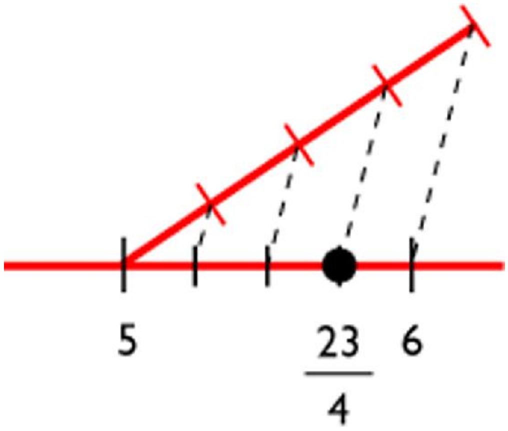
Importante: las fracciones, los números mixtos y la expresión decimal que veremos más adelante no son tipos de números sino forma de expresar los números racionales.

Pasos para ***representar*** un número racional (suponemos primero que es positivo):

1. Expresamos el número en forma mixta: n$\frac{a}{b}$
2. El número está en el segmento comprendido entre la parte entera del numero expresado en notación mixta (n) y el siguiente natural (n+1)
3. Dividimos el segmento anterior en tantas veces como el denominador de la parte fraccionaria (b). Para hacerlo nos ayudamos de una resta auxiliar y del teorema de Tales
4. Tomamos tantas partes a la derecha de n como indique el numerador (a) de la notación mixta.

Veamos un ***ejemplo*** 23/4:

23/4=5$\frac{3}{4}$



Si el número es negativo la forma de actuar es la misma pero a la izquierda del cero, es decir en la parte negativa de la recta real.

Ejercicio 3. Representar en la recta real los siguientes números racionales: a) 2/3, 9/4, -7/2.

La limitación de los números racionales que hace que tengamos que ampliar estos a los reales es que hay números que no se pueden poner en forma de fracción, los casos más importantes son las raíces no exactas ($\sqrt{2}, \sqrt{3}$ ...) y el número pi (π)

3.3. Expresión decimal de los números racionales. Paso de fracción a expresión decimal y de expresión decimal a fracción.

Como hemos dicho en la definición de número racional este se puede poner en forma de fracción, pero no es la única forma de expresar los racionales, también se puede expresar en forma decimal. Para obtener esta expresión no tenemos más que dividir la fracción, numerador entre denominador. Cuando dividimos puede ocurrir dos opciones, que la división termine con resto cero, o que llegue un momento que la expresión decimal se empiece a repetir (***periodo***). Según la expresión decimal los números racionales pueden ser de tres tipos:

- ***Exactos***: cuando tienen un número finito de cifras decimales (el resto da cero en algún momento). Ejemplos: $\frac{4}{1}=4, \frac{1}{4}=0.25,\ \frac{55}{16}=3{,}4375$
- ***Periódicos puros:*** el periodo está justo después de la coma, el periodo puede tener cualquier número de cifras. Ejemplos: $\frac{1}{3}=0.\hat{3},\ \frac{134}{99}=1.\widehat{35}, \frac{854}{333}=2,\widehat{564}$
- ***Periódicos mixtos:*** el periodo no está después de la coma hay al menos una cifra decimal antes. Ejemplos: $\frac{23}{15}=1{,}5\hat{3},\ \frac{11}{108}=0{,}10\widehat{185}$

Se puede saber el tipo de expresión decimal a partir de denominador de la fracción irreducible:

- Si el denominador sólo divisible por dos y por cinco es exacta $(\frac{1}{4}, \frac{55}{16}, \frac{7}{25})$
- Si no es divisible por dos ni cinco es periódica pura $(\frac{1}{3}, \frac{854}{333})$
- Si es divisible por dos o cinco y al menos algún número primo más es periódica mixta $(\frac{23}{15}, \frac{11}{108})$.

Para ***pasar de fracción a expresión decimal*** no hay más que dividir hasta que el resto sea cero (exacta) o se empiece a repetir (periódica pura o mixta)

Ejercicio 4. Identifica sin dividir si la expresión decimal de los siguientes números racionales es exacta, periódica pura o mixta a partir del denominador. Calcula la expresión decimal dividiendo.

a) $\frac{25}{6}$ $b)\ \frac{13}{20}$ $c)\ \frac{9}{30}$ $d)\ \frac{5}{21}$

Vamos a ver ahora como pasar de ***expresión decimal a fracción***, pero antes recordemos que sólo se pueden poner en forma de fracción si la expresión decimal es exacta o periódica, por ejemplo el número π que tiene infinitas cifras no periódicas no se puede poner como una fracción.

Antes de ver como se obtiene la fracción usemos la siguiente ***notación E'A$\hat{P}$*** para las expresiones decimales de los racionales, donde E es la parte entera, A es el anteperiodo si lo tiene, y P el periodo. Por ejemplo en $12{,}34\widehat{56}$ →E=12, A=34, P=56 .

Para obtener la fracción de la expresión decimal hay que hacerlo de forma distinta según la expresión decimal. Llamaremos x al número que queremos poner en forma de fracción:

a) ***Expresión decimal exacta***: multiplicamos a x por 10 si tiene una cifra decimal, 100 si tiene dos, etc. Despejamos x y tendremos la fracción, si esta no es irreducible no tenemos más que simplificarla.
Ejemplo: x= 0,342 → 1000·x=342 → x=$\frac{342}{1000}=\frac{171}{500}$

b) ***Expresión decimal periódica pura***: multiplicamos x por 10 si tiene el periodo una cifra, 100 si tiene dos, etc. Restamos a esta expresión obtenida x, de forma que el número que resulta es entero pues se va el periodo. Despejamos la x y tendremos el número en forma de fracción; simplificamos si es menester.

Ejemplo: x=$3,\widehat{21}$ → $100x=321,\widehat{21}$

$-\quad x= \ 3,\widehat{21}$

$99x=318$ → $x=\frac{318}{99}=\frac{106}{33}$

c) ***Expresión decimal periódica mixta***: multiplicamos a x por 100 si las suma de las cifras del periodo y anteperiodo son 2, 100 si son 3, etc. Restamos la cantidad obtenida por 10x si el anteperiodo tiene una cifra, 100x si tiene dos etc. El número obtenido es entero ya que se va el periodo. Despejando la x tendremos la fracción deseada, ya sólo nos queda simplificarla si no es irreducible.

Ejemplo: $x=12{,}02\hat{1}$ → $1000x=12021,\hat{1}$

$-100x= \ 1202,\hat{1}$

$900x=10819$ → $x=\frac{10819}{900}$

Existen tres fórmulas que nos permiten obtener de forma directa la fracción:

a) ***Expresión decimal exacta:*** $x=\frac{EA}{\underbrace{10...0}_{cifras\,A}}$ Ejemplo anterior 0,342=$\frac{342}{1000}=\frac{171}{500}$

b) ***Expresión decimal periódica pura***: $x=\frac{EP-E}{\underbrace{9...9}_{cifras\,P}}$ Ejemplo: $3,\widehat{21}=\frac{321-3}{99}=$

$=\frac{318}{99}=\frac{106}{33}$

c) ***Expresión decimal periódica mixta*** $x=\frac{EAP-EA}{\underbrace{9...9}_{cifras\,P}\underbrace{0...0}_{cifras\,A}}$

Ejemplo: $12{,}02\hat{1}=\frac{12021-1202}{900}=\frac{10819}{900}$

Ejercicio 5. Pasar a fracción las siguientes expresiones decimales (no usar las fórmulas, solo para comprobar).

a) $11,\hat{9}$, b) 23,21, c) $1{,}3\widehat{91}$, d) $-4{,}2\hat{9}$ e) $1,\widehat{89}$

4. El conjunto de los números reales (ℝ)

4.1. Introducción histórica

Ya en la época de los griegos se cree que sabían perfectamente de la imposibilidad de expresar algún número (la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos la unidad→ $\sqrt{2}$) en forma de fracción, es decir la necesidad de ampliar el conjunto de números. El problema que surge en esta época que los Pitagóricos tenían como principio matemático que los números eran todos de tipo racional, por lo que mantuvieron el “descubrimiento” en secreto.

4.2. Definición de los número irracionales ($\mathbb{I}$) y reales ($\mathbb{R}$)

Definición de los números ***Irracionales***: son aquellos que no son racionales, y por tanto no se pueden poner en forma de fracción. Se caracterizan porque tienen infinitas cifras decimales no periódicas. Existen infinitos números irracionales entre dos números cualesquiera.

Los números irracionales más usados son las ***raíces no exactas***: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$…aunque existen infinidad de ellos, simplemente con que tengan ***infinitas cifras no periódicas*** tendríamos uno, como por ejemplo 7,12122122212222…

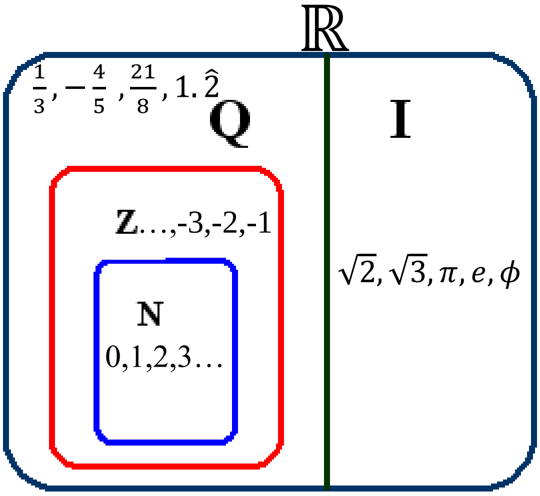
Existen tres números irracionales con símbolo propio por su importancia:

- El número pi (**π**): su nombre es en honor a Pitágoras, y representa el cociente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro ($l=2\cdot\pi\cdot r \rightarrow \pi=l/(2r)$). Las primeras cifras de π son π=3.1415926535….
- El número **e**, en honor al matemático del siglo XVII Euler. La definición de este número basado en el concepto de límites y lo veremos más adelante. Las primeras cifras del número son e= 2,71828…
- El numero fi (**φ o Φ**) también conocido como número de oro o divina proporción. Su origen es geométrico (ver anexo del final del tema). Su nombre se debe al escultor griego Fidias. Las primeras cifras del número son Φ=1,618033…

El conjunto formado por la unión de todos los racionales ($\mathbb{Q}$) y de los Irracionales ($\mathbb{I}$) forman el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) que son todos los números que veremos este año (en primero de ciencias se amplían a los complejos).

$\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{I}$

Vamos a ver un gráfico donde vemos las sucesivas ampliaciones de números:



Ejercicio 6: Clasificar los siguientes números indicando a que conjunto, $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R}$ pertenecen: $-\sqrt{9}$, -5, $\pi, \frac{2}{5}, \frac{36}{3}, 1.2\widehat{34}, 1.212212221$ ...

Ejercicio 7: Demuestra que el número $\sqrt{2}$ es irracional, es decir no se puede poner en forma de fracción. Para ello escribir en el buscador de Google el texto "raíz de dos es irracional" lee las web, entiéndelo y exprésalo con tus palabras de forma correcta.

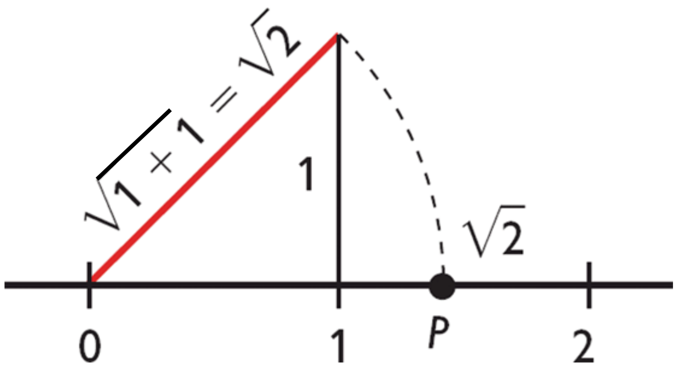
4.3. Representación de los número reales

En este apartado vamos a centrarnos en representar los irracionales, pues los racionales lo vimos en el apartado 3.

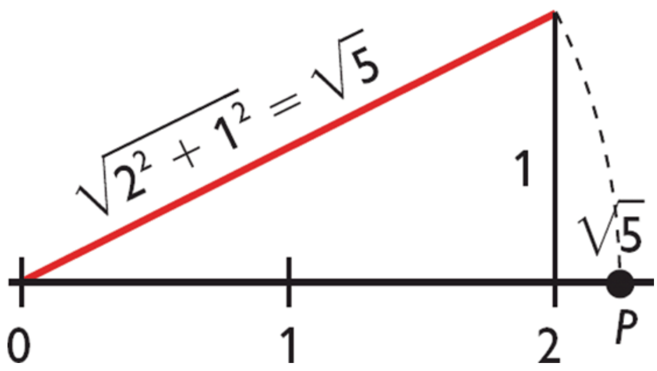
Sólo se pueden representar de forma exacta los irracionales en forma de ***raíz***, los demás se hacen de forma aproximada. Para representar $\sqrt{a}$ utilizamos el teorema de Pitágoras, buscando dos números que sepamos representar b y c tal que $a^2=b^2+c^2$, de esta forma la hipotenusa de este triángulo rectángulo es el número irracional buscado. Muchos irracionales los podemos representar a partir de dos catetos enteros, pero muchos de ellos se representan a partir de la raíz anterior.

Ejemplos de representación de las raíces que se obtienen con dos catos naturales:

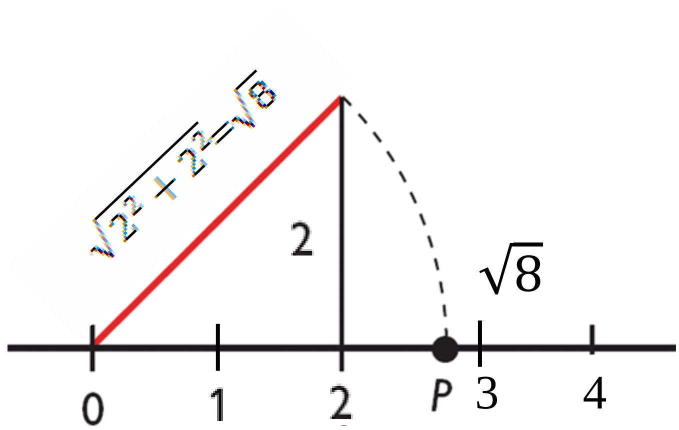
$$2=1^2+1^2 \rightarrow \sqrt{2}=\sqrt{1^2+1^2}$$



$$5=2^2+1^2 \rightarrow \sqrt{5}=\sqrt{2^2+1^2}$$

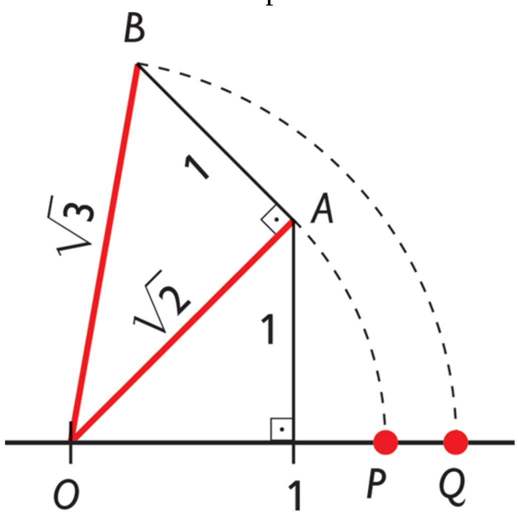


$8=2^2+2^2 \rightarrow \sqrt{8}=\sqrt{2^2+2^2}$



Veamos ahora como representar raíces que son imposibles de obtener a partir de triángulos rectángulos con catetos naturales, y por tanto necesitamos representar antes la raíz anterior.

$3=\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2 \rightarrow \sqrt{3}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2}$



De esta forma podemos representar cualquier raíz, muchas veces tenemos que representar 1, 2 o varios raíces antes. Por ejemplo $\sqrt{6}=\sqrt{2^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}$, $\sqrt{7}=\sqrt{2^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}$

Ejercicio 8: Representar las siguientes raíces $\sqrt{10}, \sqrt{18}$

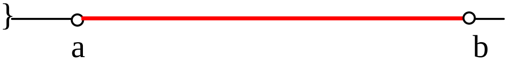
4.4. Intervalos y semirrectas

Los ***intervalos*** son los conjuntos de los números reales comprendidos entre dos puntos (extremos), dependiendo si los extremos están comprendidos o no en el intervalo se distinguen tres tipos de intervalos:

- ***Cerrados***: los extremos pertenecen al intervalo, la notación es con corchete $[a,b]=\{x\in\mathbb{R} : a \le x \le b\}$

Ejemplo: $[-2,3]=\{x\in\mathbb{R} : -2 \le x \le 3\}$

- ***Abiertos***: los extremos no pertenecen al intervalo, la notación es con paréntesis $(a,b)=\{x\in\mathbb{R} : a < x < b\}$



Ejemplo: $(-1,2)=\{x\in\mathbb{R} : -1 < x < 2\}$

- ***Semiabiertos o semicerrados:*** un extremo pertenece al intervalo y el otro no $[a,b)=\{x\in\mathbb{R} : a \le x < b\}$, $(a,b]=\{x\in\mathbb{R} : a < x \le b\}$

Ejemplo: $[0,4)=\{x\in\mathbb{R} : 0 \le x < 4\}$

Las ***semirrectas*** son los conjuntos de los números reales mayores o menores que un punto (extremo), dependiendo si el extremo está comprendidos o no en el intervalo se distinguen dos tipos de intervalos; la notación con infinito es siempre paréntesis:

- ***Cerrados***: el extremo pertenecen al intervalo, la notación es con corchete

$[a,\infty)=\{x\in\mathbb{R} : x \ge a\}$

$(-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R} : x \le b\}$

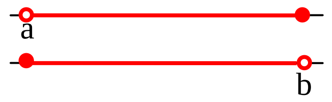
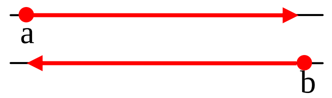
Ejemplo: $[-2,\infty)=\{x\in\mathbb{R} : x \ge -2\}$

- ***Abiertos***: el extremo no pertenecen al intervalo, la notación es con paréntesis

$(a, \infty)=\{x\in\mathbb{R} : x > a\}$

$(-\infty,b)=\{x\in\mathbb{R} : x < b\}$

Ejemplo: $(-\infty,-2)=\{x\in\mathbb{R} : x < -2\}$

CONJUNTOS MÁS IMPORTANTES DE LA RECTA REAL			
SUBCONJUNTO	SIMBOLO	DEFINICIÓN	REPRESENTACIÓN
Intervalo Abierto	(a,b)	$(a,b)=\{x\in R: a<x<b\}$ Números entre a y b(no incluidos)	
Intervalo Cerrado	$[a,b]$	$[a,b]=\{x\in R: a\leq x\leq b\}$ Números entre a y b(incluidos)	
Intervalos Semiabierto	$(a,b]$ $[a,b)$	$(a,b]=\{x\in R: a<x\leq b\}$ $[a,b)=\{x\in R: a\leq x<b\}$ Números entre a y b(uno incluido)	
Semirrectas abiertas	(a,∞) $(-\infty,b)$	$(a,\infty)=\{x\in R: x>a\}$ $(-\infty,b)=\{x\in R: x<b\}$	
Semirrectas cerradas	$[a,\infty)$ $(-\infty,b]$	$[a,\infty)=\{x\in R : x\geq a\}$ $(-\infty,b]=\{x\in R : x\leq b\}$	

Ejercicio 9: Representar los siguientes intervalos y semirrectas y expresar en forma simbólica:

a) $(-2,4]$ b) $(3,10)$ c) $[1,4]$ d) $(-\infty,2]$ e) $(1,\infty)$ f) $[3,\infty)$

4.5. Operaciones con conjuntos, unión e intersección.

Las operaciones más importantes con intervalos y semirrectas son la unión y la intersección:

- ***Unión de dos conjuntos:*** es el conjunto formado por los números que están en uno **o** en el otro conjunto.

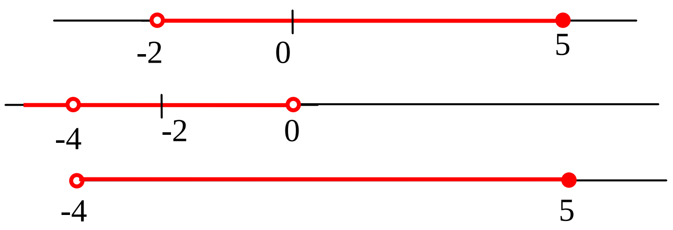
$A\cup B=\{x\in A \text{ ó } x\in B\}$

- ***Intersección de dos conjuntos:*** es el conjunto formado por los números que están en uno y en el otro conjunto.

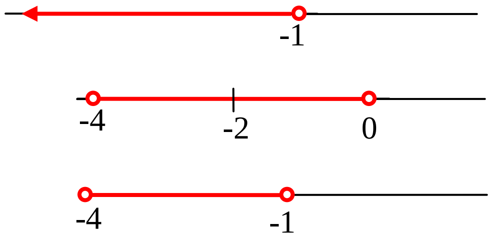
$A\cap B=\{x\in A \text{ y } x\in B\}$

Ejemplos:

$(-2,5]\cup(-4,0)=(-4,5]$



$(-\infty,-1)\cap(-4,0)=(-4,-1)$



Ejercicio 10: Representar y calcular los siguientes intervalos:

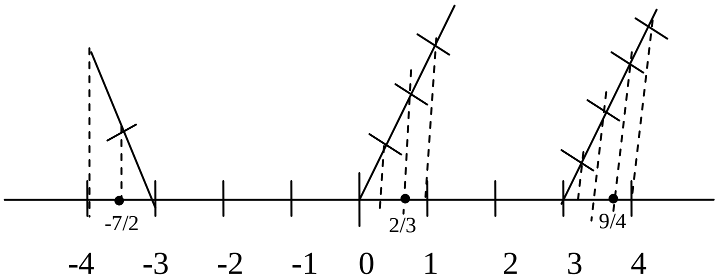
a) $(-1,2]\cup(0,4)$ b) $(-\infty,1]\cap(0,3]$ c) $(-\infty,0)\cup(-1,\infty)$ d) $(-2,0]\cap[1,3)$

Soluciones a los ejercicios:

1) a) 30.516, b) 57, c) 87

2) a) $736_{|8}$, $1de_{|16}$

3)



4) a) Periódico mixto 6=2·3 → $4{,}1\widehat{6}$
b) Exacto $20=2^2\cdot 5$ → 0,65
c) Ojo la fracción no irreducible $\frac{9}{30}=\frac{3}{10}$. Exacto 10=2·5 → 0,3
d) Periódico puro 21=3·7 → $0,\overline{238095}$

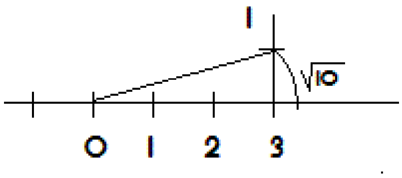
5) a) 12, b) $\frac{2321}{100}$, c) $\frac{1378}{990}$, d) $-\frac{43}{10}$, e) $\frac{188}{99}$

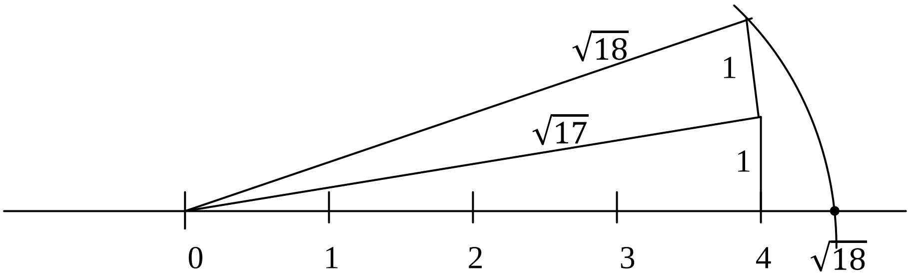
6) $-\sqrt{9}=-3\in \mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$, $-5\in \mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$ $\pi\in\mathbb{I},\mathbb{R}$ $\frac{36}{3}=12\in\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$

$\frac{2}{5}\in\mathbb{Q},\mathbb{R}$ $1.2\widehat{34}\in\mathbb{Q},\mathbb{R}$ $1.212212221\ldots\in\mathbb{I},\mathbb{R}$

7) Ver la web

8)





9) Sólo hay que cambiar la a y la b de la teoría por los números de los intervalos.

10) a) $(-1,2]\cup(0,4)=(-1,4)$ b) $(-\infty,1]\cap(0,3]=[1,1]$ c) $(-\infty,0)\cup(-1,\infty)=\mathbb{R}$
d) $(-2,0]\cap[1,3)=\varnothing$

Anexo (numero Φ): ver el siguiente enlace:

http://www.youtube.com/watch?v=j9e0auhmxnc