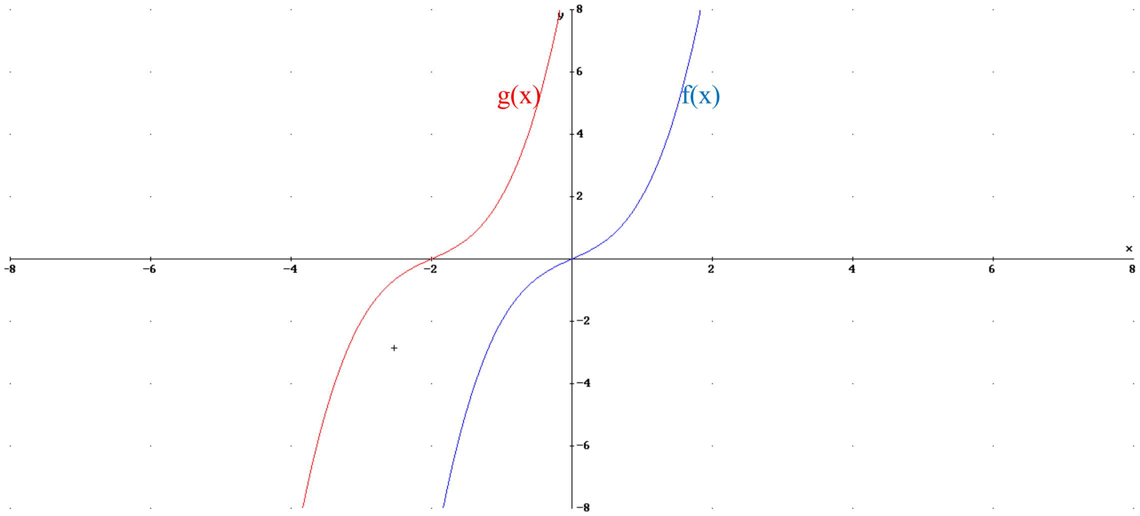
Tema 8. Funciones (II). Funciones lineales y cuadráticas.

1. Traslados de las gráficas horizontales y verticales.. 2
2. Funciones lineales. La recta 3
3. Función cuadrática. 5
   3.1. Introducción. Lugar geométrico.. 5
   3.2 La parábola como función.. 6
   3.2.1 Función parabólica o cuadrática del tipo $y=ax^2$..................................... 6
   3.2.2 Función parabólica del tipo $y=ax^2+c$ (desplazada verticalmente) 8
   3.2.3 Función parabólica del tipo $y=a(x-x_0)^2$ (desplazada horizontalmente)... 9
   3.2.4 Caso general, función parabólica del tipo $y=ax^2+bx+c$ 9

1. Traslados de las gráficas horizontales y verticales

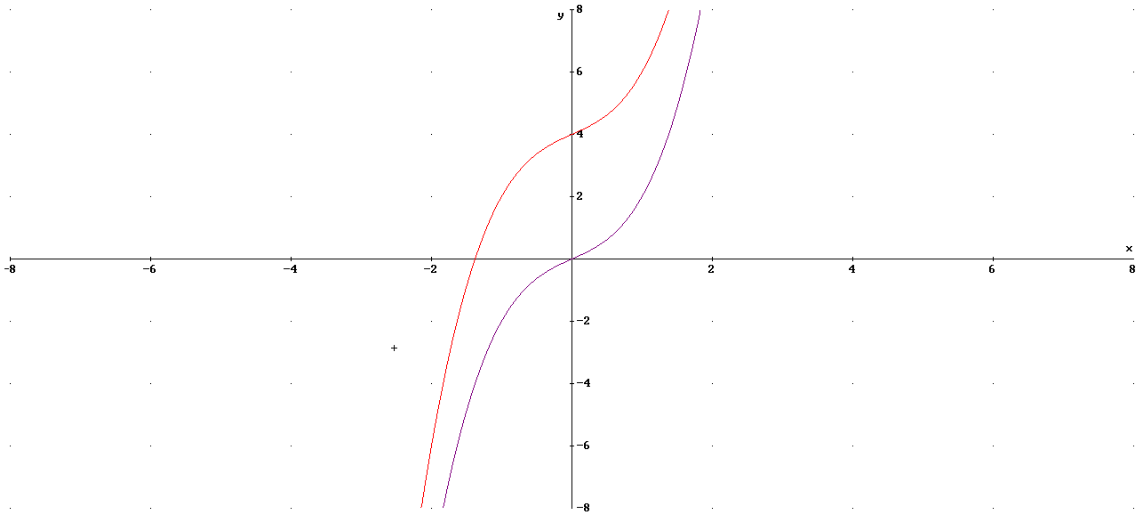
Horizontal: Sea una función y=f(x), si trasladamos la gráfica x_0 unidades en eje OX entonces la expresión analítica de la función resulta de cambiar x por $(x-x_0)$.

Ejemplo: $f(x)=x^3+x$ si lo trasladamos 2 unidades a la izquierda $(x_0=-2)$ obtendremos la sunción $g(x)=f(x+2)=(x+2)^3+(x+2)=x^3+6x^2+13x+10$



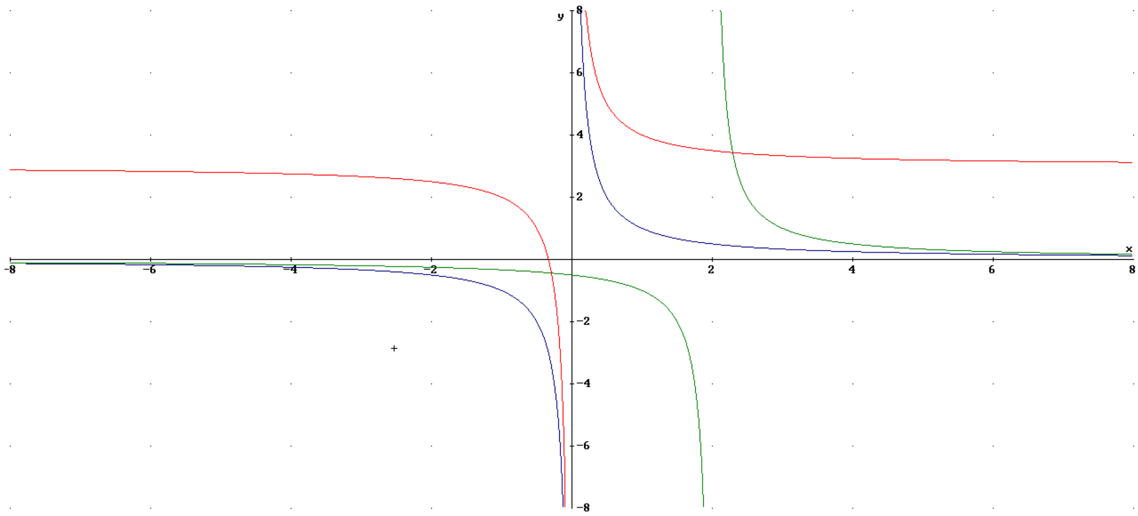
Vertical: Sea una función y=f(x), si trasladamos la gráfica y_0 unidades en eje OY entonces la expresión analítica de la función resulta de cambiar y por $(y-y_0)\rightarrow y=f(x)+y_0$

Ejemplo: $f(x)=x^3+x$ si lo trasladamos 4 unidades hacia arriba $(y_0=4)$ obtendremos la sunción $g(x)=x^3+x+4$



 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejercicio obtener la expresión analítica de g(x), h(x) si f(x)=1/x



Solución: g(x)=3+1/x; h(x)=1/(x-2)

2. Funciones lineales. La recta

La expresión analítica de una recta es y=f(x)=mx+n. Se caracteriza por tener un crecimiento o decrecimiento constante. Un ejemplo claro es la posición de un móvil en el tiempo en el movimiento rectilíneo uniforme. ($s=s_0+v\cdot t$, ejemplo s_0=1m, v=2m/s → s(t)=1+2t).

Veamos el significado de m y n:

1) ***m=pendiente de la recta***, nos explica el crecimiento de la función. Si m>0 crece y si m<0 decrece. Se cumple que m=$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\text{var}\,iacion\ y}{\text{var}\,iacion\ x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Si por ejemplo m=2/3→la función crece de tal forma que por cada vez que aumenta 3 unidades la x la y aumenta 2.

2) ***n=ordenada en el origen,*** es el punto de corte de la gráfica con el eje OY (es decir corta en (0,n))

Obtener la expresión analítica a partir de dos puntos: $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$:

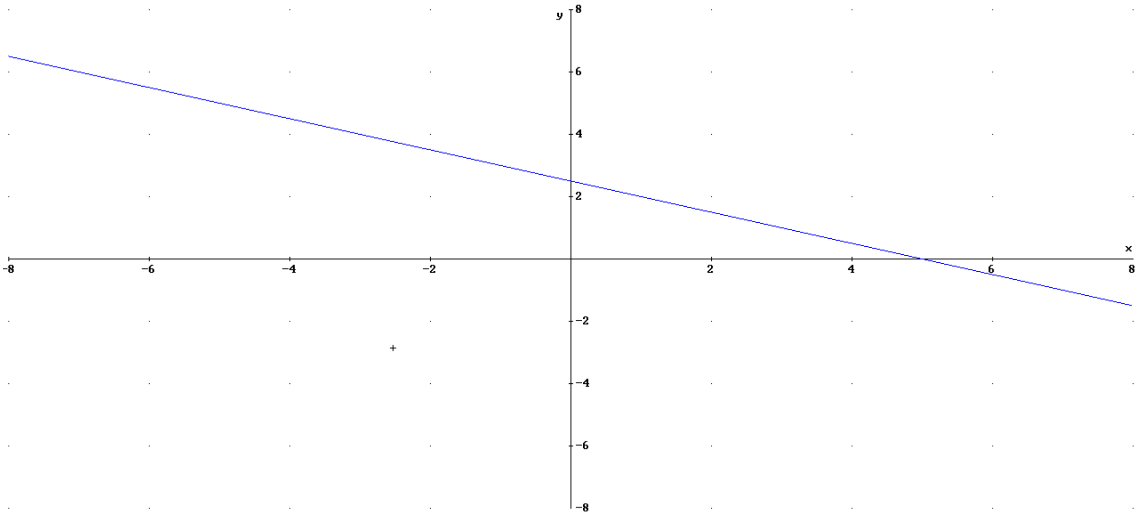
m= $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ → $y=y_1+m(x-x_1)$

Obtener la expresión analítica a partir de la gráfica: podemos obtener la ordenada en el origen viendo el punto de corte con el eje OY, y la pendiente a partir del crecimiento. También podemos obtenerlo a partir de identificar dos puntos en la gráfica y aplicar lo visto antes.

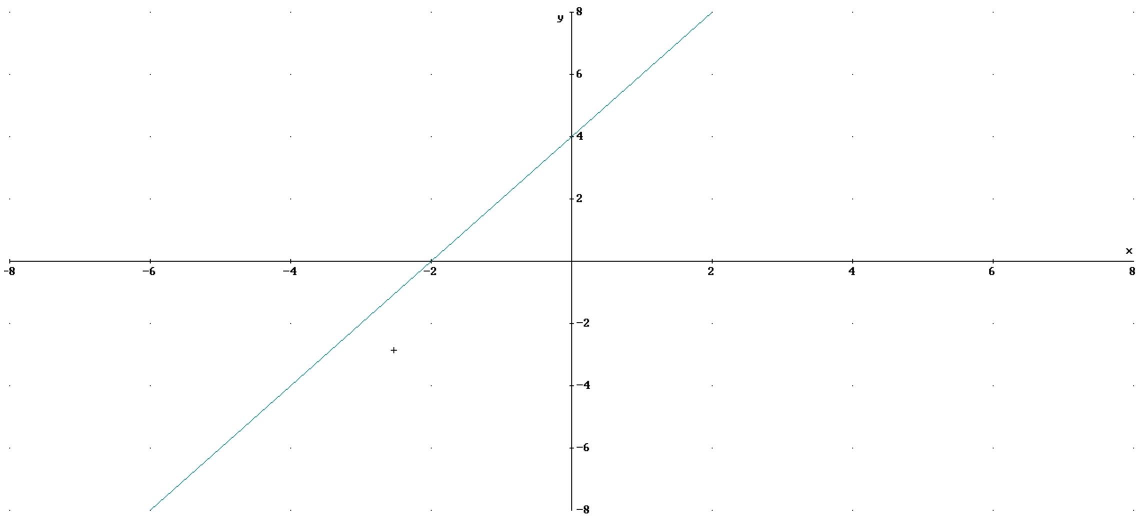
Ejemplo : obtener la expresión analítica de la recta que pasa por $P_1(1,2)$ y $P_2(-1,3)$ y dibujarla

m=$\frac{3-2}{-1-1}=-1/2$

y=2-1/2(x-1)=2.5-0.5x (decrece y corta en el eje y en 2.5)



Obtener la expresión analítica de la recta con la siguiente gráfica:



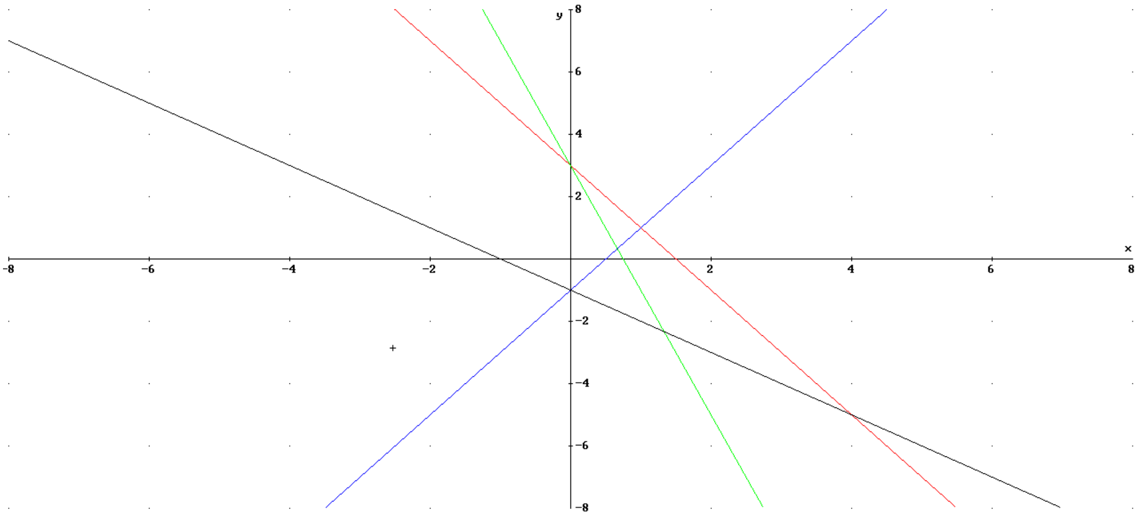
Podemos ver como n=4 y m=2, pues cada unidad que aumenta en x aumenta 2 en y.

y=2x+4

Ejercicio 1: sin necesidad de obtener la expresión analítica identifica las siguientes rectas:

a) y=-2x+3
b) y=2x-1
c) y=-4x+3
d) y=-x-1

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)



Solución

a→roja
b→azul
c→verde
d→negra

3. Función cuadrática.

3.1. Introducción. Lugar geométrico.

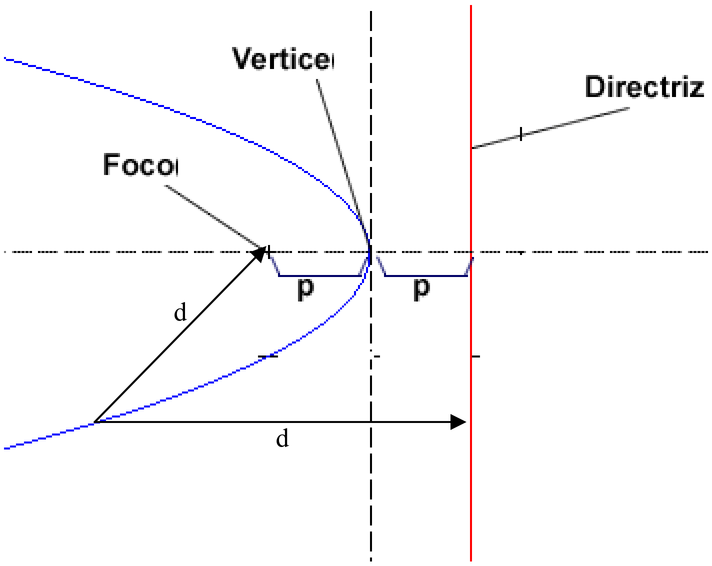
Las funciones cuadráticas son las funciones con expresión analítica de la forma $f(x)=a\cdot x^2+bx+c$. Las gráficas de estas funciones son siempre parábolas. Vamos a ver una introducción sencilla de lo que es una parábola.

La parábola es una curva muy importante por aparecer en multitud de ocasiones en la naturaleza y la técnica. Ejemplos:

- Lanzamientos balón de baloncesto
- Chorros de agua
- Las antenas parabólicas
- …

Geométricamente una parábola es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta (directriz) y de un punto (foco de la parábola).

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)



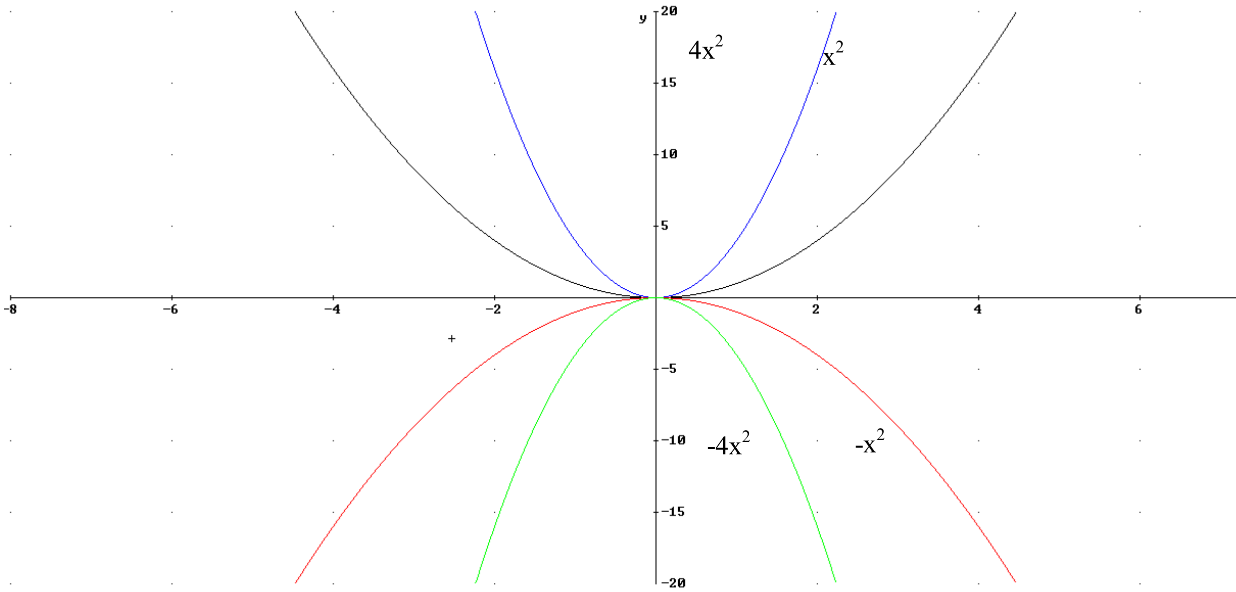
3.2 La parábola como función

En este tema no nos centraremos en la parábola como lugar geométrico sino como función. La parábola es la gráfica de toda función asociada a un polinomio de segundo grado, es decir $y=f(x)=ax^2+bx+c$.

Veamos casos particulares:

3.2.1 Función parabólica o cuadrática del tipo $y=ax^2$

Si tenemos la función $y=f(x)=ax^2$. Para entender como es la parábola en función del parámetro a veamos 4 casos distintos:

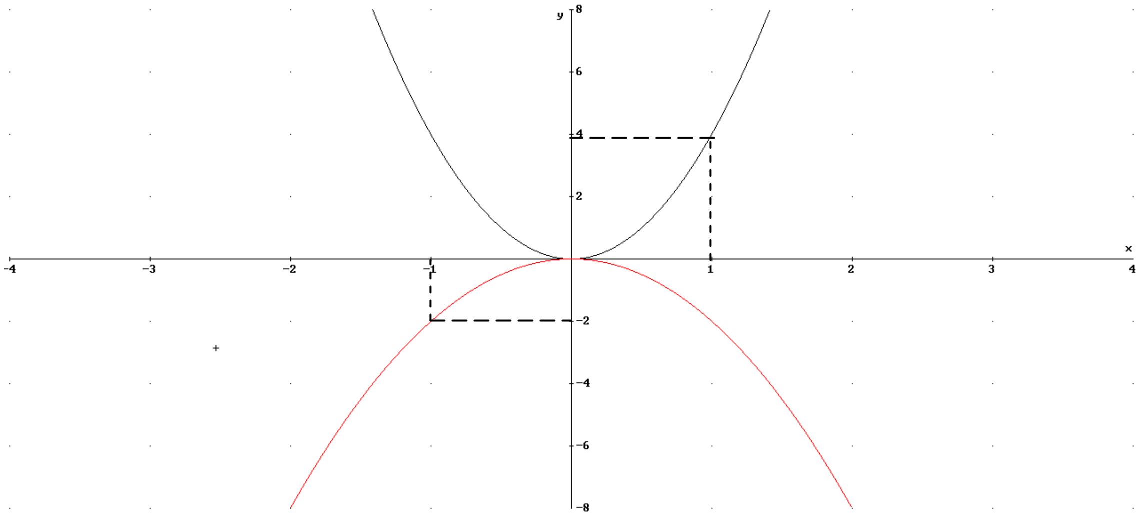


Vemos que difieren si aes positiva o negativa, así tenemos:

a) Si a>0, sus propiedades son las siguientes:
   - Su vértice en origen V(0,0) que es un mínimo
   - Cóncava
   - Simétrica con eje OY (par)
   - Creciente en $(0,\infty)$ y decreciente en $(-\infty,0)$
   - A mayor valor de a más rápido crece y decrece

b) Si a<0, sus propiedades son las siguientes:
   - Su vértice en origen V(0,0) que es un máximo
   - Convexa
   - Simétrica con eje OX (par)
   - Decreciente en $(0,\infty)$ y creciente en $(-\infty,0)$
   - A menor valor (más negativo) de a más rápido crece y decrece

Ejercicio 2: obtener la expresión analítica de las siguientes gráficas:



Solución

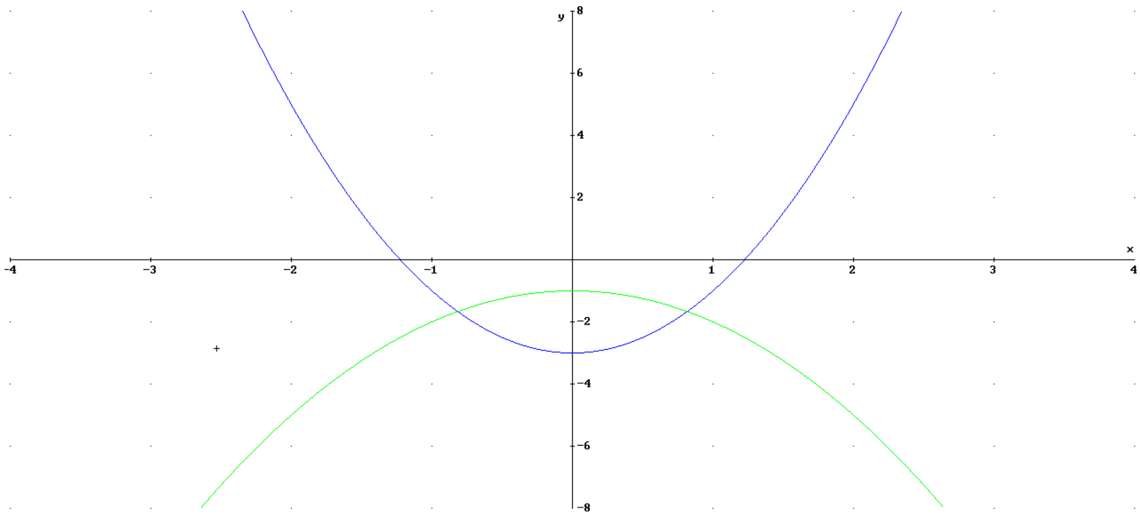
a) (azul) V(0,0) → $y=a\cdot x^2$ P(1,4) → $4=a\cdot 1^2$ → a=4

b) (roja) V(0,0) → $y=a\cdot x^2$ P(-1,-2) → $-2=a\cdot(-1)^2$ → a=-2

3.2.2 Función parabólica del tipo $y=ax^2+c$ (desplazada verticalmente)

Para entender la gráfica tendremos que pensar que es una traslación en el eje OY de c unidades. De esta forma la gráfica es igual que la de $a\cdot x^2$ pero c unidades desplazada, del tal forma que el vértice situado en V(0,c). La forma de la parábola sigue dependiendo del valor de a, tal que si a>0 s cóncava (∪) y si a<0 es convexa (∩).

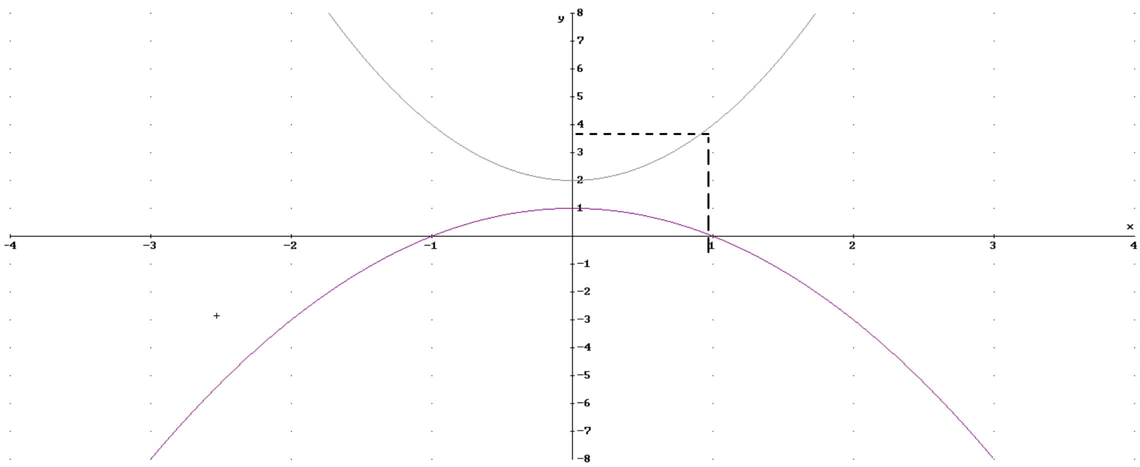
Ejemplos: $y=2x^2-3$; $y=-x^2-1$



Puntos importantes son los de corte con el eje OX (es decir y=0). Sólo cortarán con el eje las que tenga a>0 y c<0 o a<0 y c>0. En nuestro ejemplo:

$$0=2x^2-3 \rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}} \rightarrow A(\sqrt{\frac{3}{2}},0)\ ,\ B(-\sqrt{\frac{3}{2}},0)$$

Ejercicio 3: obtener la expresión analítica de las siguientes gráficas:



Solución

a) (Azul) V(2,0) → c=2. P(1,4) $y=ax^2+2 \rightarrow 4=a\cdot 1^2+2 \rightarrow a=2 \rightarrow y=2x^2+2$
b) (morado) V(1,0) → c=1 P(1,0) $y=ax^2+1 \rightarrow 0=a\cdot 1^2+1 \rightarrow a=-1 \rightarrow y=-x^2+1$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

3.2.3 Función parabólica del tipo $y=a(x-x_0)^2$ (desplazada horizontalmente)

Las funciones con la expresión $y=a(x-x_0)^2$ son parábolas con el vértice en el eje OX, en el punto $V(0,x_0)$. Es decir es la gráfica $a\cdot x^2$ desplazada x_0 unidades en horizontal, tal que si $x_0<0$ el desplazamiento es a la izquierda, siendo a la derecha si $x_0>0$. La forma de la parábola sigue dependiendo del valor de a, tal que si a>0 s cóncava ($\cup$) y si a<0 es convexa ($\cap$).

3.2.4 Caso general, función parabólica del tipo $y=ax^2+bx+c$

Para entender la gráfica basta con expresar la función de la siguiente forma $y=y_0+a(x-x_0)^2$, entonces será igual que el de la parábola $y=ax^2$ pero desplazada x_0 en el eje OX e y_0 en el eje OY. De esta forma el vértice está en $V(x_0,y_0)$

Relacionemos entonces a, b y c con x_0 e y_0:

$y=a\cdot(x-x_0)^2+y_0=a\cdot x^2-2ax_0\cdot x+ax_0^2+y_0=ax^2+bx+c$

$-2a\cdot x_0=b \rightarrow x_0=\frac{-b}{2a}$

$a\cdot x_0^2+y_0=c \rightarrow y_0=c-a\cdot x_0^2$

En la práctica se calcula $x_0=\frac{-b}{2a}$ e y_0 se obtiene sustituyendo en la función $x_0 \rightarrow y_0=f(x_0)$

La gráfica como hemos dicho es igual que la de $y=ax^2$ pero desplazada x_0 unidades en el eje OX e y_0 en eje OY, de tal forma que como hemos dicho el vértice $V(x_0,y_0)$

Ejemplo: representar y poner en forma $y=a\cdot(x-x_0)^2+y_0$ la función $y=f(x)=2x^2-4x-2$.

Calculemos el vértice $x_0=\frac{-b}{2a}=1$, $y_0=f(1)=-4 \rightarrow V(1,-4)$

$y=f(x)=2\cdot(x-1)^2-4$

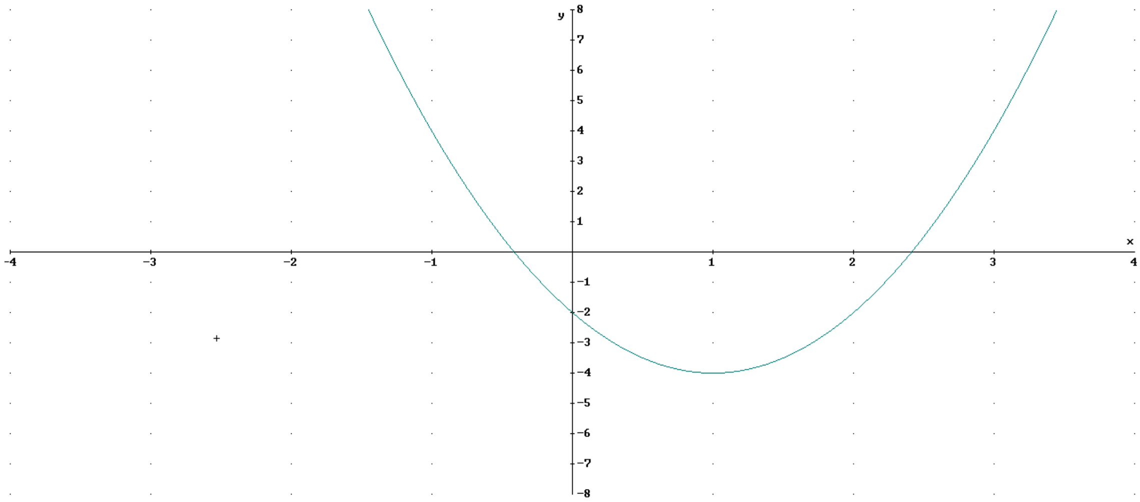
Para representarla damos valores entorno del vértice

X	Y
0	-2
1	**-4**
2	-2

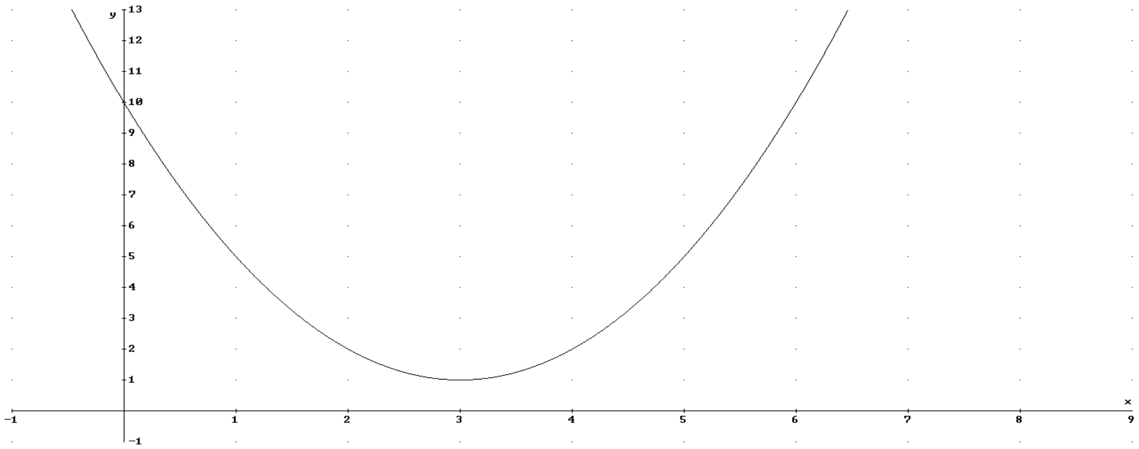
Puntos de corte con eje OX (y=0)$\rightarrow 0=2\cdot(x-1)^2-4 \rightarrow 4=2\cdot(x-1)^2 \rightarrow (x-1)^2=2 \rightarrow$

$x-1=\pm\sqrt{2} \rightarrow x=1\pm\sqrt{2} \rightarrow (1+\sqrt{2},0), (1-\sqrt{2},0)$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)



Ejercicio 4: obtener la expresión analítica de la siguiente gráfica:



Solución:

El vértice es V(3,1) → $y=1+a\cdot(x-3)^2$. Para calcular a sustituimos un punto, por ejemplo P(10,0)→ $10=1+a\cdot 9$ → a=1:

$y=1+(x-3)^2=1+x^2-6x+9=x^2-6x+10$