

Tema 3. Proporcional directa e inversa.

1. Introducción
2. Proporcionalidad directa.
3. Porcentajes y variaciones porcentuales concatenadas.
 - 3.1. Porcentajes
 - 3.2. Variaciones porcentuales concatenadas.
4. Proporcionalidad inversa
5. Proporcionalidad compuesta.
6. Repartos
 - 6.1. Proporcionales directos
 - 6.2. Proporcionales inversos.

1. Introducción.

Existen multitud de magnitudes en la naturaleza, en la vida cotidiana que se relacionan entre sí, es decir que la modificación de una magnitud influye sobre la otra y al revés.

Nos centraremos en este tema en magnitudes que se relacionan de forma proporcional, es decir que el aumento de una magnitud produce el aumento (directamente proporcional) o disminución (inversamente proporcional) de la otra magnitud en la misma proporción.

En este tema también nos centraremos en los repartos de una magnitud de forma directa o inversamente proporcional, que consiste en dar más (reparto directo) o menos (reparto inverso) según sea mayor el valor de una magnitud.

2. Proporcionalidad directa

Definición: Dos magnitudes A y B son **directamente proporcionales** si el aumento o disminución de A produce el aumento o disminución de B en la misma proporción. Es decir si tenemos el doble de A tendremos también el doble de B, si pasamos a un tercio de A lo mismo ocurre en B, etc.

Cuando dos magnitudes se relacionan de forma directamente proporcional se cumple que el cociente entre los valores de A entre B (o al revés) es constante, ya que si A pasa a ser el doble (multiplicamos por dos el valor de A) también tendremos el doble de B (multiplicamos por dos el valor de B) y por tanto el cociente es el mismo.

$$\frac{A}{B} \rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = k \rightarrow \text{Notación } A \propto B$$

El valor de la constante **k** se denomina **constante de proporcionalidad directa** y es el valor de A cuando B vale la unidad

Ejemplo: Un coche a velocidad constante tiene siempre el mismo consumo. Si en 250 km consume 12,5 l, decir cuál es el consumo en 100 km. ¿Cuánto vale la constante de proporcionalidad?

Respuesta: Está claro que A=número de kilómetros y B=consumo en litros son magnitudes directamente proporcionales, pues si tenemos que hacer el doble de kilómetros el consumo será también el doble (siempre suponiendo la aproximación del consumo constante).

Por la definición $\frac{A}{B} = \frac{\text{consumo}}{\text{distancia}} \rightarrow \frac{12,5l}{250km} = \frac{x}{100km} \rightarrow x = \frac{12,5l \cdot 100km}{250km} = 5l \text{ cada } 100$

Otra forma, a partir de la constante de proporcionalidad: $A=k \cdot B$ siendo el valor de

$$k = \frac{12,5l}{250km} = 0,05 \text{ l/km} . \text{ Por tanto } x=0,05 \cdot \text{l/km} \cdot 100km \rightarrow x= 5 \text{ l}$$

Problema: Si A es directamente proporcional con B siendo k la constante de proporcionalidad, calcular la constante de proporcionalidad si relacionamos B con A en vez de A con B. En Italia el consumo del coche se da en kilómetros por litro. Calcular el valor del consumo del coche anterior si vamos a Italia.

Solución: Se cumple que $k=A/B$, si queremos la relación inversa B/A se cumplirá que su constante de proporcionalidad será la inversa de k, es decir $k'=1/k$.

En el ejemplo anterior $k'=1/k=1/0,05 \text{ l/km} \rightarrow k'=20 \text{ km/l}$

Ejercicio 1: Un coche ha tardado 42 minutos en recorrer 70 km. Suponiendo que va a la misma velocidad, contesta a las siguientes cuestiones:

- ¿Cuánto tardará en recorrer 150 km?
- ¿Cuántos kilómetros recorrerá en dos horas y tres minutos?

Ejercicio 2. Marta ha cobrado por repartir propaganda durante cinco días 126 €. ¿Cuántos días deberá trabajar para cobrar 340,2 €?

Ejercicio 3. En un plano de una ciudad, una calle de 350 metros de longitud mide 2,8 cm. ¿Cuánto medirá sobre ese mismo plano otra calle de 200 metros?. Calcular escala

Ejercicio 4. En una panadería, con 80 kilos de harina hacen 120 kilos de pan. ¿Cuántos kilos de harina serían necesarios para hacer 99 kilos de pan?

Ejercicio 5. Ana medía 1,42 m a principios de año. Pasados tres meses, medía 1,45 y a finales de año, 1,51. ¿Cuándo creció más rápido, en los primeros tres meses o en el resto del año?

Ejercicio 6. En el equipo de fútbol del barrio han jugado como porteros Ángel y Diego. A Ángel le han marcado 13 goles en 10 partidos jugados. Diego jugó 15 partidos y le marcaron 18 goles. ¿Cuál de los dos ha tenido mejores actuaciones?

3. Porcentajes y variaciones porcentuales concatenadas.

3.1. Porcentajes

Muchas veces la proporcionalidad directa se da en forma de porcentaje. Que es una forma de dar el valor de proporcionalidad.

El porcentaje nos muestra el valor de una magnitud o su variación cuando la otra vale 100. El porcentaje es igual a la constante de proporcionalidad por 100 $\rightarrow \% = 100 \cdot k$

Ejemplo: Si nos dicen que en clase de 3º de matemáticas aprueban 15 de los 25 alumnos, calcular el porcentaje de aprobados. En lengua aprueban el 68%, calcular el número de aprobados.

a) Porcentaje de matemáticas: $\frac{15 \text{ aprueban}}{25 \text{ alumnos}} = \frac{x \%}{100 \text{ alumnos}} \rightarrow x = x = 15 \cdot \frac{100}{25} = 60\%$

b) $\frac{x \text{ aprueban}}{25 \text{ alumnos}} = \frac{68 \text{ aprueban}}{100 \text{ alumnos}} \rightarrow x = 68\% \text{ de } 25 = \frac{68}{100} \cdot 25 = 17 \text{ aprueban}$

Ejercicio 7. De los 800 alumnos de un colegio, han ido de viaje 600. ¿Qué porcentaje de alumnos ha ido de viaje?

Ejercicio 8. Una moto cuyo precio era de 5.000 €, cuesta en la actualidad 250 € más. ¿Cuál es el porcentaje de aumento?

Ejercicio 9. Al adquirir un vehículo cuyo precio es de 8800 €, nos hacen un descuento y pagamos 8000€ ¿qué porcentaje del coche hemos pagado?, ¿Qué porcentaje nos han descontado?.

Ejercicio 10. Cuál será el precio que hemos de marcar en un artículo cuya compra ha ascendido a 180 € para ganar al venderlo el 10%.

Ejercicio 11. ¿Qué precio de venta hemos de poner a un artículo comprado a 280 €, para perder el 12% sobre el precio de venta?

Ejercicio 12. Se vende un objeto perdiendo el 20% sobre el precio de compra. Hallar el precio de venta del citado artículo cuyo valor de compra fue de 150 €

3.2. Variaciones porcentuales concatenadas

Muchas veces una magnitud varía porcentualmente a lo largo del tiempo, de forma que conocemos varios incrementos y disminuciones porcentuales. Para abordar este problema veamos cómo obtener el valor final de una magnitud que se ha incrementado y disminuido porcentualmente de forma rápida.

Aumento porcentual: Si aumentamos una magnitud M_{inicial} un r % entonces el resultado final es M_{final} siendo este : $M_{\text{final}}=M_{\text{inicial}}\cdot(1+r/100)=M_{\text{inicial}}+\underbrace{r\cdot M_{\text{inicial}}/100}_{\text{Aumento}}$

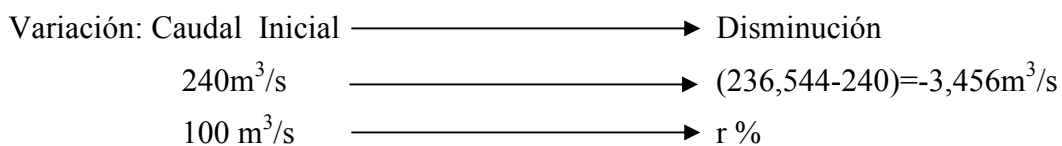
Ejemplo: calcular el cauce del Esla que inicialmente tenía un caudal de $240 \text{ m}^3/\text{s}$ si con las lluvias sufre un aumento del 12%.

$$C_{\text{final}}=240\cdot(1+12/100)=268,8 \text{ m}^3/\text{s}$$

Disminución porcentual: Si disminuimos una magnitud M_{inicial} un r % entonces el resultado final es M_{final} siendo este : $M_{\text{final}}=M_{\text{inicial}}\cdot(1-r/100)=M_{\text{inicial}}-\underbrace{r\cdot M_{\text{inicial}}/100}_{\text{Disminución}}$

Ejemplo: Si después del incremento anterior del río Esla hay un periodo de sequía y baja el caudal un 12%, ¿Qué caudal habrá ahora? ¿Qué variación porcentual respecto al inicio ha sufrido el río?

$$C_{\text{final}}=268,8\cdot(1-12/100)=236,544 \text{ m}^3/\text{s}$$



$$r = \frac{-3,456 \cdot 100}{240} = -1,44\%$$

Otra forma más rápida:

$$M_{\text{final}}=M_{\text{inicial}}\cdot(1-r/100), 236,544=240\cdot(1-r/100) \rightarrow r = \frac{3,456}{240} = 1,44 \%$$

Si una magnitud entonces sufre varios **aumentos y/o disminuciones porcentuales** concatenadas podemos multiplicar la cantidad inicial por los factores $(1 \pm r/100)$ correspondientes.

Ejemplo: Suponer que al caudal inicial del río Esla de $240 \text{ m}^3/\text{s}$ sufre las siguientes variaciones en los trimestres anuales 2%, -6%, 10%, -4%. Calcular el caudal final y al aumento o disminución porcentual total.

$$C_{\text{final}}=240\cdot(1+2/100)\cdot(1-6/100)\cdot(1+10/100)\cdot(1-4/100)=242,998272 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\text{Aumento porcentual: } \cdot(1+2/100)\cdot(1-6/100)\cdot(1+10/100)\cdot(1-4/100)=1,0125 \rightarrow 1,25\%$$

Ejercicio 13. Calcular el sueldo actual de 3 trabajadores que hace 4 años entraron a trabajar en una empresa y que sufrieron las siguientes variaciones de sueldo: el primer año subió un 3%, el segundo bajo un 5%, y el último subió un 1% sabiendo que entraron a trabajar con los sueldos de 1200€, 2000€ y 1400€. ¿Cuál ha sido la variación porcentual en estos 3 años?

Ejercicio 14. El precio de dos productos de una tienda costaban inicialmente sin IVA de 12€, 15€. Si estamos en las segundas rebajas y las primeras fueron del 15% y las segundas del 20% y el IVA es de 21%. Calcular el precio de los productos después de las segundas rebajas. ¿Cuál es la variación porcentual del precio inicial sin IVA y el actual?

Ejercicio 15. Si hay un aumento porcentual inicial del 10% y una bajada posterior del 3% ; y al revés una bajada inicial del 3% y un aumento posterior del 10%. ¿El resultado es el mismo?. Calcular en cada ejemplo la variación porcentual total.

4. Proporcionalidad inversa

Definición: Dos magnitudes A y B son *inversamente proporcionales* si el aumento de A produce la disminución de B en la misma proporción (y al revés). Es decir si tenemos el doble de A tendremos la mitad de B, si pasamos a un tercio de A en B tendremos el triple, etc.

Cuando dos magnitudes se relacionan de forma inversamente proporcional se cumple que el producto entre los valores de A entre B es constante, ya que si A pasa a ser el doble (multiplicamos por dos el valor de A) también tendremos la mitad de B (dividimos por dos el valor de B) y por tanto el producto de ambos es el mismo.

$$A \cdot B = a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = \dots = a_n \cdot b_n = k$$

El valor de la constante **k** se denomina *constante de proporcionalidad inversa*.

Problema: Una piscina se llena si utilizamos 3 mangueras del mismo caudal 10 horas. Calcular cuánto tardará en llenarse si utilizamos 10 mangueras. ¿Cuántos grifos tardarán en llenar la piscina en 5 horas?. Calcular la constante de proporcionalidad.

Solución: La magnitud A=nº mangueras, B=tiempo en horas. Se cumple que son inversamente proporcionales pues si tenemos el doble de mangueras el tiempo será la mitad.

$$A \cdot B = \text{cte} \rightarrow A \cdot B = 3 \cdot 10 = 30$$

$$10 \cdot B = 30 \rightarrow B = 3 \text{ horas}$$

$$A \cdot 5 = 30 \rightarrow A = 6 \text{ grifos.}$$

Ejercicio 15. Cuatro palas excavadoras hacen un trabajo de movimiento de tierras en 14 días. ¿Cuánto se tardaría en hacer ese mismo trabajo si se dispusiera de 7 palas excavadoras?

Ejercicio 16. Un coche, a 90 km/h, hace un recorrido en 5 horas. ¿Cuánto tiempo ganaría si aumentara su velocidad en 10 km/h?

Ejercicio 17. Una empresa de confección debe entregar un pedido en 12 días. Para poder cumplir el encargo debe fabricar 2 000 prendas diarias. Sin embargo, sufre una avería que detiene la producción durante dos jornadas. ¿Cuántas prendas deberá fabricar diariamente para enfrentarse a esta nueva situación?

Ejercicio 18. Una moto que va a 100 km/h necesita 20 minutos en recorrer la distancia entre dos pueblos. ¿Qué velocidad ha de llevar para hacer el recorrido en 16 minutos?

Ejercicio 19. Un ganadero tiene 20 vacas y pienso para alimentarlas durante 30 días. ¿Cuánto tiempo le durará el pienso si se mueren 5 vacas?

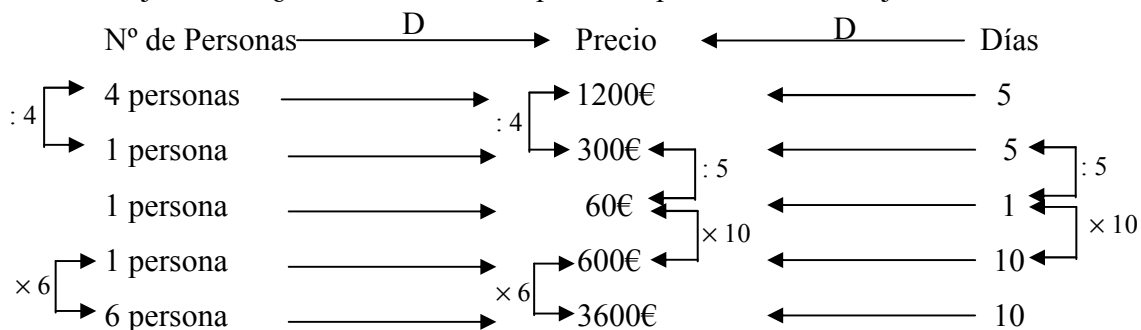
5. Proporcionalidad compuesta.

Definición: Los problemas de proporcionalidad compuesta son aquellos en los que intervienen *tres o más magnitudes*, relacionadas entre sí de forma directa o inversa.

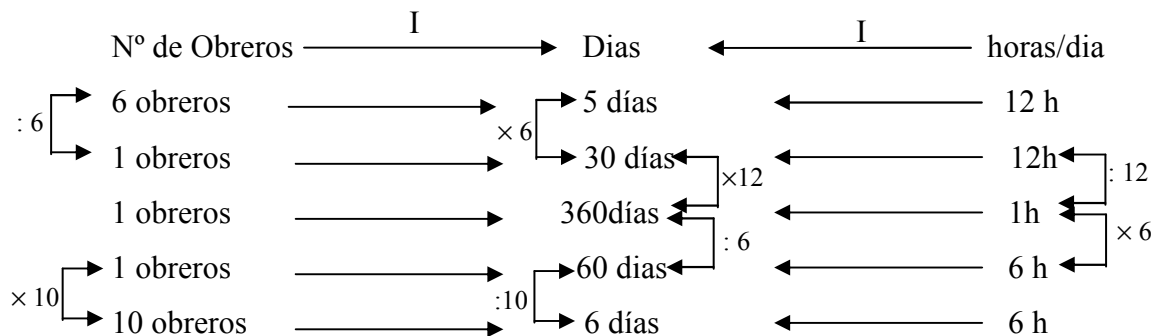
Para resolver estos problemas lo primero es relacionar todas las magnitudes con aquella que nos preguntan en el problema, viendo si estas relaciones son de proporcionalidad directa o inversa. Una vez relacionadas *hacemos el paso a la unidad* de todas las magnitudes menos aquella que nos preguntan, y vemos como se modifica esta última aplicando las relaciones de proporcionalidad directa o inversa. Una vez que estas magnitudes valen uno se multiplican o dividen para que estas valgan los datos del problema para los cuales deseamos conocer la magnitud deseada y vemos el valor final de esta, siendo esta la respuesta del problema.

Ejemplos:

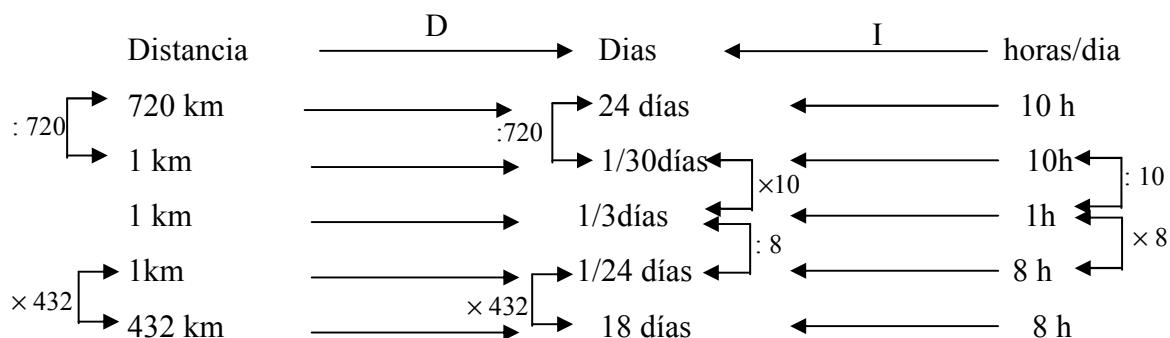
- Compuesta directa:** Un hotel cobra a 4 personas 1200€ por 5 días de alojamiento. ¿Cuánto cobrará a 6 personas por 10 días de alojamiento?



2. **Compuesta inversa:** Para montar unas casetas de la feria del libro se han necesitado 6 obreros trabajando 12 horas diarias durante 5 días. ¿cuántos días necesitan trabajar 10 obreros para hacer el mismo montaje en otra ciudad trabajando 6 horas diarias?.



3. **Compuesta directa-inversa:** Un peregrino caminando 10 horas diarias durante 24 días, recorre 720km. ¿Cuántos días necesitan para recorrer 432km caminando 8 horas diarias?



Resolución por regla de tres compuesta: es una regla válida para cualquier tipo de problemas de proporcionalidad compuesta. Para aplicarla:

1. Se estudia el tipo de proporcionalidad entre las magnitudes que intervienen
2. Se iguala la razón que contiene la incógnita con el producto de las razones de las otras magnitudes de forma que, si son directamente proporcionales no se invierten y si son inversamente proporcionales se invierte la razón.

Ejemplo 1.

Nº de Personas	→ D →	Precio	← D ←	Días
4 personas	→	1200€	←	5
6 persona	→	x €	←	10

$$\frac{1200}{x} = \frac{5 \cdot 4}{10 \cdot 6} \rightarrow x = \frac{1200 \cdot 60}{20} = 3600€$$

Ejemplo 2.

Nº de Obreros	→ I →	Días	← I ←	horas/día
6 obreros	→	5 días	←	12 h
10 obreros	→	x días	←	6 h

$$\frac{15}{x} = \frac{10 \cdot 6}{6 \cdot 12} \rightarrow x = \frac{15 \cdot 72}{60} = 18 \text{ días}$$

Ejemplo 3.

Distancia	→ D →	Días	← I ←	horas/día
720 km	→	24 días	←	10 h
432 km	→	x días	←	8 h

$$\frac{24}{x} = \frac{720 \cdot 8}{432 \cdot 10} \rightarrow x = \frac{24 \cdot 4320}{720 \cdot 8} = 18 \text{ días}$$

Ejercicio 20. Si 10 grifos tardan 12 horas en llenar un depósito de 15 metros cúbicos, ¿cuánto tardarán 8 grifos en llenar otro depósito de 7 metros cúbicos?

Ejercicio 21. Una persona leyendo 4 horas diarias a razón de 15 páginas por hora tarda en leer un libro de 10 días. Si leyendo a razón de 12 páginas por hora tardase 20 días. ¿Cuántas horas diarias leerían?

Ejercicio 22. Ocho bombillas iguales encendidas durante 4 horas diarias han consumido 30 días, 49 kilowatios. ¿Cuánto consumirán 6 bombillas encendidas 3 horas diarias, durante 20 días.

Ejercicio 23. Transportar 720 cajas de libros 240 km cuesta 4320 €. ¿Cuántas cajas iguales se han transportado a 300 km si hemos pagado 6187,5€?

6. Repartos

6.1. Repartos proporcionales directos.

El reparto proporcional directo consiste en que dadas unas magnitudes de un mismo tipo (B) y una magnitud total (A), calcular la parte correspondiente a cada una de las magnitudes dadas de forma que se cumpla que la parte recibida dependa proporcionalmente de la cantidad que se tenga:

Magnitud a repartir A, magnitud que determina el reparto B

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} \text{ con } b_i \text{ y } a_i \text{ los valores correspondientes de A y B.}$$

Forma de calcular los repartos:

1. Se calcula $k \rightarrow k = \frac{\text{total repartir}}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$
2. Se reparte proporcionalmente a cada valor b:
 $b_1 \rightarrow a_1 = k \cdot b_1$
...
 $B_n \rightarrow a_n = k \cdot b_n$

Ejemplo: Un padre desea repartir 120€ entre sus tres hijos de forma proporcional a las horas que trabajaron en casa, siendo Juan 3 horas, María 2 horas y Pedro 1 hora. Ver cuánto le corresponde a cada uno.

$$A = 120\text{€}$$

B = horas trabajadas

$$k = \frac{120}{3 + 2 + 1} = 20\text{€ (por hora trabajada)}$$

$$\text{Juan: } 3 \cdot 20 = 60\text{€}$$

$$\text{María: } 2 \cdot 20 = 40\text{€}$$

$$\text{Pedro: } 1 \cdot 20 = 20\text{€}$$

6.2. Repartos proporcionales inversos.

En los problemas de reparto proporcionales inversos hay que repartir una cantidad de manera inversamente proporcional a otras. Si tenemos que repartir una cantidad A inversamente proporcional b_1, b_2, b_3 . Lo que hacemos es repartir la cantidad A directamente proporcional a $1/b_1, 1/b_2, 1/b_3$.

Ejemplo: Tres hermanos ayudan al mantenimiento familiar entregando anualmente 5900 €. Si sus edades son Ana 20, Pablo 24 y María 32 años y las aportaciones son inversamente proporcionales a la edad, ¿cuánto aporta cada uno?

$$k = \frac{5900}{1/20 + 1/24 + 1/32} = 48000€$$

$$\text{Ana: } 48000€ \cdot 1/20 = 2400€$$

$$\text{Pablo: } 48000€ \cdot 1/24 = 2000€$$

$$\text{María: } 48000€ \cdot 1/32 = 1500€$$

Ejercicio 24. En una determinada carrera se destina 330 euros para repartir entre los tres corredores que acaban en los tres primeros puestos de manera proporcional al puesto que ocupan. ¿Cuánto dinero debe recibir cada uno de los tres clasificados?

Ejercicio 25. Tres almacenistas de madera, importan conjuntamente de guinea madera por valor de 24300€. El primero se queda con 210 m³, el segundo con 330 m³ y el tercero con 270 m³. ¿Cuánto debería pagar cada uno?

Ejercicio 26. En las fiestas de verano del pueblo se celebra una carrera, para la cual se destinan 110 € a repartir entre los tres corredores que acaben en los tres primeros lugares de manera inversamente proporcional al puesto que ocupa. ¿Cuánto dinero debe recibir cada uno de los tres clasificados?

Ejercicio 27. Tres socios, Antonio, José y Ana pusieron para crear una empresa 5000, 8000 y 10000 euros respectivamente. Tras un tiempo la empresa tiene 2300 euros de beneficios. ¿Qué cantidad corresponde a cada uno?

Problemas finales

Ejercicio 28. Un camión que carga 3 toneladas necesita 15 viajes para transportar cierta cantidad de arena. ¿Cuántos viajes necesitará para hacer transportar la misma arena un camión que carga 5 toneladas?

Ejercicio 29. Un edificio es construido por una cuadrilla de 15 albañiles en 200 días. ¿Cuántos albañiles tendré que añadir a la cuadrilla para poder terminar el trabajo en 150 días?

Ejercicio 30. El precio de una lavadora es 300 euros (IVA incluido). Si el comerciante decide no cobrarme el 18 % de IVA. ¿Cuál es el precio de la lavadora sin IVA?

Ejercicio 31. El aumento de los precios durante los últimos 5 años han sido porcentualmente los siguientes: 1,5%, 2%,0,5%, 0,8% y 0,1%. Calcular el precio que costara un carro de la compra que hace 5 años costaba 85€. ¿Cuál ha sido el aumento porcentual en estos 5 años?

Ejercicio 32. Un crucero por el Mediterráneo para 200 personas durante 15 días necesita, para gastos de alojamiento y comida, 54.000 €. ¿Cuánto se gastará para alojar y alimentar a 250 personas durante 10 días?

Ejercicio 33. Si 18 máquinas mueven 1200 m³ de tierra en 12 días, ¿cuántos días necesitarán 24 máquinas para mover 1600 m³ de tierra?

Ejercicio 34. Un motor funcionando durante 10 días y trabajando 8 horas diarias ha originado un gasto de 1200 euros. ¿Cuánto gastará el motor funcionando 18 días a razón de 9 horas diarias?

Ejercicio 35 Con 15 máquinas de escribir durante 6 horas, se escriben 220 folios. ¿Cuantos folios se escribirán con 45 máquinas durante 12 horas?

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS

Ejercicio 1. a) 90 minutos, b) 205 km

Ejercicio 2. 13 días y medio

Ejercicio 3. a) 1,6 cm b) 1:12.500

Ejercicio 4. 66kg de harina

Ejercicio 5. En los primeros tres meses 1cm/mes y los últimos 9 meses $\frac{2}{3}$ cm/mes

Ejercicio 6. Ángel 1,3 goles/partido y Diego 1,2 goles/partido

Ejercicio 7. El 75%

Ejercicio 8. Un 5%

Ejercicio 9. Hemos pagado un 90,9% es decir nos han descontado el 8,1%

Ejercicio 10. 198€

Ejercicio 11. 246,4€

Ejercicio 12. 120€

Ejercicio 13. Variación total es de -1,17%, los sueldos son 1.185,94€, 1.976,57€ y 1383,60€

Ejercicio 14. Variación porcentual es de -17,8%, y los precios son 9,87€ y 12,34€

Ejercicio 15. Es lo mismo siendo la variación porcentual de 6,7%

Ejercicio 16. Se ahorran 30 minutos

Ejercicio 17. 2400 prendas diarias

Ejercicio 18. 125 km/h

Ejercicio 19. 40 días

Ejercicio 20. 7 horas

Ejercicio 21. 2 horas y media

Ejercicio 22. 18,37 kwh

Ejercicio 23. 825 cajas

Ejercicio 24. 180€ el primero, 90€ el segundo y 60€ el último

Ejercicio 25. 6300€, 9900€, 8100€

Ejercicio 26. 60€, 30€, 20€

Ejercicio 27. 500€, 800€ y 1000€

Ejercicio 28. 25 viajes

Ejercicio 29. 5 obreros más

Ejercicio 30. 254,24€

Ejercicio 31. Aumento de 4,98%. El precio actual es 89,24€.

Ejercicio 32. 45.000€

Ejercicio 33. 12 días

Ejercicio 34. 2430€

Ejercicio 35. 1320 folios