Tema 7. Funciones

1. Definición y formas de definir una función
   1.1. Definición de una función
   1.2. Formas de definir una función
      1.2.1. A Partir de gráfica
      1.2.2. Expresión algebraica
      1.2.3. Tabla
2. Dominio y recorrido de funciones
   2.1. Calculo del dominio y recorrido a partir de la gráfica
   2.2. Cálculo del dominio a partir de expresión algebraica.
3. Continuidad. Tipos de dsicontinuidades.
   3.1. Definición de continuidad
   3.2. Tipos de discontinuidades
4. Monotonía: crecimiento y decrecimiento, puntos relativos
   4.1. Monotonía crecimiento y decrecimiento
   4.2. Puntos relativos
5. Simetría
6. Periodicidad
7. Tendencias y asíntotas.

1. Definición y formas de de definir una función

1.1. Definición de una función

Hemos oído hablar mucho de funciones, pero ¿sabemos bien que son las funciones?.¿y para que se utilizan?. De esto trataremos este tema y el siguiente

Definición: una función f, es una correspondencia o aplicación entre un subconjunto de números reales ($D \in R$) y los números reales (R), de forma que a cada elemento "x", $x \in D$ le corresponde **un único** valor "y".

Veamos gráficamente la definición:

$$\begin{aligned} f:\ D &\rightarrow R \\ x &\rightarrow y=f(x) \end{aligned}$$

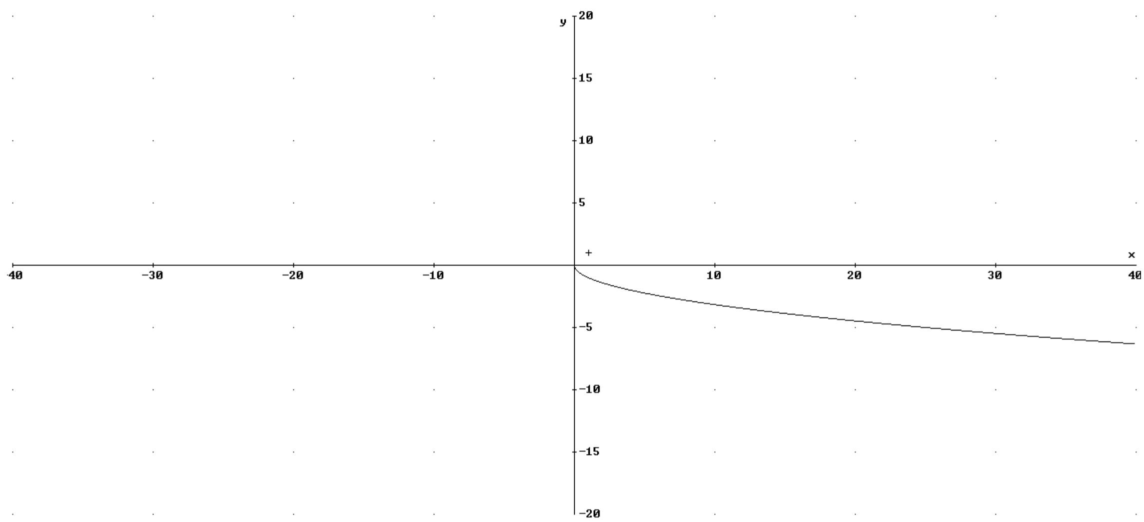
Elementos de una función:

- Variable independiente: es la variable x
- Variable dependiente: es la variable y, se llama así porque su valor depende de x.
- Dominio de una función, se denomina Dom(f) y está formado por aquellos valores de x (números reales) para los que existe la función.
- Imagen o recorrido de la función: se designa Im(f), a todos los valores de la variable dependiente (y).

Ejemplo: $y=f(x)=-\sqrt{x}$

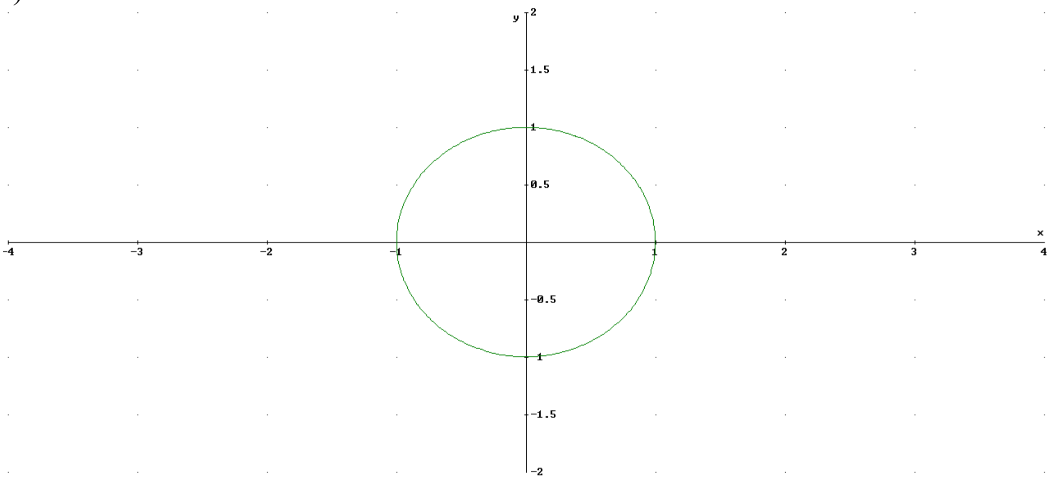
$Dom(f(x))=[0,\infty)$, ya que la raíz sólo existe cuando el radical es positivo

$Im(f(x))=(-\infty,0]$, que son los valores que toma la y:

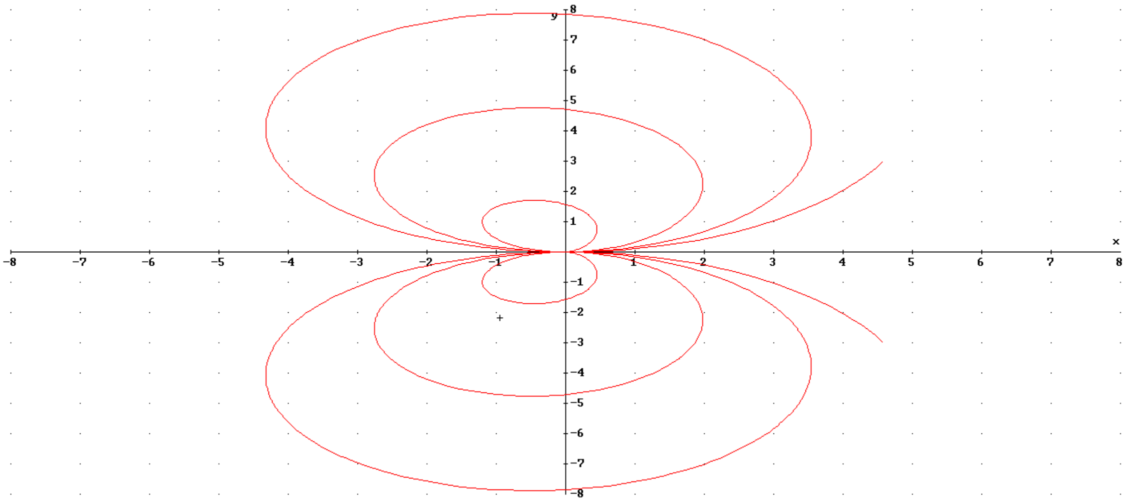


Ejercicio 1: identificar funciones de las que no son

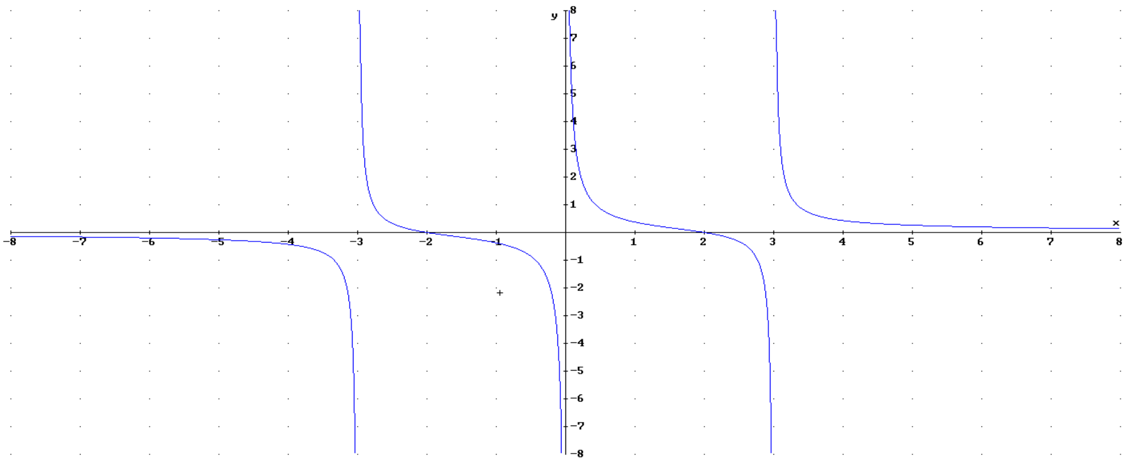
a)



b)



c)

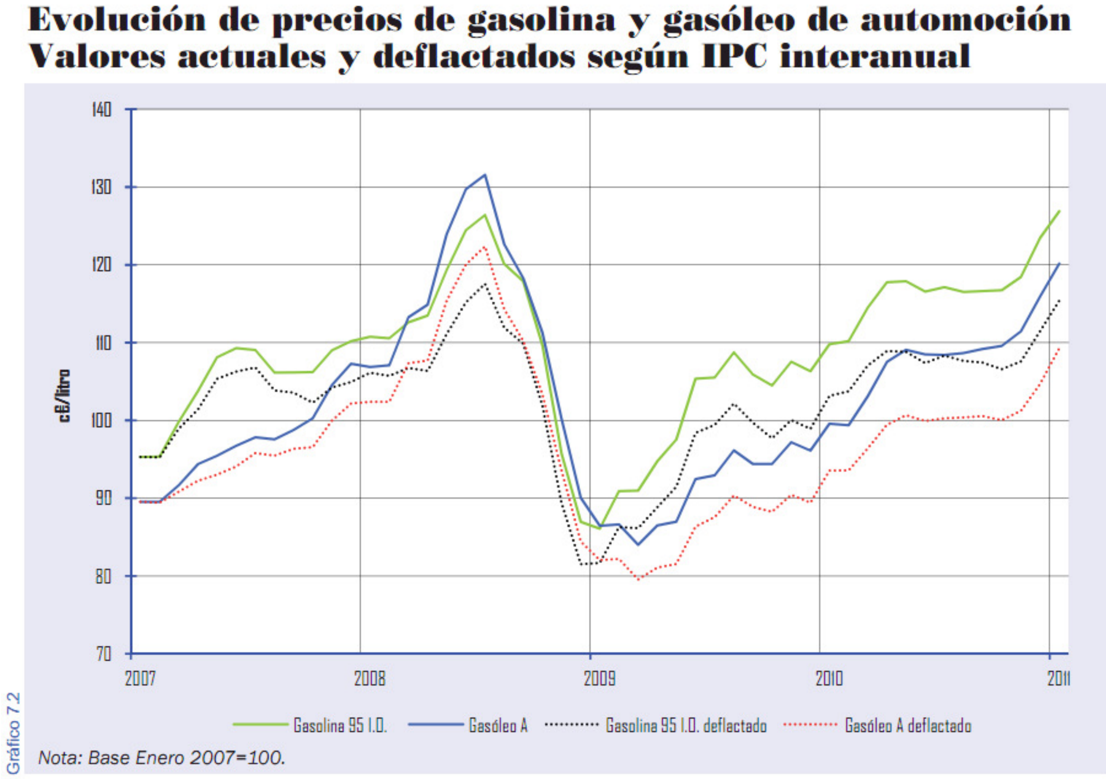


Si es función, pues a cada valor de x le corresponde un único valor de y.

1.2. Formas de definir una función.

1.1.1. A partir de una representación gráfica

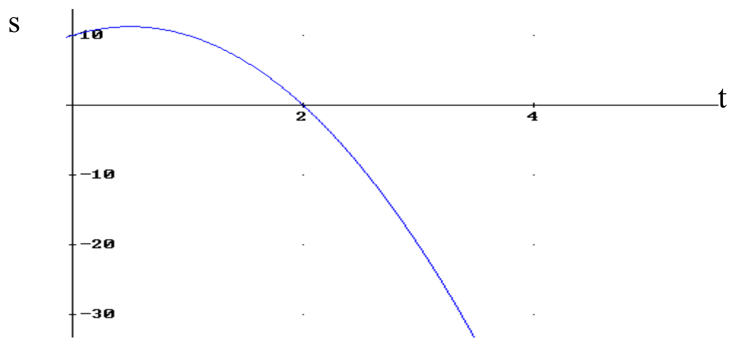
La representación gráfica nos muestra la relación entre las variables "x" e "y" en los ejes de coordenadas cartesianos, así la gráfica es el conjunto de todos los puntos (x,y=f(x)).
Es una forma muy intuitiva de conocer el comportamiento de la función, veamos un ejemplo, donde x=año, y=precio



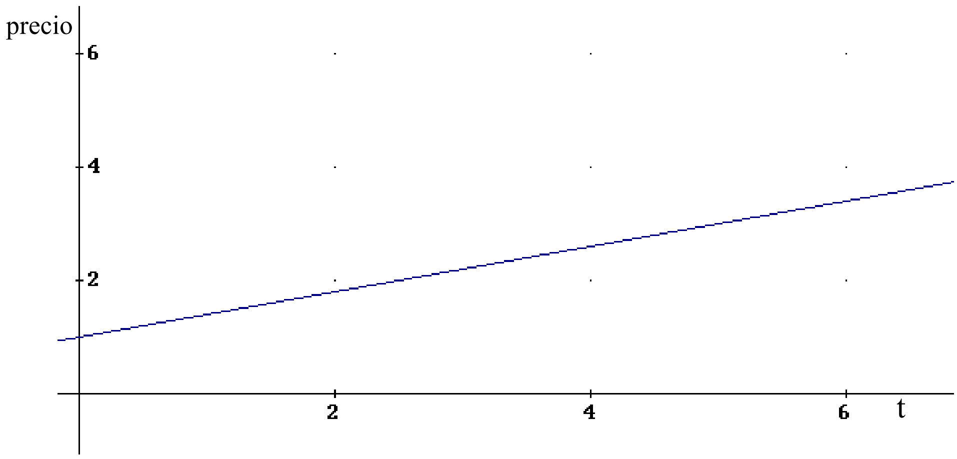
1.1.2. A partir de expresión analítica

Es otra forma de conocer una función: es la relación matemática entre las dos variables en la que la variable dependiente (y) está despejada. No siempre es posible de obtener la expresión analítica de una función, por ejemplo la vista en el apartado anterior. La expresión analítica suelen utilizarse en física, química, economía, etc.
A partir de la expresión analítica es posible de obtener la gráfica, no siempre es cierta la afirmación en el otro sentido.
Veamos algún ejemplo:

a) La posición en un movimiento uniformemente acelerado $s=s_0+v_0\cdot t+\frac{1}{2}at^2$. Por ejemplo si $s_0=10m$, $v_0=5m/s$, $a=-10m/s^2 \rightarrow$ $s=10+5t-5t^2$. Tendremos que la variable independiente es el tiempo (t) y la dependiente el espacio (s):



b) Factura del taxi: 1€por bajar la bandera y 0,4€/min→ p=1+0,4·t. Donde la variable independiente es el tiempo y la dependiente el precio

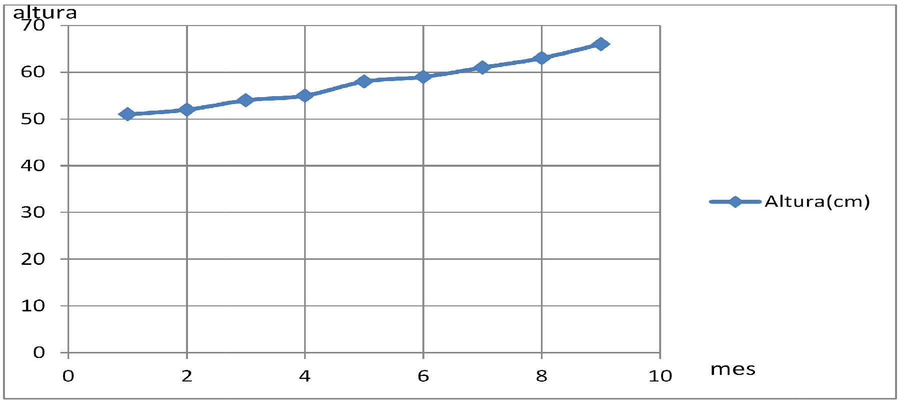


1.1.3. Mediante tabla de valores:

Aunque no es la forma deseada de conocer una función, a veces esta viene dada por tabla de valores, que son un conjunto de pares de valores (x,y) de la función.
Ejemplo: La siguiente tabla de valores muestra la evolución del crecimiento de un bebé durante los primeros meses de vida.

Meses	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Altura(cm)	51	52	54	55	58	59	61	63	66

Decimos que no es la mejor forma de conocer la función pues ¿Qué altura tendrá cuando ha pasado 8 meses y medio?.
Se puede obtener una gráfica aproximada uniendo los puntos, aunque hay infinitas formas de unir estos puntos, se suelen unir por rectas:



2. Dominio y recorrido de funciones

Recordemos nuevamente lo que es el domino y el recorrido de una función, que es básico para comprender las funciones:

Dominio: es el conjunto de valores de la variable independiente (generalmente x y representada en el eje de abscisas) donde existe la función (gráfica)

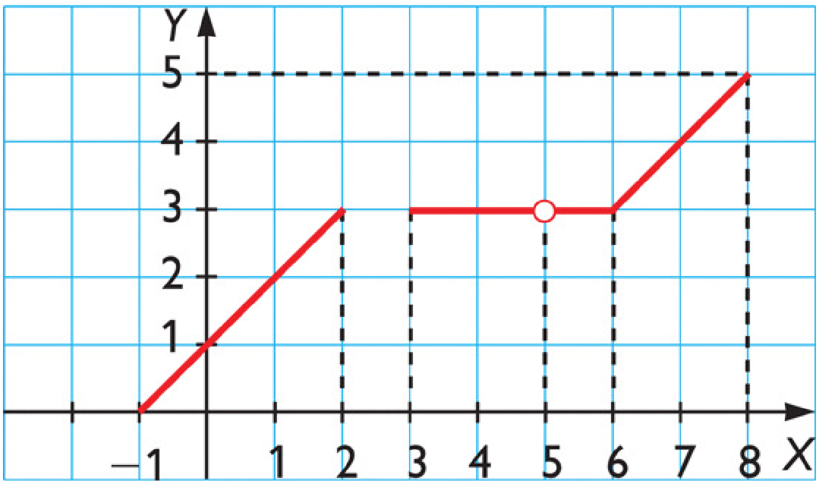
Recorrido: es el conjunto de valores de la variable dependiente (generalmente la y, representada en el eje de ordenadas) que toma la función.

2.1. Calculo del dominio y el recorrido a partir de una gráfica

La forma de ver el dominio de una función expresada por una gráfica es sencillo, sólo hay que fijarse en los valores de x que toma. Es como si mediante una apisonadora aplastáramos la gráfica en el eje x y viéramos los valores que toma. Ojo con los puntos huecos que recordemos que no pertenecen a la función.

Para ver el recorrido la explicación anterior es equivalente, con la diferencia que ahora es el eje vertical en el que nos tenemos que fijar.

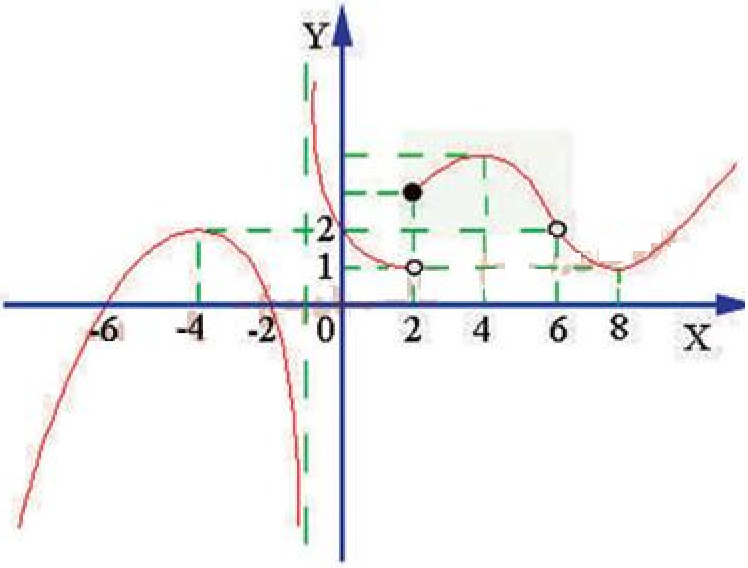
Ejemplo:



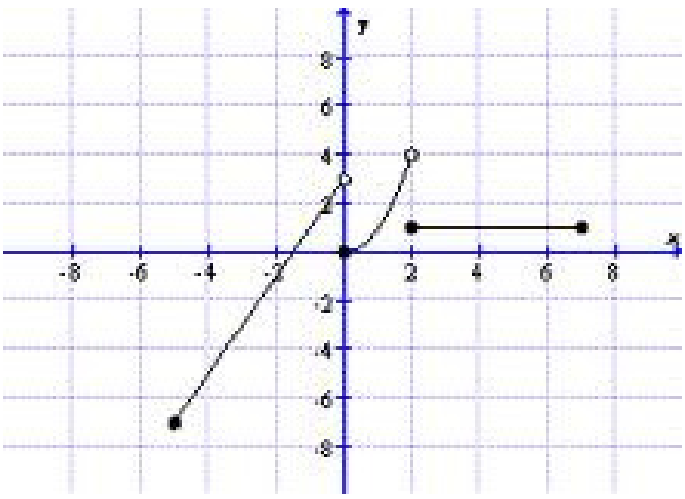
Dom(f(x))=[-1,2]∪[3,8]-{5} Rec(f(x))=Im(f(x))=[0,5]

Ejercicio 2. Calcular el domino y el recorrido de las siguientes gráficas.

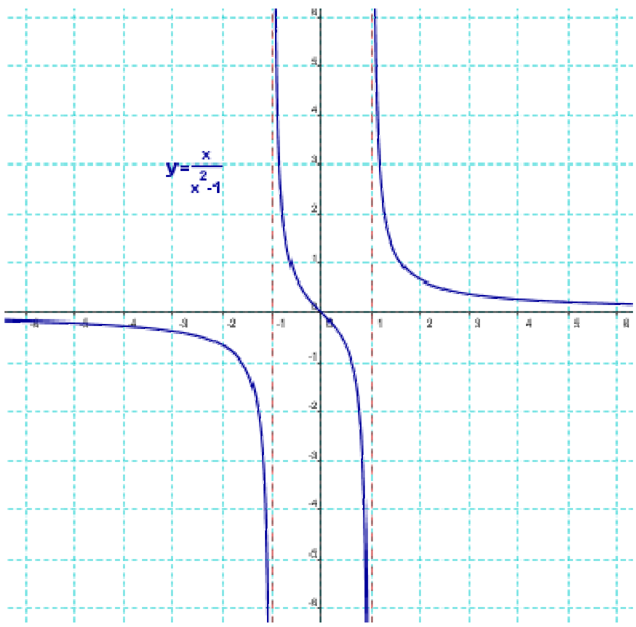
a)



b)



c)



2.2. Dominio a partir expresión algebraica.

Para identificar el dominio de una expresión algebraica hay que verlos valores de x donde no existe la función, ya que tendremos una operación imposible en los numero reales. Las más típicas son

a) División por cero en funciones racionales
b) Radicando negativos en funciones con radicales pares.

En este curso al no haber trabajado con inecuaciones sólo nos centraremos en las primeras. Calcular el dominio de las funciones con denominadores simplemente es igualar a cero el denominador, resolver la ecuación y quitar estas soluciones al dominio.

Veamos un ***ejemplo***: $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$ (apartado c del ejercicio 2) → $x^2-1=0$ → $x=\pm 1$, luego Dom(f(x))= $\mathbb{R}-\{-1,1\}$

Ejercicio 3. Calcular el dominio de las siguientes funciones

a) $f(x)=\frac{1}{x^2+6x+5}$

b) $g(x)=\frac{x^2+1}{x^3-5x^2-2x+24}$

c) $h(x)=\frac{x^2-x+1}{x^3+x^2-2x}$

3. Continuidad y discontinuidad de una función

3.1. Definición de continuidad y discontinuidad

***Definición de continuidad**:* la definición exacta de continuidad es necesario bastantes conocimientos y abstracción matemática. Podemos decir que una función continua en un punto cuando una pequeña variación de la variable independiente (x supone una pequeña variación de la variable dependiente (y). Gráficamente ocurre cuando al trazar la gráfica de la función en ese punto “no levantamos el bolígrafo del papel”.
Así la función será continua en todos los puntos del dominio donde “no levantemos el boli del papel”

***Definición de discontinuidad**:* cuando una función no es continua en un punto entonces es discontinua en ese punto. Esto es debido a que levantamos el boli del papel.

3.2. Tipos de discontinuidades

Tipos de discontinuidades:

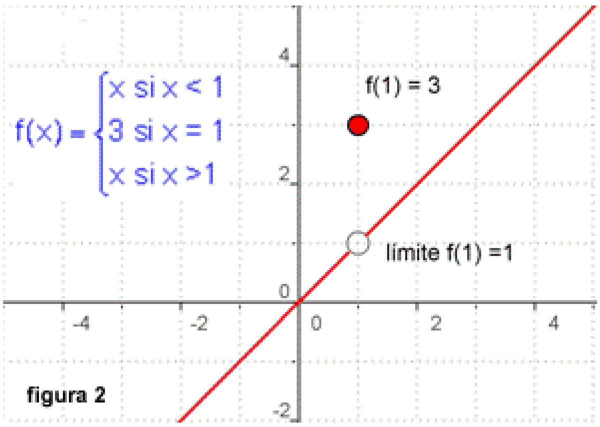
- ***Evitables:*** se llaman así porque pueden ser evitadas redefiniendo la función. Se cumple que la función en un entorno del punto es igual cumpliéndose que $f(x_0^-)=f(x_0^+)$, pero en el mismo punto o no pertenece al dominio o su valor es distinto al valor en el entorno $f(x_0)\neq f(x_0^-)=f(x_0^+)$
- ***No evitables:*** son de dos tipos:
    - ***Salto infinito.*** La función en un entorno del punto tiende a ±∞. Ocurre cuando se anula el denominador. El punto de discontinuidad no

pertenece al dominio. En ese punto se dice que la función asíntota vertical.

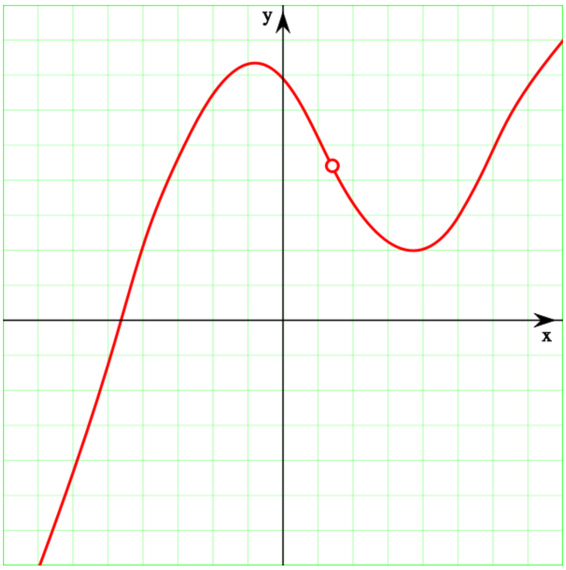
- ***Salto finito***: la función existe o no en el punto, se cumple que toma valores diferentes a izquierda y derecha del mismo número

Las de salto finito y las evitables son discontinuidades típicas de las funciones definidas a trozos.

Ejemplos gráficos:

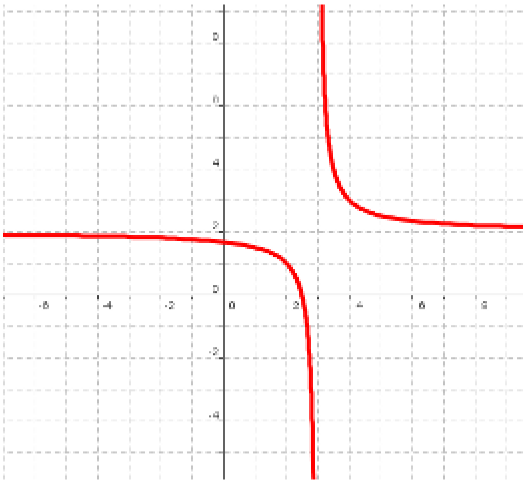


Función continua en -{1}.
En x=1 es una discontinuidad evitable.



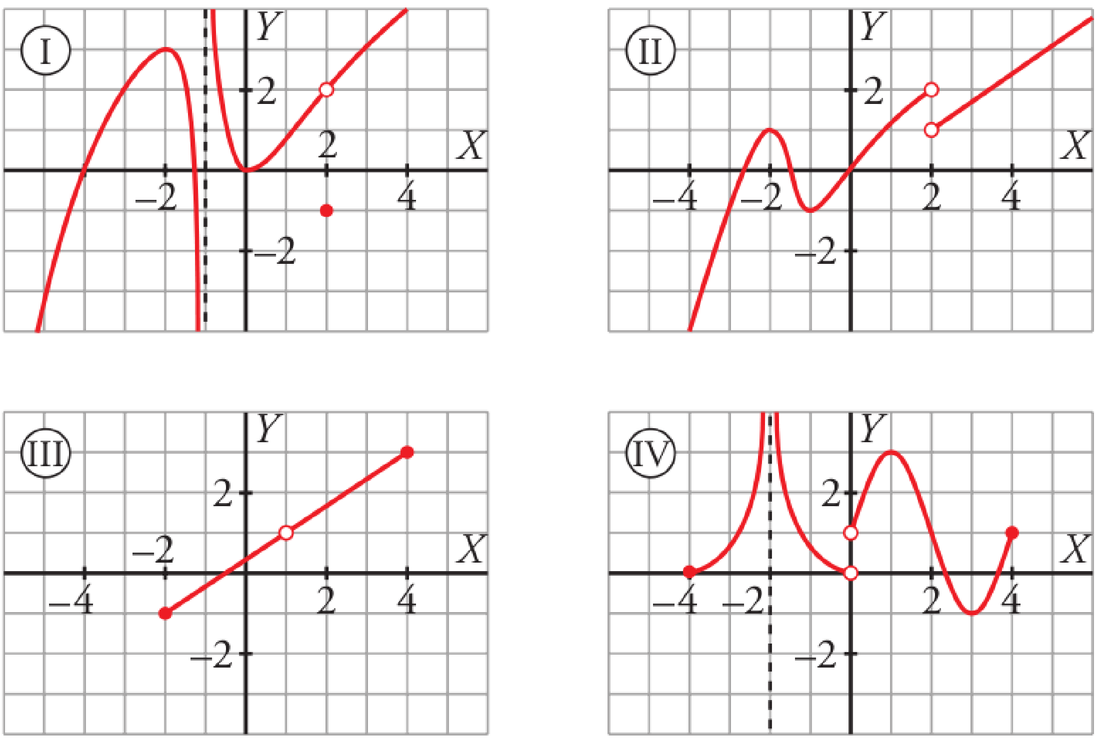
Función continua en -{1.5}.
En x=1.5 es una discontinuidad evitable.

Función continua en -{1}.
En x=1 es una discontinuidad de salto finito
$f(1^-)=-7$, $f(1^+)=3$



Función continua en -{3}.
En x=3 es una discontinuidad de salto infinito.

Ejercicio 4. Decir el domino y la continuidad de cada gráfica. Donde sea discontinua decir que tipo de discontinuidad tiene.



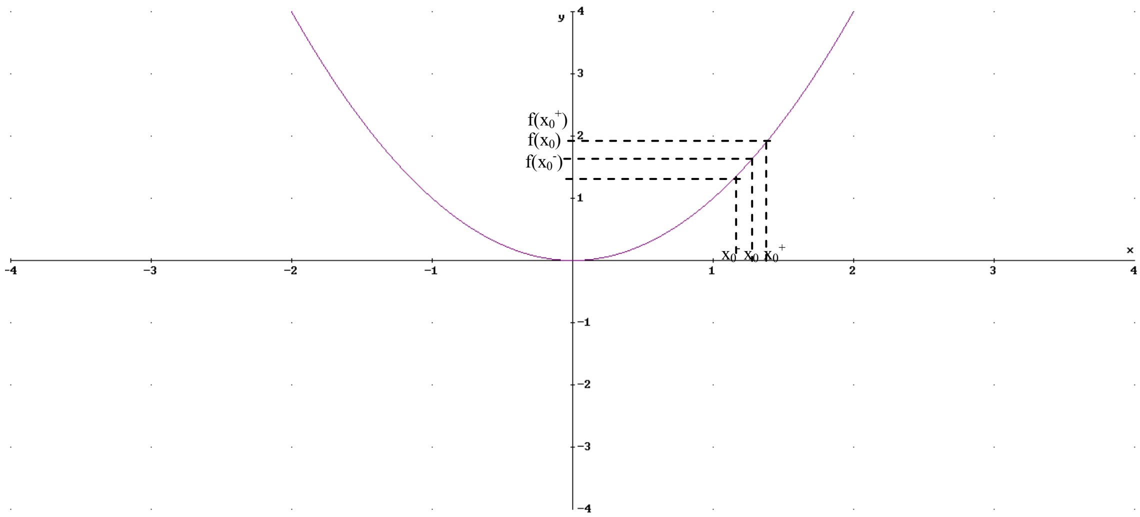
4. Monotonía: crecimiento y decrecimiento, puntos relativos

4.1 Monotonía: crecimiento y decrecimiento

Estudiar la monotonía de una función consiste en ver en los puntos del dominio donde esta función crece o decrece. Veamos matemáticamente cuando una función crece o decrece en un punto y en un intervalo:

Definición: una función f(x) es creciente en un punto x_0 si se cumple:

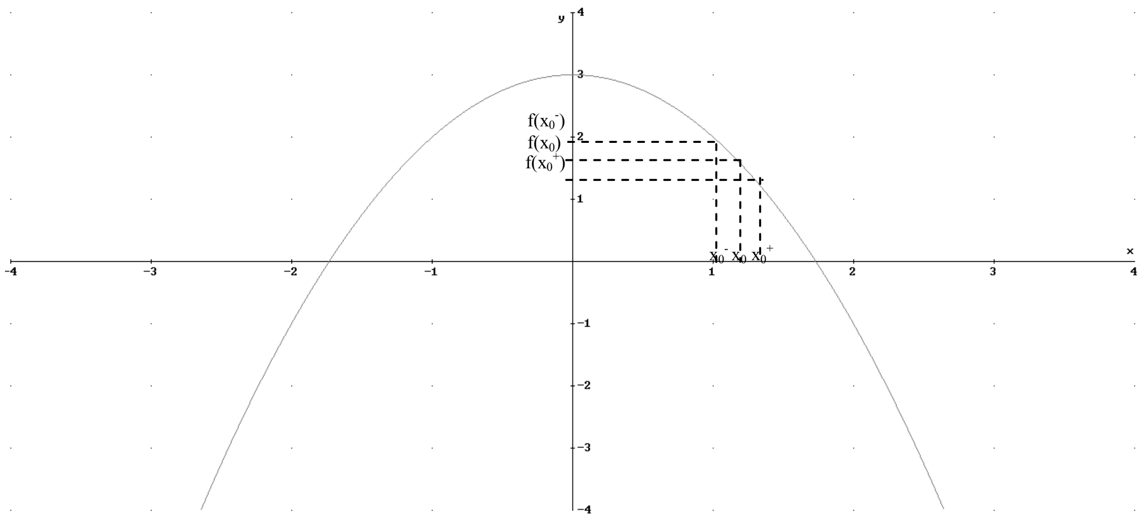
- El valor de la función infinitamente próximo y menor de x_0 cumple: $f(x_0)>f(x_0^-)$
- El valor de la función infinitamente próximo y mayor de x_0 cumple: $f(x_0)<f(x_0^+)$



Definición: una función es creciente en un intervalo (a,b) si se cumple que es creciente en todos los puntos del intervalo, tal que para todo $x_1,x_2\in(a,b)$ tal que $x_1<x_2 \rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Definición: una función f(x) es decreciente en un punto x_0 si se cumple:

- El valor de la función infinitamente próximo y menor de x_0 cumple: $f(x_0)<f(x_0^-)$
- El valor de la función infinitamente próximo y mayor de x_0 cumple: $f(x_0)>f(x_0^+)$



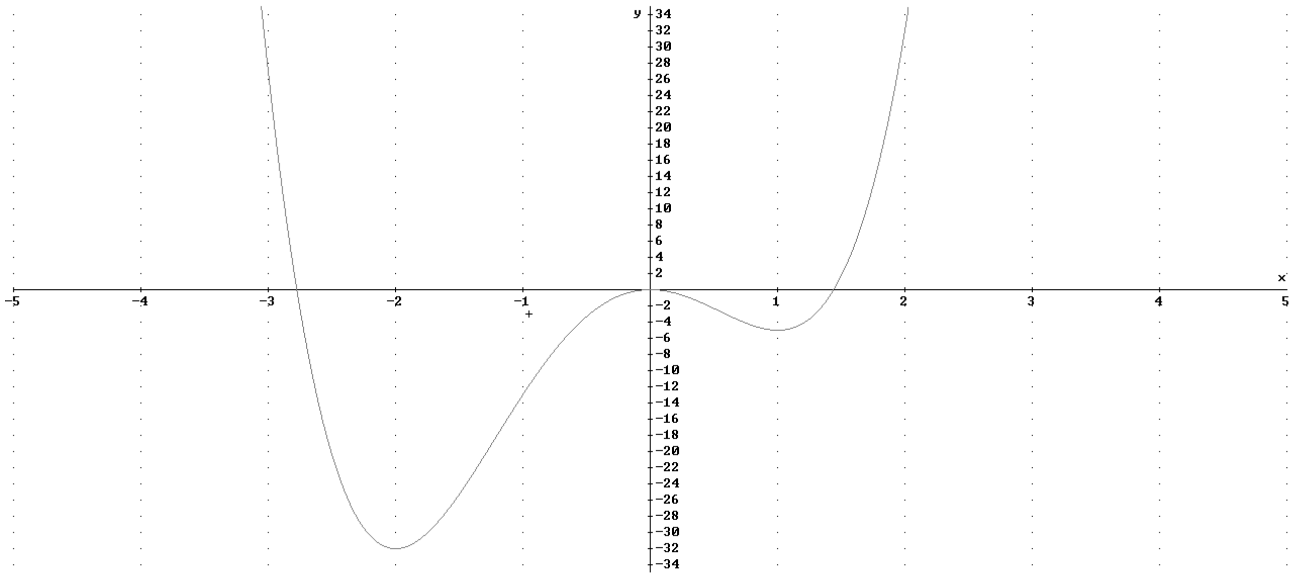
Definición: una función es decreciente en un intervalo (a,b) si se cumple que es creciente en todos los puntos del intervalo, tal que para todo $x_1,x_2 \in (a,b)$ tal que $x_1<x_2 \rightarrow f(x_1)>f(x_2)$

4.2 Puntos relativos

Definición: un punto relativo a f(x) es un punto perteneciente a la función en donde dicha función ni crece ni decrece, puede ser de dos tipos:

a) ***Máximo relativo***: en un entorno próximo al punto por la izquierda la función crece y en un entorno por la derecha la función decrece:
$f(x_0)>f(x_0^-)$ y $f(x_0)>f(x_0^+)$
b) ***Mínimo relativo:*** en un entorno próximo al punto por la izquierda la función decrece y en un entorno por la derecha la función crece
$f(x_0)<f(x_0^-)$ y $f(x_0)<f(x_0^+)$

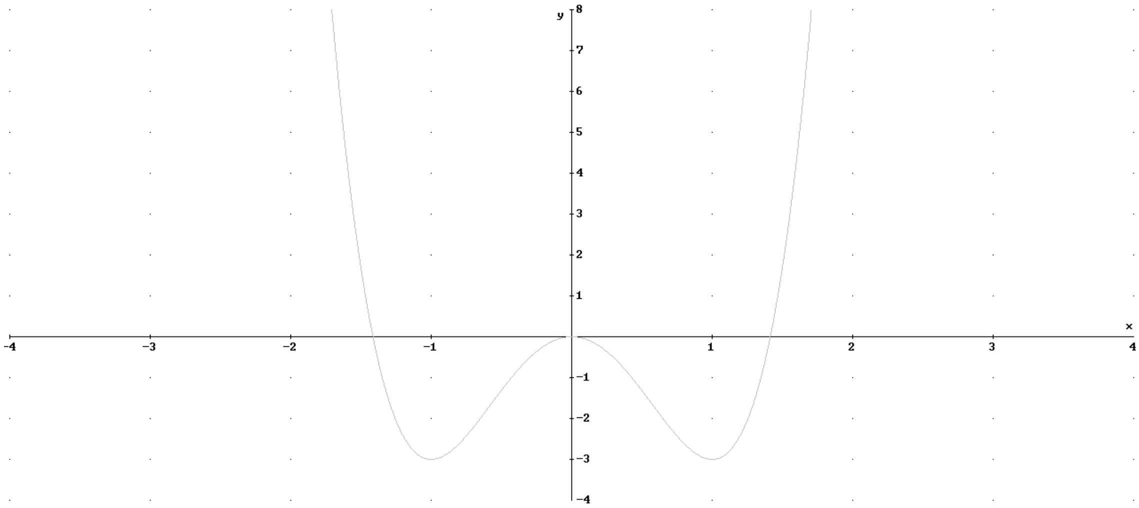
Ejemplo gráfico:
Nota: el crecimiento y decrecimiento son los intervalos de x donde la función crece y decrece. Los puntos relativos son los máximos y mínimos y son puntos con dos coordenadas (x,y)



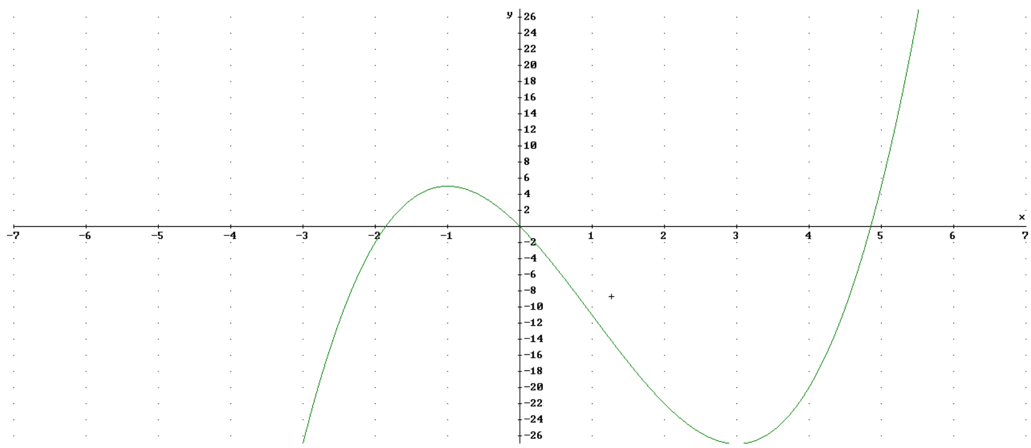
Crecimiento: $(-2,0)\cup(1,\infty)$
Decrecimiento: $(-\infty,-2)\cup(0,1)$
Máximo relativo: M(0,0)
Mínimo relativo: $m_1(-2,-32)$; $m_2(1,-5)$

Ejercicio 5. Estudia la monotonía y los puntos relativos de las siguientes funciones expresadas en forma de gráfica:

a)



b)



5. Simetría

La simetría de una función se refiere al comportamiento de la función con respecto al origen y al eje OY. Atendiendo a esto tenemos que la función puede ser:

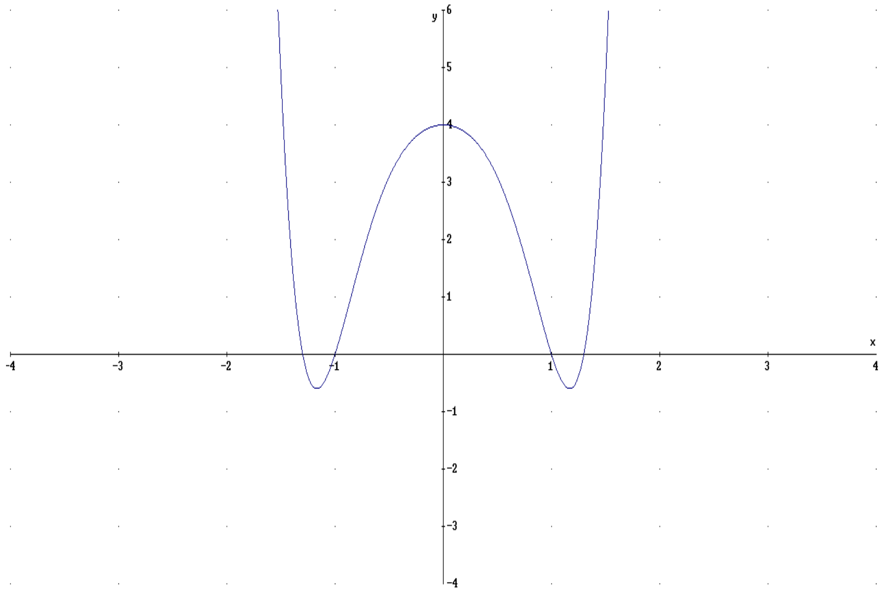
a) ***Simétrica par o respecto el eje OY***: la función se comporta igual a la izquierda y derecha del eje OY, es como si este fuera un espejo. Se cumple f(x)=f(-x)

b) ***Simetría impar o respecto del origen:*** la parte izquierda del eje OY de la gráfica es equivalente al de la derecha pero cambiando de signo. Se cumple -f(x)=f(-x)

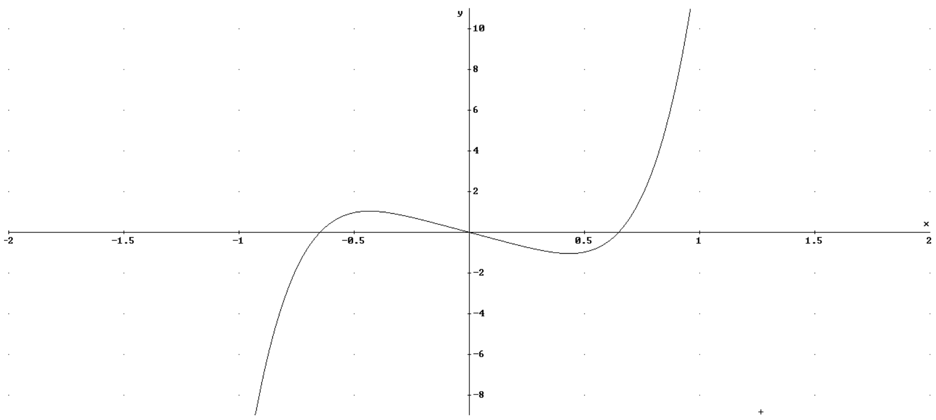
c) ***No simétrica*** cuando no es par ni impar:

Se llaman pares e impares porque las funciones polinómicas cuyos exponentes sean todos pares tienen simetría par y lo que son todos impares simetría impar.

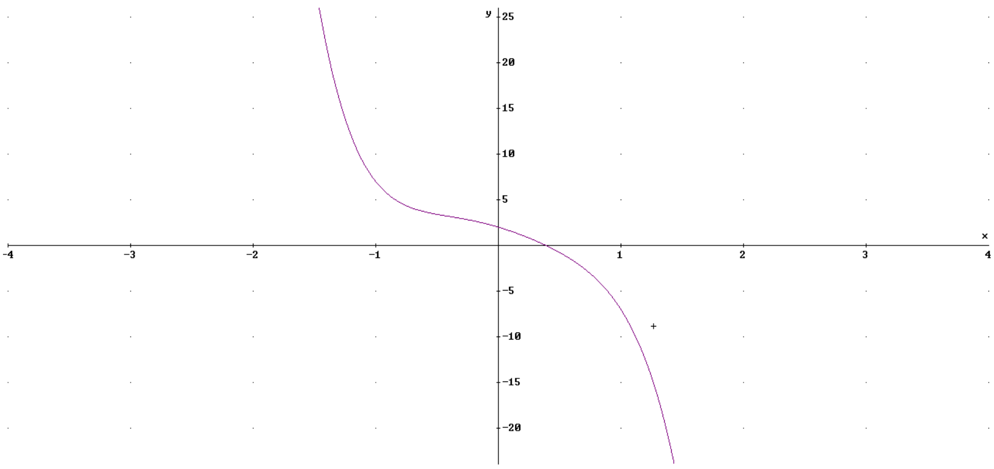
Veamos ejemplos de los tres tipos:



Simetría par o respecto del eje OY



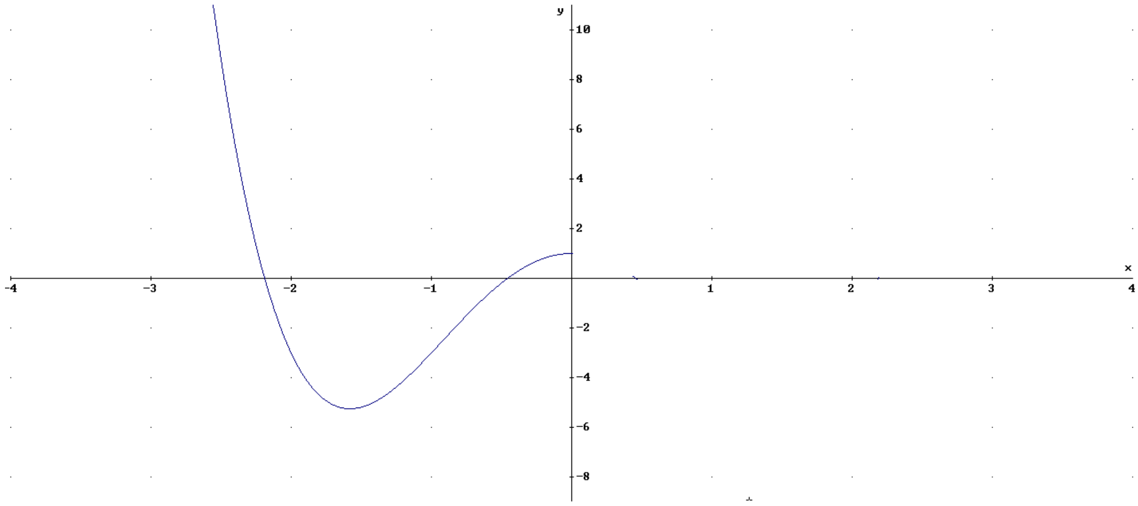
Simetría impar o respecto del origen



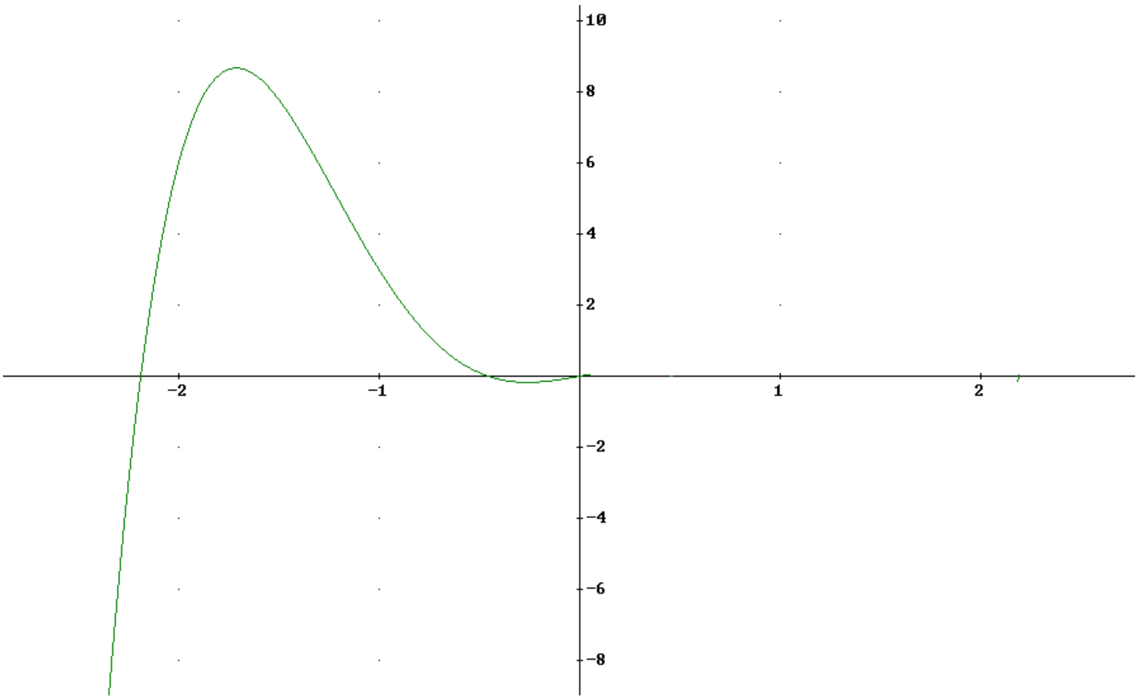
Sin simetría

Ejercicio 6. Completa las gráficas siguientes sabiendo que tienen simetría par o impar según se indique:

a) Par



b) impar



Ejercicio 7. A partir de la definición decir si estas funciones son pares o impares o no tienen simetría.

a) $f(x) = 2x^4 - 3x^2 - 4$

b) $g(x) = 5x^5 - 3x^3 + 2x$

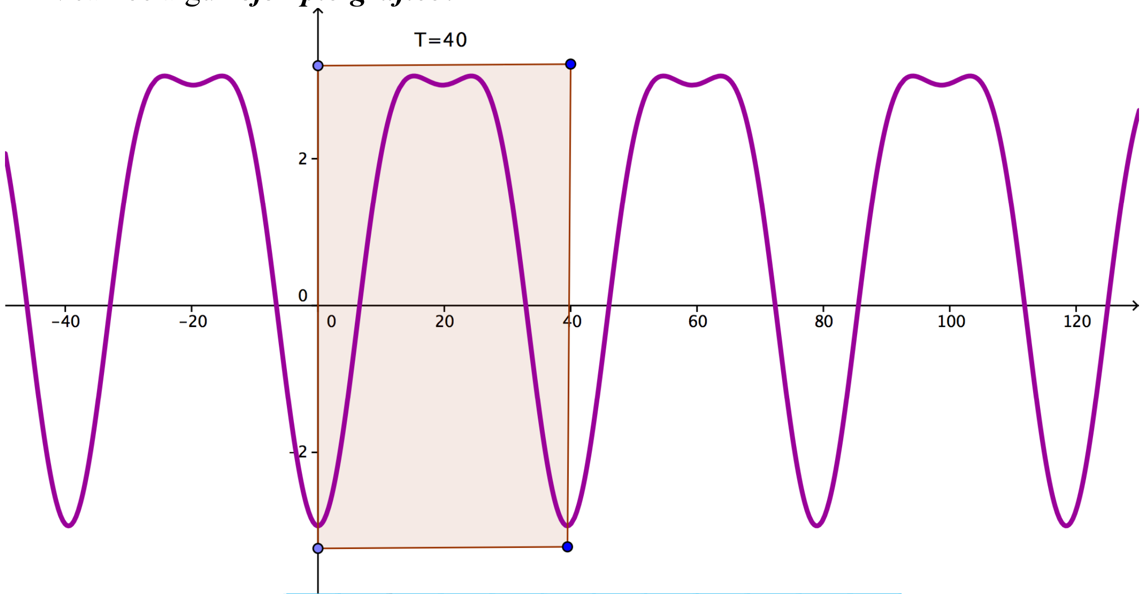
c) $h(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 5$

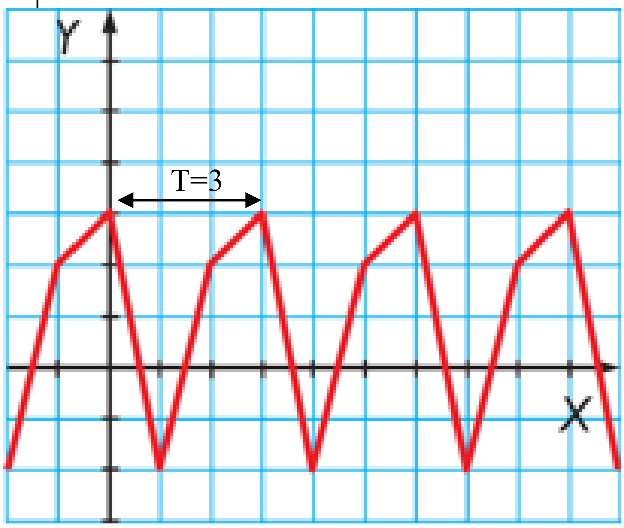
6. Perioricidad.

Definición: una función f(x) es periódica cuando su comportamiento se repite cada vez que la x aumenta o disminuye un cierto intervalo. El mínimo intervalo en el que se repite la función se llama periodo (T).

Matemáticamente: $f(x+n\cdot T)=f(x)$ con $n\in\mathbb{N}$

Veamos algún ***ejemplo gráfico:***





Ejercicio 8. A partir de la gráfica del segundo ejemplo calcular:

a) f(123)
b) f(451)
c) f(1223)

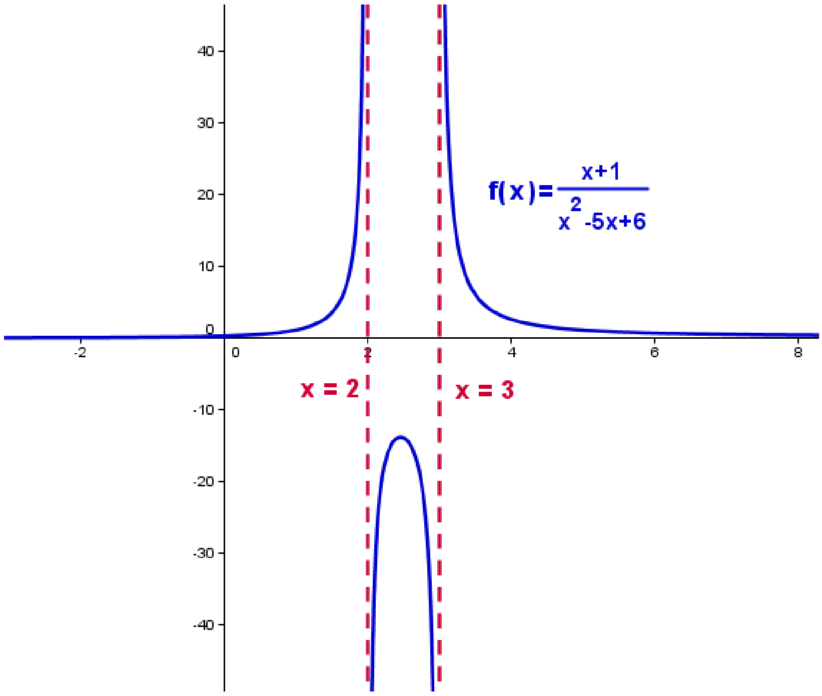
Ejercicio 9. Representar una función periódica de periodo T=2 y calcular f(1235)

7. Tendencias, asíntotas

Las tendencias de una función consiste en el estudio del comportamiento de la función, cuando la variable independiente (x) tiende a +∞ y -∞.
Definición: una asíntota es una recta a la que la función se acerca infinitamente sin llegar a ella. Podemos distinguir entre las siguientes asíntotas:

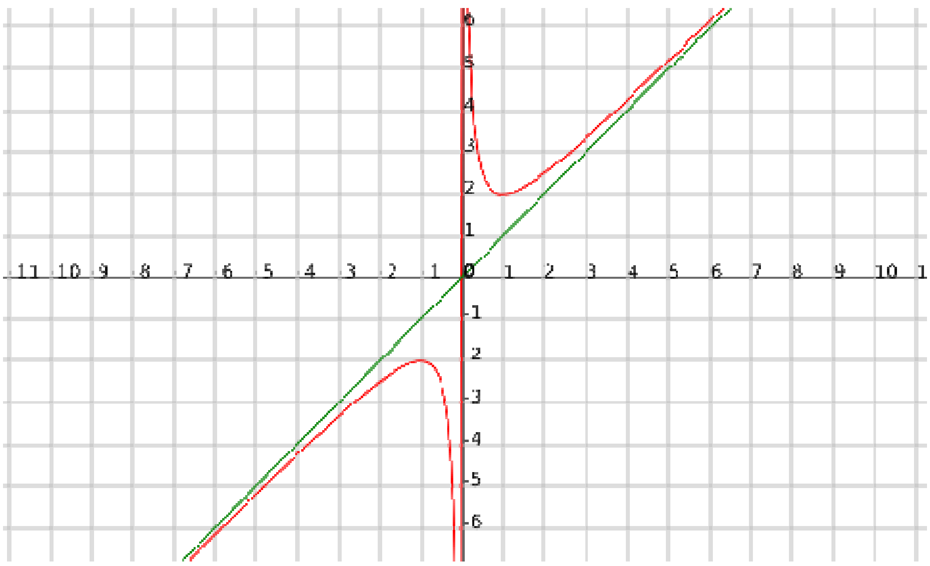
- ***Vertical:*** La recta es de la forma x=a, con lo que es una recta paralela al eje OY. Ocurre cuando se anula el denominador de una función
- ***Horizontal:*** la recta es de la forma y=b, con lo que la recta es paralela al eje OX. Ocurre cuando al tender a x +∞ y -∞, la función tiende al valor b.
- ***Oblicua:*** la recta es de la forma y=mx+n.

Ejemplo gráfico:



A.V. x=2 y x=3

A.H. y=0

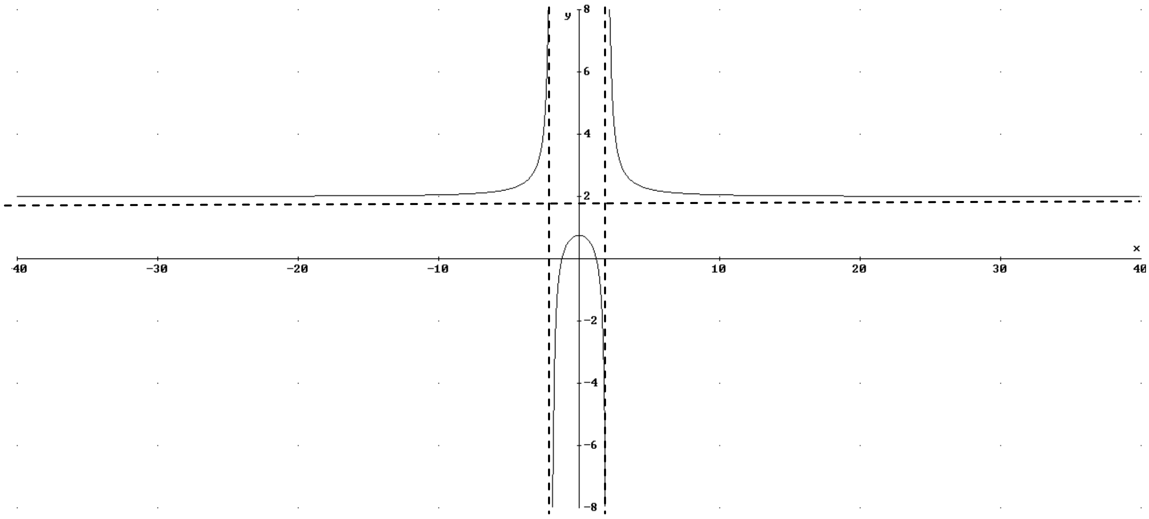


A.V. x=0
A.O. y=x

Ejemplo analítico: Estudiar asíntotas y dibujar la gráfica de f(x)=$\dfrac{2x^2-3}{x^2-4}$

a) Asíntota vertical x=2, x=-2:
f(2^+)=f(2,0001)=1,3·10^4 tiende a ∞, f(2^-)=f(1.9999)= -1,2·10^4 luego tiende a-∞
f(-2^-)=f(-2,0001)=1,3·10^4 tiende ∞, f(-2^+)=f(-1.9999)=1,2·10^4 luego tiende -∞

b) Asíntota horizontal f(9999)≈2, f(-9999) ≈2 $\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2-3}{x^2-4}=2$ → y=2



Ejercicio 10. Calcular las asíntotas y representar a partir de estas las siguientes funciones

a) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-25}$

b) $g(x)=\dfrac{x-1}{x^3-9x}$

c) $h(x)=\dfrac{x^2}{x^2+9x-10}$

Soluciones

Ejercicio 1:

a) No es una función porque para un mismo valor de x toma dos valores de y.

b) No es una función porque para algún valor de x toma dos y tres valores de y.

c) Si es función, pues a cada valor de x le corresponde un único valor de y.

Ejercicio 2.

a) Dom(f(x))=$\mathbb{R}$-{-1,6} Im(f(x))= $\mathbb{R}$
b) Dom(f(x))=[-5,7]; Im(f(x))=[-7,4)
c) Dom(f(x))=$\mathbb{R}$-{-1,1} Im(f(x))= $\mathbb{R}$

Ejercicio 3

a) Dom(f(x))=$\mathbb{R}$-{-1,-5}
b) Dom(f(x))=[-2,3,4];
c) Dom(f(x))=$\mathbb{R}$-{-2,0,1}

Ejercicio 4

I) Dom(f(x))= $\mathbb{R}$-{-1} ; Cont(f(x))= $\mathbb{R}$-{-1,2}.
x=-1 discontinuidad de salto infinito
x=2 discontinuidad evitable.

II) Dom(f(x))= $\mathbb{R}$-{2} ; Cont(f(x))= $\mathbb{R}$-{-2}.
x=2 discontinuidad salto finito.

III) Dom(f(x))= $[-2,4]$; Cont(f(x))= $[-2,4]-\{1\}$
x=1 discontinuidad evitable.

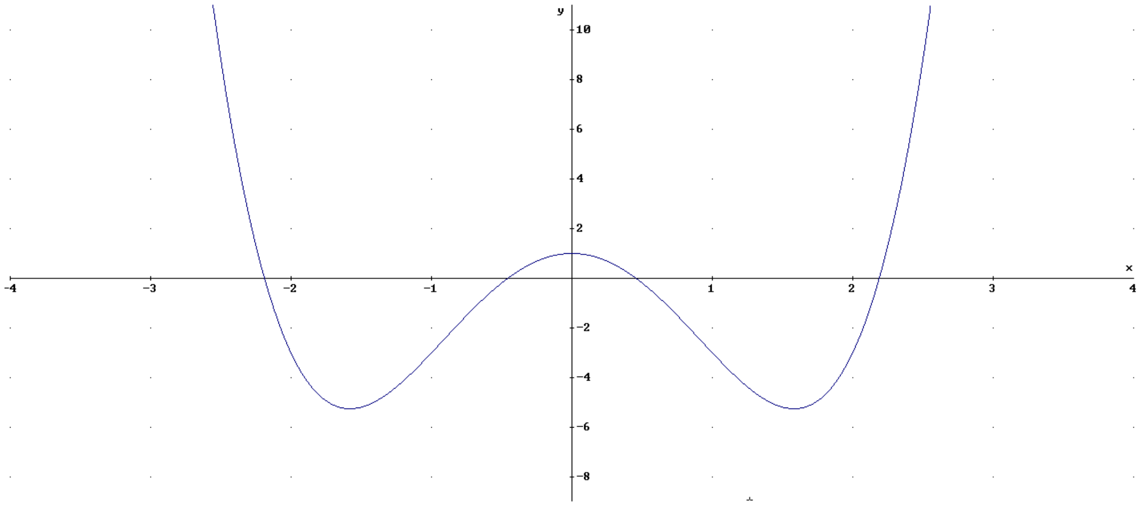
IV) Dom(f(x))= $[-4,4]$-{-2,0} ; Cont(f(x))= $[-4,4]-\{-2,0\}$
x=-2 salto infinito.
x=0 salto finito

Ejercicio 5.

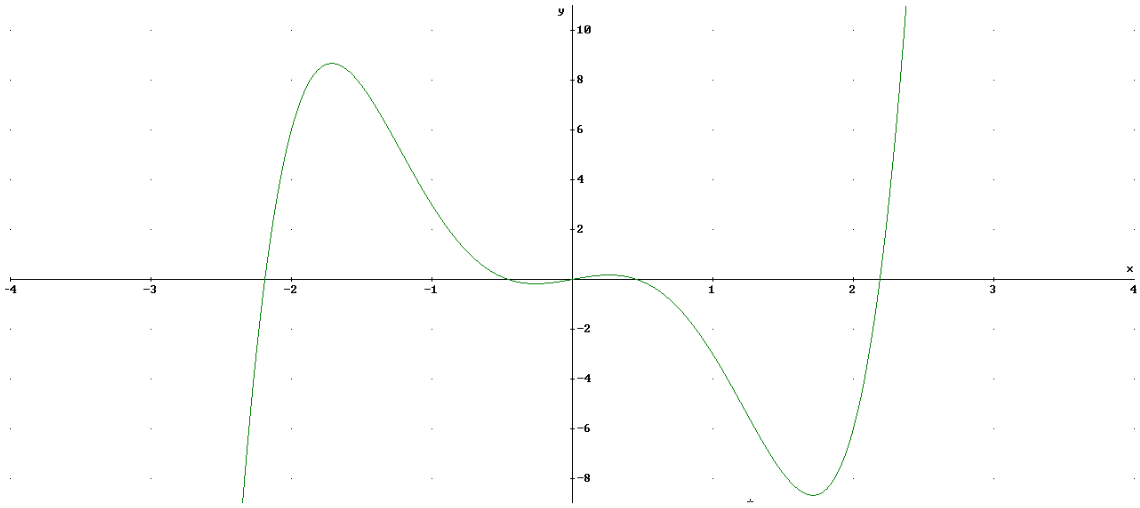
a) Crece: (-1,0)∪(1,∞); Derece: (-∞,-1)∪(0,1). Máximo relativo M(0,0); mínimo relativo m_1(-1,-3), m_2(1,-3)
b) Crece: (-∞,-1)∪(3,∞); Derece: (-1,3). Máximo relativo M(-1,5); mínimo relativo m_1(3,-27)

Ejercicio 6.

a)



b) .



Ejercicio 7.

a) $f(-x) = 2(-x)^4 - 3(-x)^2 - 4 = 2x^4 - 3x^2 - 4 = f(x)$ f(x)=f(-x) Simetría par

b) $g(-x) = 5(-x)^5 - 3(-x)^3 + 2(-x) = -5x^5 + 3x^3 - 2x = -g(x)$ g(-x)=-g(x) Simetría impar

$$h(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^3 + 2(-x)^2 - 4(-x) + 5 = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 4x + 5 \neq \begin{cases} h(x) \\ -h(x) \end{cases} \textit{no sime}$$

Ejercicio 8.

a) f(123) =f(0)= 3

$$\begin{array}{l|l} 123 & 3 \\ \hline \underline{0} & 41 \end{array}$$

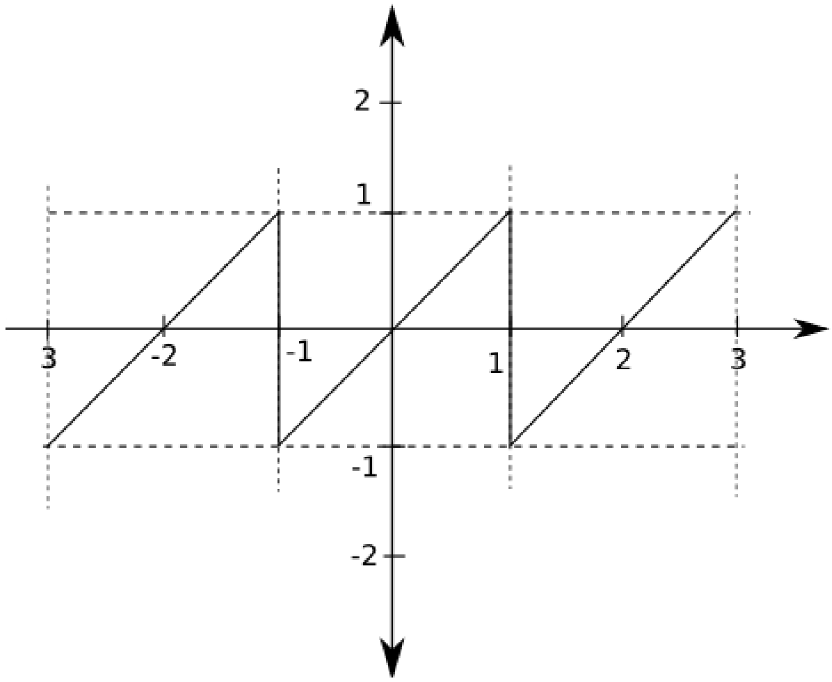
b) f(451)=f(1)=-2

$$\begin{array}{l|l} 451 & 3 \\ \hline \underline{1} & 150 \end{array}$$

c) f(1223)=f(2)=2

$$\begin{array}{l|l} 1223 & 3 \\ \hline \underline{2} & 407 \end{array}$$

Ejercicio 9.



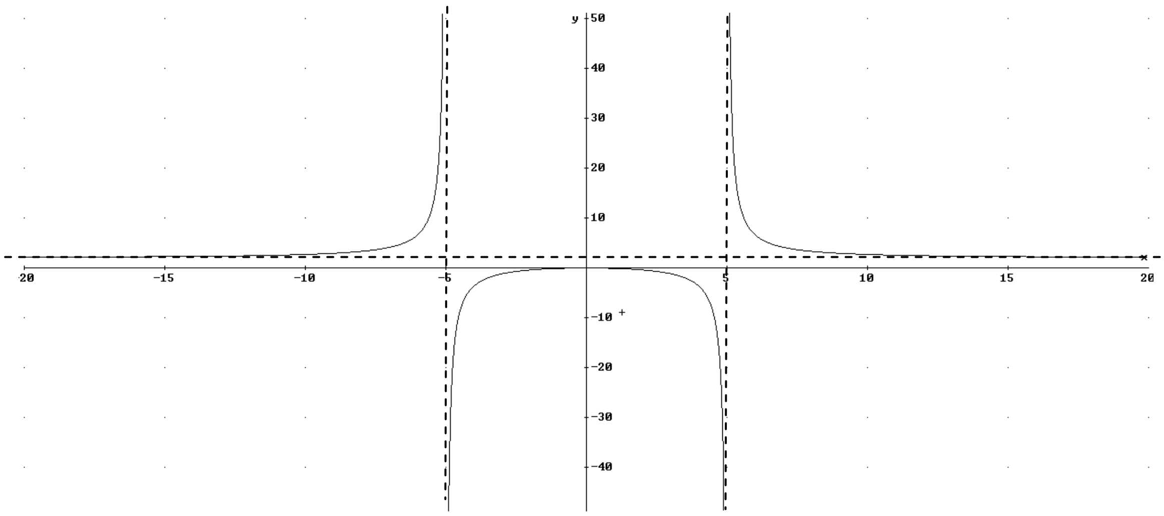
f(1235)=f(1)=1.

Ejercicio 10.

a) A.V. $x^2-25=0 \rightarrow x=5, x=-5$

$$x=-5\begin{cases} f(-5^-)=f(-5.001)=+\infty \\ f(-5^+)=f(-4.999)=-\infty \end{cases}, \quad x=5\begin{cases} f(5^+)=f(5.001)=+\infty \\ f(5^-)=f(4.999)=-\infty \end{cases}$$

A.H. $\begin{cases} f(\infty)=f(9999)=2^+ \\ f(-\infty)=f(-9999)=2^+ \end{cases} \rightarrow$ y=2

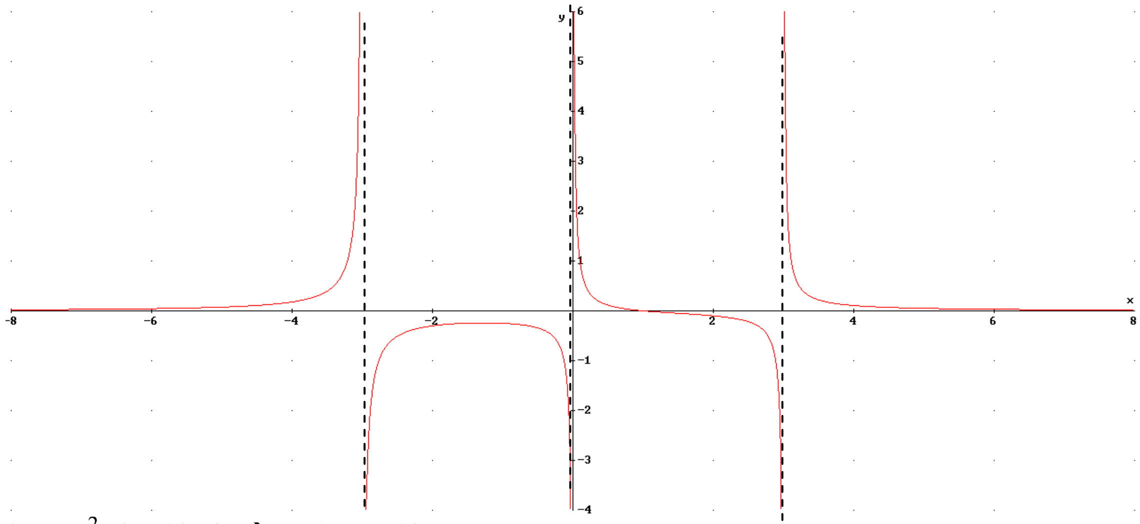


b) x^3-9x=0 → x=0, x=-3, x=3

$$x=-3\begin{cases} f(-3^-)=f(-3.001)=+\infty \\ f(-5^+)=f(-2.999)=-\infty \end{cases} \quad x=0\begin{cases} f(0^-)=f(-0.001)=-\infty \\ f(0^+)=f(0.001)=\infty \end{cases}$$

$$x=3\begin{cases} f(3^+)=f(3.001)=+\infty \\ f(3^-)=f(2.999)=-\infty \end{cases}$$

A.H. $\begin{cases} f(\infty)=f(9999)=0^+ \\ f(-\infty)=f(-9999)=0^+ \end{cases}$ → y=0



c) A.V. x^2+9x-10=0 → x=1, x=-10

$$x=-10\begin{cases} f(-10^-)=f(-10.001)=+\infty \\ f(-10^+)=f(-9.999)=-\infty \end{cases} \quad x=1\begin{cases} f(1^+)=f(1.001)=+\infty \\ f(1^-)=f(0.999)=-\infty \end{cases}$$

A.H. $\begin{cases} f(\infty)=f(9999)=1^- \\ f(-\infty)=f(-9999)=1^+ \end{cases}$ → y=1