Tema 6. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones

1. Definición de ecuación e identidad. Resolución de ecuaciones.

1.1. Ecuación e identidad

Es importante distinguir lo que es una ecuación de una identidad, pues es muy típico de los alumnos de ESO que resuelvan expresiones que no son igualdades, y en donde sólo se pida obtener una expresión equivalente simplificada, es decir una identidad.

Identidad: es una expresión algebraica, números y letras (variables) relacionados con las operaciones algebraicas, donde ambos lados de la igualdad son siempre iguales *para cualquier valor de las letras*. No se puede resolver una identidad pues no tienen solución, o lo mejor dicho todo valor de las letra es solución.

Ejemplos: $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$, $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$ $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$ (identidades notables); $x+3x^2-2x+3-4=3x^2-x-1$

Ejercicio 1. Comprobar que las igualdades del ejemplo son válidas para dos valores diferentes de las variables.

Ecuación: es una expresión algebraica, números y letras (incógnitas) relacionados con las operaciones algebraicas donde la igualdad de sus miembros sólo es cierta para *algún valor de las incógnitas.*

Ejemplos: $3x+2=8$; $x^2-1=0$, $x+y=2$

Ejercicio 2. Calcular a ojo las soluciones de las ecuaciones de los ejemplos anteriores.

1.2. Resolución de ecuaciones.

Resolver una ecuación: es hallar sus soluciones, es decir los valores de las incógnitas para las cuales se cumple la igualdad.

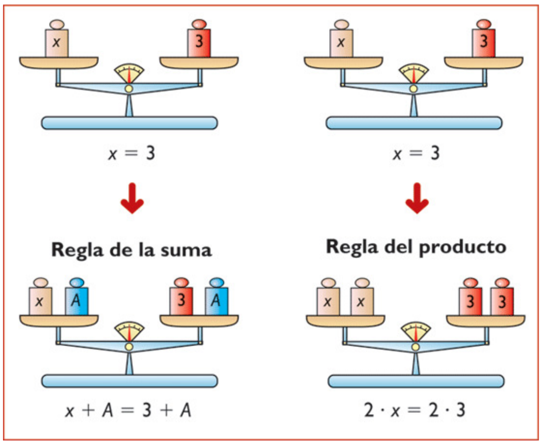
Ecuaciones equivalentes: son aquellas que tienen las mismas soluciones. Para resolver ecuaciones buscamos ecuaciones equivalentes más sencillas que la dada inicialmente. Existen varios métodos de obtener ecuaciones equivalentes:

1. ***Regla de suma:*** si a una ecuación sumamos o restamos la misma expresión algebraica a ambos lados de la ecuación la ecuación que obtenemos es equivalente. Cuando aplicamos esta regla solemos decir que "lo que esta sumando pasa restando y al revés"

   Ejemplo: $3x+5=-3-2x \rightarrow 3x+5+(-5+2x)=-3-2x+(-5+2x) \rightarrow 5x=-8$

2. ***Regla del producto:*** si a una ecuación la dividimos o multiplicamos por un mismo número distinto de cero la ecuación que obtenemos es equivalente. Cuando aplicamos la regla se dice que "lo que está multiplicando pasa dividiendo y al revés"

   Ejemplo: $5x=-8 \rightarrow (5x)/5=-8/5 \rightarrow x=-8/5$



2. Ecuaciones con una incógnita.

2.1. Ecuaciones de primer grado

Son las más sencillas de resolver, a partir de las operaciones de la suma y el producto vistas en el apartado anterior obtendremos una expresión de la forma

a·x+b=0 donde a y b son números reales. Cuya solución es única **x=-b/a**

Ejemplo:

$$\frac{3(x+1)}{2}-x=\frac{x-4}{3} \rightarrow \frac{9(x+1)}{6}-\frac{6x}{6}=\frac{2\cdot(x-4)}{6} \rightarrow 9x+9-6x=2x-8 \rightarrow x=-17$$

Comprobación: $\frac{3(-17+1)}{2}-(-17)=\frac{-17-4}{3} \rightarrow -24+17=-7$

Ejercicio 3. Resolver**:**

a) $\frac{x-3}{2}+7=x-\frac{5-x}{3}$

b) $\frac{-3(5-x)}{10}-\frac{3x}{2}=7-\frac{5x}{3}$

c) $\frac{2\cdot(5-3x)}{3}-\frac{2x-1}{2}=1-\frac{x}{4}$

2.2. Ecuaciones de segundo grado

Después de operar la expresión simplificada de ecuaciones de segundo grado es de la forma:

$a\cdot x^2+bx+c=0$. → solución: $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2\cdot a}$

Podemos ver que según el signo del ***discrimínate*** $\Delta=b^2-4ac$ podemos tener 1,2 o ninguna solución:

a) $\Delta>0$ dos soluciones $x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}$, $x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}$

b) $\Delta=0$ una solución $x=\frac{-b}{2\cdot a}$ (raíz doble)

c) $\Delta<0$ ninguna solución real (números complejos)

Resolución de ecuaciones incompletas (b o c nulas). Se pueden resolver por el método general, pero también se puede resolver de manera más sencilla. Veamos los dos casos:

1) $ax^2+c=0 \rightarrow x^2=-\frac{c}{a} \rightarrow x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}\begin{cases} si\ \frac{c}{a}>0\ no\, solución \\ si\ \frac{c}{a}<0\ 2\, soluciones \end{cases}$

2) $ax^2+bx=0 \rightarrow x(ax+b)=0 \rightarrow x=0$, $x=-b/a$. Siempre dos soluciones

Ejercicio 4. Resolver**:**

a) $x^2-6\sqrt{2}x+18=0$
b) $2x^2-7x+3=0$
c) $\frac{x+7}{x+3}+\frac{x^2-3x+6}{x^2+2x-3}=1$
d) $\frac{x+1}{x+5}+\frac{1-x}{x-4}=\frac{5}{2}$
e) $(x-\sqrt{3})^2-1+x=x$
f) $1+(x-2)^2=1$
g) $9x^2-25=0$
h) $x^2-2x=0$

2.3. Ecuaciones bicuadradas

Ecuaciones polinómicas de 4º grado sin términos impar, es decir de la forma:

$ax^4+bx^2+c=0$. *con* $a,b,c\in R$

Procedimiento para resolver las ecuaciones bicuadráticas:

1. Cambio variable: $x^2=t$, luego $x^4=t^2 \rightarrow at^2+bt+c=0$
2. Resolver la ecuación de segundo grado en t.
3. Soluciones son las raíces cuadradas de las soluciones en t (deshacer cambio variable). $x=\pm\sqrt{t}$.

El número de posibles soluciones son:

a) 0 soluciones, o no soluciones en t o son negativas.
b) 2 soluciones distintas
c) 2 soluciones dobles
d) 4 soluciones distintas

Ejemplo: $x^4-5x^2+4=0$

Paso1: $x^2=t \rightarrow t^2-5t+4=0$

Paso2: $t=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm 3}{2}=\left\langle\begin{matrix}4\\1\end{matrix}\right.$

Paso3 : $x=2,-2,1,-1$

Ejercicio 5 : Resolver las siguientes ecuaciones bicuadráticas.

a) $x^4-x^2-6=0$
b) $x^4-3x^2+2=0$
c) $-x^4-4x^2-45=0$
d) $x^4-2x^2=0$

2.4. Ecuaciones polinómicas

Las ecuaciones polinómicas son expresiones de la forma p(x)=0 con p(x) un polinomio. Consiste en obtener los valores de x que anulan el polinomio, es decir las raíces. Las formas de proceder a calcular las soluciones son las mismas que las de obtener las raíces, vistas en el tema anterior (Ruffini, factor común, ecuaciones de 2º grado…)

Ejemplos:

$x^3+x^2=0 \rightarrow x^2(x+1)=0 \rightarrow x=0$ (doble) y $x=-1$

$x^5-3x^4-8x^3+12x^2+16x=0 \rightarrow x\cdot(x-4)\cdot(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x+1)=0 \rightarrow x=0, x=-2, x=2, x=-1, x=4$

Ejercicio 6. Resolver:

a) $(x+\pi)\cdot(x-1/2)\cdot(3x-7)=0$

b) $x^2\cdot(x-\sqrt{2})\cdot(5x+1)=0$

c) $4x^5+20x^4-53x^3+23x^2+13x-7=0$

d) $x^5-6\cdot x^4+10\cdot x^3-10\cdot x^2+9\cdot x-4=0$

e) $x^3+3x^2-4x=5x^2-x$

2.5. Ecuaciones con radicales.

En este apartado veremos ecuaciones con raíces o con radicales. El objetivo a la hora de resolver estas ecuaciones es eliminar la raíz. Tres casos (en este curso sólo veremos el caso a) :

a) Si tenemos una única raíz tendremos que aislarla a un lado de la igualdad, tomando cuadrados ambos de la igualdad desaparecerá la raíz.
b) Si tenemos dos raíces y ningún otro factor dejamos una a cada lado de la igualdad y elevamos al cuadrado
c) Si tenemos dos raíces otro más factor sumando, tendremos que aislar una raíz, hacer el cuadrado y repetir el procedimiento para la otra raíz.

Una vez obtenidas las ***soluciones*** tendremos que ***comprobar*** que estas lo son realmente, ya que al elevar al cuadrado se introducen soluciones inexistentes.

Nota: la razón de que al elevar al cuadrado haya soluciones no válidas es que el signo al cuadrado se pierde, así $1\neq-1$ pero $(1)^2=(-1)^2$

Ejemplo:

1) $\sqrt{3x+4}-4=-2x \rightarrow \sqrt{3x+4}=4-2x \xrightarrow{\text{elev cuadrado}} 3x+4=(4-2x)^2$

$3x+4=16+4x^2-16x \rightarrow 4x^2-19x+12=0 \quad x=\begin{cases}4\\ 3/4\end{cases}$

Comprobación:

x=4 → $\sqrt{16}-4\neq-8$ (no solución)

x= ¾ → $\sqrt{\frac{25}{4}}-4=\frac{5}{2}-4=-\frac{3}{2}=-2\cdot\frac{3}{4}$ (solución)

Ejercicio 7. Resolver**:**

a) $4x + 2\sqrt{x+4} = 4$

b) $x^2 + \sqrt{4x^2 - 3} = 0$

c) $x - \sqrt{x = 2}$

d) $x - \sqrt{x-1} = -x + 3$

2.6. Ecuaciones de fracciones polinómicas.

Son ecuaciones de suma y resta de fracciones polinómica. La forma de resolver estas ecuaciones se realiza siguiendo los siguientes pasos:

Paso 1: Se expresan todas las fracciones con común denominador a ambos lados de la igualdad

Paso 2: se igualan los denominadores y se resuelve dicha ecuación.

Paso 3: se comprueban las soluciones. En caso de que alguna de las soluciones anule algún denominador esta no será válida.

Ejemplo: $\frac{2x-2}{x-2} + \frac{x}{x+1} - \frac{x-2}{x+2} = \frac{5}{6}$

Paso 1:

$$\frac{6(2x-2)(x+1)(x+2)}{6(x-2)(x+1)(x+2)} + \frac{6x(x-2)(x+2)}{6(x-2)(x+1)(x+2)} - \frac{6(x-2)(x+1)(x-2)}{6(x-2)(x+1)(x+2)} = \frac{5(x-2)(x+1)(x+2)}{6(x-2)(x+1)(x+2)}$$

Paso 2

$12\cdot x^3 + 42\cdot x^2 - 36\cdot x - 48 = 5\cdot x^3 + 5\cdot x^2 - 20\cdot x - 20 \rightarrow 7\cdot x^3+37\cdot x^2-16\cdot x-28=0$

Soluciones: x=1, x=$\frac{-22 \pm 12\sqrt{2}}{7}$

Paso 3: Las 3 soluciones son validas porque para estos valores de x no se anula ningún denominador.

Ejercicio 8. Resolver**:**

a) $\frac{2}{x} - \frac{2-x}{x+3} = 1$

b) $\frac{x}{x+1} + \frac{2}{x+2} = 3$

c) $\frac{x+3}{x-1} - \frac{2}{x-3} = x - 4$

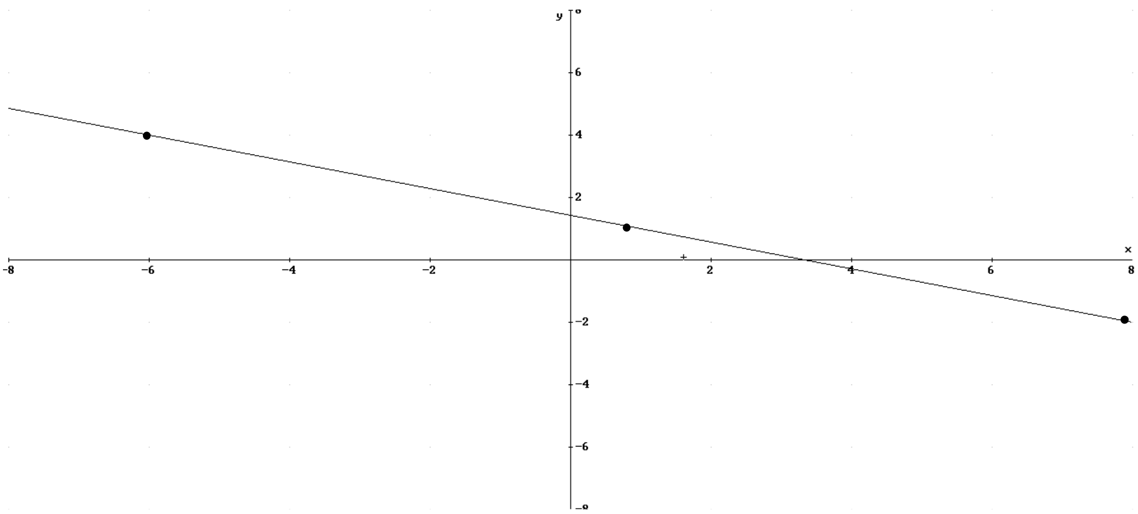
3. Ecuaciones lineales con dos incógnitas

Las ecuaciones lineales con dos incógnitas son de la forma **ax+by=c**, se caracterizan por tener infinitas soluciones para las dos variables (x,y) situadas sobre una recta.

Ejemplo: **3x+7y=10,** despejamos una variable (cualquiera de las dos) $x = \frac{10-7y}{3}$, damos valores a la variable no despejada y obtendremos valores de la despejada. Como es una recta si lo hacemos correctamente con dos valores sería suficiente, ya que por dos puntos pasa una única recta.

x	y
1	1
-6	4
8	-2

Representamos las soluciones:



Ejercicio 9. Representa las soluciones de las siguientes ecuaciones

a) –x+y=1

b) √3x+5y=√3

c) -7x+3y=-5

4. Sistemas de ecuaciones

4.1. Dos ecuaciones lineales

Los sistemas con dos ecuaciones lineales son de la forma:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ ax+by=c \\ (2)\ a'x+b'y=c'\end{array}\right\}$$

Las soluciones al sistema serán las soluciones comunes a la ecuación lineal con dos incógnitas de la ecuación primera (S_1) y las soluciones de la segunda ecuación (S_2). De esta forma si llamamos S a las soluciones del sistema, estas serán igual a

$S=S_1\cap S_2$

4.1.1. Soluciones. Interpretación gráfica de las soluciones.

Según el número de soluciones se puede distinguir entre los siguientes tipos de sistemas:

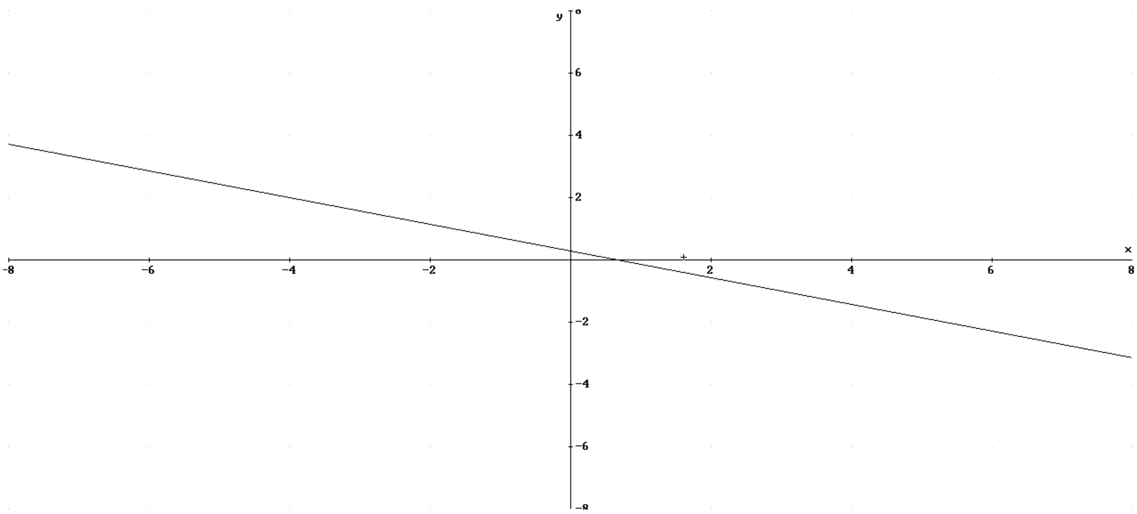
1. Sistema compatible indeterminado, infinitas soluciones

Ocurre cuando la ecuación (1) es equivalente a la (2), se cumple entonces:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

Ejemplo: $\left.\begin{array}{l}(1)\ 3x+7y=2\\(2)\ -6x-14y=-4\end{array}\right\}(2)\equiv(1)\rightarrow\frac{3}{-6}=\frac{7}{-14}=\frac{2}{-4}$

Si representamos las dos ecuaciones se trata de dos rectas iguales, por tanto las soluciones son todos los puntos situados en la recta que viene determinada por la ecuación (1) o (2). En nuestro ejemplo:



2. Sistema incompatible, no tiene soluciones

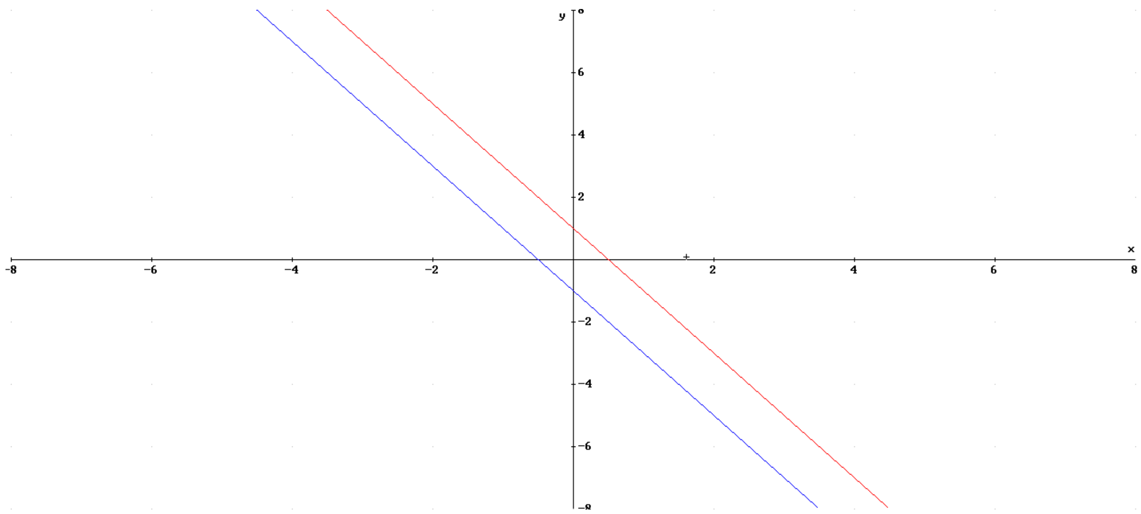
Ocurre cuando las dos ecuaciones son incompatibles, es decir tienen ninguna solución en común. Ocurre cuando la relación entre sus coeficientes son los siguientes:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$$

No tiene soluciones, al tratarse de dos rectas paralelas. Veamos un ejemplo:

$\left.\begin{array}{l}(1)\ 2x+y=1\\(2)\ 4x+2y=-2\end{array}\right\}\rightarrow\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\neq\frac{1}{-2}$.

Interpretación gráfica:



3. Compatible determinado, una única solución.

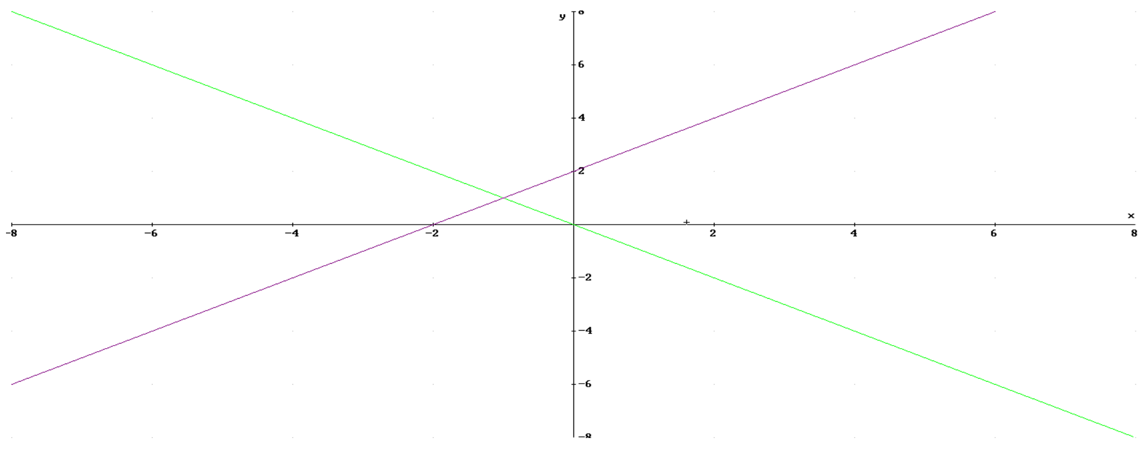
Ocurre cuando tienen una única solución. Gráficamente ocurre cuando las dos rectas se cortan en un único punto que será la solución a las dos ecuaciones. Ocurre si la relación entre los coeficientes:

$$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$$

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ x+y=0 \\ (2)\ -x+y=2\end{array}\right\} \frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1} \rightarrow comp \det$$

Se resuelven por los métodos de reducción, igualación y sustitución vistos el año pasado.



4.1.2. Resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales

Resolver un sistema es hallar sus soluciones, según el tipo de sistema tendremos:

1. ***Compatibles indeterminados:*** la solución es la de una de las dos ecuaciones, que resolvemos como hemos visto en el apartado anterior representando una recta.
2. ***Incompatibles:*** no tienen solución, por lo que no tendremos que resolverlas
3. ***Compatibles determinados:*** tiene una única solución que resolvemos por uno de los tres métodos vistos en el curso anterior. Veamos un ejemplo y resolvámoslo por los tres métodos:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\, x+y=1\\(2)\, x-y=0\end{array}\right\}$$

a) Sustitución: igualamos una incógnita en una ecuación y la introducimos en la otra ecuación, obteniendo una ecuación de primer grado con una incógnita:

y=1-x → x-(1-x) =0; 2x=1; x=1/2; y=1-1/2=1/2 → ***solución; x=1/2, y=1/2***

b) Igualación: consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones para luego igualarlas entre si y obtener una ecuación con una incógnita:

y=1-x; y=x → 1-x=x; 2x=1→ ***solución x=1/2; y=1/2***

c) Reducción: consiste en sumando o restando las ecuaciones multiplicadas por factores se anula alguna incógnita, la x o la y. Así obtenemos una ecuación de primer grado con una incógnita:

(1)+(2) → 2x=1, x=1/2, y=1-1/2=1/2 → ***solución x=1/2; y=1/2***

Ejercicio 10. Resuelve, clasifica e interpreta gráficamente las soluciones de los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l}(1)\, 3x-2y=1\\(2)\, 6x-4y=2\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l}(1)\;\; 4x-y=5\\(2)\, -8x+2y=3\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l}(1)\;\; x-3y=2\\(2)\;\; 2x+y=4\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{l}(1)\, -18x+6=6y\\(2)\, y+3x+5=6\end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{l}(1)\;\; \dfrac{x}{3}-2y=\dfrac{3}{4}\\(2)\;\; 5x+y=0\end{array}\right\}$

Poblemas finales.

Problema 1. En una granja se crían gallinas y conejos. Si se cuentan las cabezas, son 50, si las patas, son 134. ¿Cuántos animales hay de cada clase?

Problema 2. Un granjero cuenta con un determinado número de jaulas para sus conejos. Si introduce 6 conejos en cada jaula quedan cuatro plazas libres en una jaula. Si introduce 5 conejos en cada jaula quedan dos conejos libres. ¿Cuántos conejos y jaulas hay?

Problema 3. En una lucha entre moscas y arañas intervienen 42 cabezas y 276 patas. ¿Cuántos luchadores había de cada clase? (Recuerda que una mosca tiene 6 patas y una araña 8 patas).

Problema 4. En la granja se han envasado 300 litros de leche en 120 botellas de dos y cinco litros. ¿Cuántas botellas de cada clase se han utilizado?

Problema 5. Se quieren mezclar vino de 0,60 €. con otro de 0,35 €., de modo que resulte vino con un precio de 0,50 €. el litro. ¿Cuántos litros de cada clase deben mezclarse para obtener 200 litros de la mezcla?

Problema 6. Al comenzar los estudios de Bachillerato se les hace un test a los estudiantes con 30 cuestiones sobre Matemáticas. Por cada cuestión contestada correctamente se le dan 5 puntos y por cada cuestión incorrecta o no contestada se le quitan 2 puntos. Un alumno obtuvo en total 94 puntos. ¿Cuántas cuestiones respondió correctamente?

Problema 7. En mi clase están 35 alumnos. Nos han regalado por nuestro buen comportamiento 2 bolígrafos a cada chica y un cuaderno a cada chico. Si en total han sido 55 regalos, ¿cuántos chicos y chicas están en mi clase?

Problema 8. Un padre de familia compra en un supermercado 6 Kg. de café y 3 de azúcar, por lo que paga 15,30 €. Ante la amenaza de nuevas subidas, vuelve al día siguiente y compra 1 Kg. de café y 10 Kg. de azúcar por lo que paga 8,25 €. No se fija en el precio y plantea el problema a su hijo de 14 años. Este después de calcular lo que su madre hubiera pagado por 6 Kg de café y 60 de azúcar halla el precio de cada artículo. ¿Podrías llegar tú a resolver el problema?

Problema 9. Con 10 €. que le ha dado su madre Juan ha comprado 9 paquetes de leche entera y leche semidesnatada por un total de 9,60 €. Si el paquete de leche entera cuesta 1,15€. y el de semidesnatada 9 €. ¿Cuántos paquetes ha comprado de cada tipo?

Problema 10. En un puesto de verduras se han vendido 2 Kg de naranjas y 5 Kg de patatas por 5.4 €. y 4 Kg de naranjas y 2 Kg de patatas por 6 €. Calcula el precio de los kilogramos de naranja y patata.

Problema 11. Un comerciante de ultramarinos vende el Kg de azúcar a 1,20€. Además, tiene café de dos clases; cuando toma 2 Kg de la primera calidad y 3 Kg de la segunda resulta la mezcla a 0,75 € el Kg y cuando toma 3 Kg de la primera clase y 2 Kg de la segunda entonces resulta la mezcla a 0,80 €. el Kg ¿Cuál es el precio de cada calidad de café?

Problema 12. El día del estreno de una película se vendieron 600 entradas y se recaudaron 1962,5 €. Si los adultos pagaban 4 €. y los niños 1,50 €. ¿Cuál es el número de adultos y niños que acudieron?

Problema 13. En una librería han vendido 20 libros a dos precios distintos: unos a 8€. y otros a 12€. con los que han obtenido 192€. ¿Cuántos libros han vendido de cada precio?

Problema 14. En una pastelería se fabrican dos clases de tartas. La primera necesita 2'4 Kg de masa y 3 horas de elaboración. La segunda necesita 4 Kg de masa y 2 horas de elaboración. Calcula el número de tartas elaboradas de cada tipo si se han dedicado 67 horas de trabajo y 80 Kg de masa.

Ejercicio 15. En una tienda venden un equipo de música y un ordenador. Mi hermana compro ambos el mes pasado y pago 2500 € por los dos. Ahora la tienda rebaja un 10% el equipo de música y un 15% el ordenador, siendo el precio total de ambos de 2157.5 €. ¿Cuál era el precio del equipo de música y del ordenador antes de las rebajas?

Ejercicio 16. En un examen tipo test hay 20 preguntas. Por cada pregunta acertada puntuamos 2 puntos y por cada pregunta fallada puntuamos -0.5 puntos; el aprobado esta en 20 puntos. Si respondemos a todas las preguntas ¿Cuántas preguntas hay que acertar para aprobar?

Ejercicio 17. Sea un cuadrado que cumple que al aumentar en 3m el lado su área aumenta en 75m^2. Calcular el lado del cuadrado original.

Ejercicio 18. Puede un triangulo de lados de 9cm, 16cm y 18cm. Comprueba que no es rectángulo. Puede convertirse en un triangulo rectángulo al quitarle la misma cantidad a sus tres lados. ¿Cuánto valen sus nuevos lados?

Ejercicio 19. Calcular las dimensiones de un triangulo rectángulo isósceles de perímetro 24 cm.

Ejercicio 20. Calcular el tiempo que se tarda en llenar un cubo por dos grifos si se sabe que el segundo tarda el doble en llenarlo que el primero, y que cuando están los dos llenándolo tarda 3 minutos.

Ejercicio 21. Calcular la velocidad media de un coche que en la ida de un viaje entre las ciudades A y B va a una velocidad media de 60km/h y a la vuelta de 40km/h.

Soluciones

Ejercicio 1. Tomaremos los valores a=1, b=2; a=0, b=1 por ejemplo

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab \rightarrow (1+2)^2=1^2+2^2+2\cdot1\cdot2$; $9=9$ $\quad (0+1)^2=0^2+1^2+2\cdot1\cdot0$; $1=1$

$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab \rightarrow (1-2)^2=1^2+2^2-2\cdot1\cdot2$; $1=1$ $\quad (0-1)^2=0^2+1^2-2\cdot1\cdot0$; $1=1$

$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2 \rightarrow (1+2)\cdot(1-2)=1^2-2^2$; $-3=-3$ $\quad (0+1)\cdot(0-1)=0^2-1^2$; $-1=-1$

Tomemos en la última x=0

$x+3x^2-2x+3-4=3x^2-x-1 \rightarrow 0+3\cdot0^2-2\cdot0+3-4=3\cdot0^2-0-1 \quad -1=-1$;

Ejercicio 2.

$3x+2=8 \rightarrow x=2 \quad (3\cdot2+2=8)$

$x^2-1=0 \rightarrow x=+1$ y $x=-1 \quad (1)^2-1=0 \quad (-1)^2-1=0$

$x+y=2 \rightarrow$ infinitas soluciones $y=2-x$, por ejemplo $x=1$, $y=1$; $x=2$, $y=0$…

Ejercicio 3.

a) $\frac{x-3}{2}+7=x-\frac{5-x}{3} \rightarrow$ solución $x=43/5$

b) $\frac{-3(5-x)}{10}-\frac{3x}{2}=7-\frac{5x}{3} \rightarrow$ solución $x=\frac{255}{14}$

c) $\frac{2\cdot(5-3x)}{3}-\frac{2x-1}{2}=1-\frac{x}{4} \rightarrow$ solución $x=\frac{34}{33}$

Ejercicio 4.

a) $x^2-6\sqrt{2}x+18=0 \rightarrow x=\frac{6\sqrt{2}\pm\sqrt{72-72}}{2}=3\sqrt{2}$

b) $2x^2-7x+3=0 \rightarrow \quad x=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{2}=\left\langle \begin{matrix} 6 \\ 1 \end{matrix} \right.$

c) $\frac{x+7}{x+3}+\frac{x^2-3x+6}{x^2+2x-3}=1 \quad \rightarrow \quad (x+7)\cdot(x^2+2x-3)+(x^2-3x+6)=(x+3)\cdot(x^2+2x-3) \rightarrow$

$$5x^2+5x-6=0 \rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{25+120}}{10}=\frac{-5\pm\sqrt{145}}{10}=\left\langle \begin{matrix} -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{145}}{10} \\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{145}}{10} \end{matrix} \right.$$

d) $\frac{x+1}{x+5}+\frac{1-x}{x-4}=\frac{5}{2} \rightarrow 2(x+1)(x-4)+2(1-x)(x+5)=5(x+5)(x-4) \rightarrow 5x^2+19x-102=0$

$$x=\frac{-19\pm\sqrt{361+2040}}{10}=\frac{-19\pm49}{10}=\left\langle \begin{matrix} 3 \\ \frac{-34}{5} \end{matrix} \right.$$

e) $(x-\sqrt{3})^2-1+x=x \rightarrow x^2-2\sqrt{3}x+3-1=0 \rightarrow x=\dfrac{2\sqrt{3}\pm\sqrt{12-8}}{2}=\left\langle\begin{array}{l}\sqrt{3}+1\\ \sqrt{3}-1\end{array}\right.$

f) $1+(x-2)^2=1 \rightarrow (x-2)^2=0 \rightarrow x=2$

g) $9x^2-25=0 \rightarrow x^2=25/9 \rightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{25}{9}}=\pm\dfrac{5}{3}$

h) $x^2-2x=0 \rightarrow x(x-2)=0 \rightarrow x=0,\ x=2$

Ejercicio 5.

a) $x^4-x^2-6=0$ $\rightarrow$ solución : x= $\pm\sqrt{3}$
b) $x^4-3x^2+2=0$ $\rightarrow$ solución x=$\pm\sqrt{2}$,± 1
c) $-x^4-4x^2-45=0$ $\rightarrow$ No soluciones reales
d) $x^4-2x^2=0$ $\rightarrow$ x=0 doble y x=$\pm\sqrt{2}$

Ejercicio 6. Resolver:

a) $(x+\pi)\cdot(x-1/2)\cdot(3x-7)=0$ $\rightarrow$ soluciones $x=-\pi$, $x=1/2$, $x=7/3$

b) $x^2\cdot(x-\sqrt{2})\cdot(5x+1)=0$ $\rightarrow$ soluciones x=0 (doble), $x=\sqrt{2}$, $x=-1/5$

c) $4x^5+20x^4-53x^3+23x^2+13x-7=0$ $\rightarrow$soluciones x=1 (doble), x=-7, x=1/2, x=-1/2
d) $x^5-6\cdot x^4+10\cdot x^3-10\cdot x^2+9\cdot x-4=0$ $\rightarrow$ soluciones x=1 doble, x=4
e) $x^3+3x^2-4x=5x^2-x$ $\rightarrow$ soluciones x=0, x=-1, x=3

Ejercicio 7.

a) $4x+2\sqrt{x+4}=4 \rightarrow 2\sqrt{x+4}=4-4x \rightarrow \left(2\sqrt{x+4}\right)^2=(4-4x)^2 \rightarrow$

$4(x+4)=16x^2-32x+16 \rightarrow 16x^2-36x=0 \rightarrow 4x(4x-9)=0\ x=\begin{cases}0\\ 9/4\end{cases}$

Comprobación:

x=0 $\rightarrow$ $0+2\cdot\sqrt{0+4}=4$ Solución

x=9/4 $\rightarrow$ $4\cdot\dfrac{9}{4}+2\sqrt{\dfrac{9}{4}+4}=9+2\cdot\dfrac{5}{2}\neq 4$ No solución

b) $x^2+\sqrt{4x^2-3}=0 \rightarrow x^2=-\sqrt{4x^2-3}\xrightarrow{elev} x^4=4x^2-3 \rightarrow x^4-4x^2+3=0$

$x^2=t,\ x^4=t^2 \rightarrow t^2-4t+3=0 \rightarrow t=\begin{cases}3\\ 1\end{cases}\quad x=\begin{cases}\pm\sqrt{3}\\ \pm 1\end{cases}$

Comprobación:

x=1 $\rightarrow$ $1^2+\sqrt{4\cdot 1^2-3}=2\neq 0$ No solución

x=-1 $\rightarrow$ $(-1)^2+\sqrt{4\cdot(-1)^2-3}=2\neq 0$ No solución

x=$\sqrt{3}$ $\rightarrow$ $\left(\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{4\left(\sqrt{3}\right)^2-3}=6\neq 0$ No solución x=$-\sqrt{3}$ → $\left(-\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{4\cdot\left(-\sqrt{3}\right)^2-3}=6\neq 0$ No solución

c) $x-\sqrt{x}=2$ → $x-2=\sqrt{x}\xrightarrow{elv}(x-2)^2=x\rightarrow x^2-5x+4=0\rightarrow x=\begin{cases}4\\1\end{cases}$

Comprobación:

x=1 → $1-\sqrt{1}=0\neq 2$ No solución

x=4 → $4-\sqrt{4}=2$ Solución

d) $x-\sqrt{x-1}=-x+3$ → $-\sqrt{x-1}=3-2x\xrightarrow{elvamos}(-\sqrt{x-1})^2=(3-2x)^2$ →

$x-1=9+4x^2-12x\rightarrow 4x^2-13x+10=0\rightarrow x=\begin{cases}2\\5/4\end{cases}$

Comprobación:

x=2 → $2-\sqrt{2-1}=-2+3\rightarrow 1=1$ solución

x=5/4 → $\frac{5}{4}-\sqrt{\frac{5}{4}-1}=-\frac{5}{4}+3\rightarrow\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\neq-\frac{5}{4}+3$ No solución

Ejercicio 8.

a) $\frac{2}{x}-\frac{2-x}{x+3}=1$ → Solución x=2

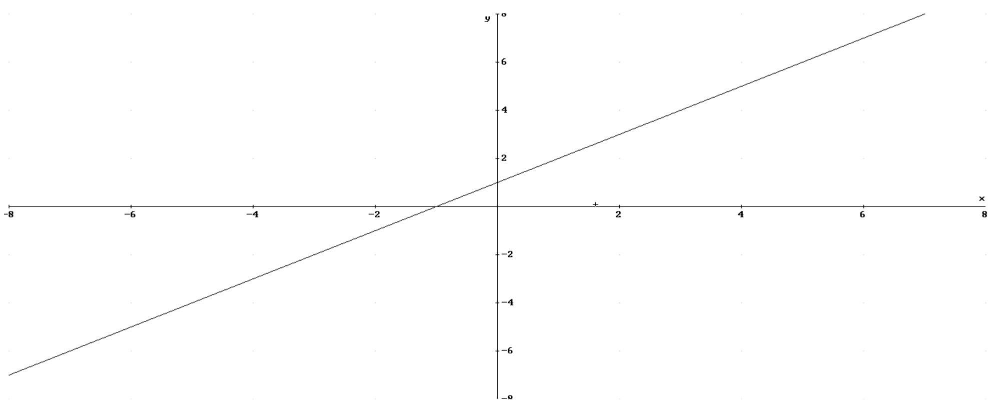
b) $\frac{x}{x+1}+\frac{2}{x+2}=3$ → No tiene soluciones.

c) $\frac{x+3}{x-1}-\frac{2}{x-3}=x-4$ → x=5, x=2$\pm\sqrt{3}$

Ejercicio 9.

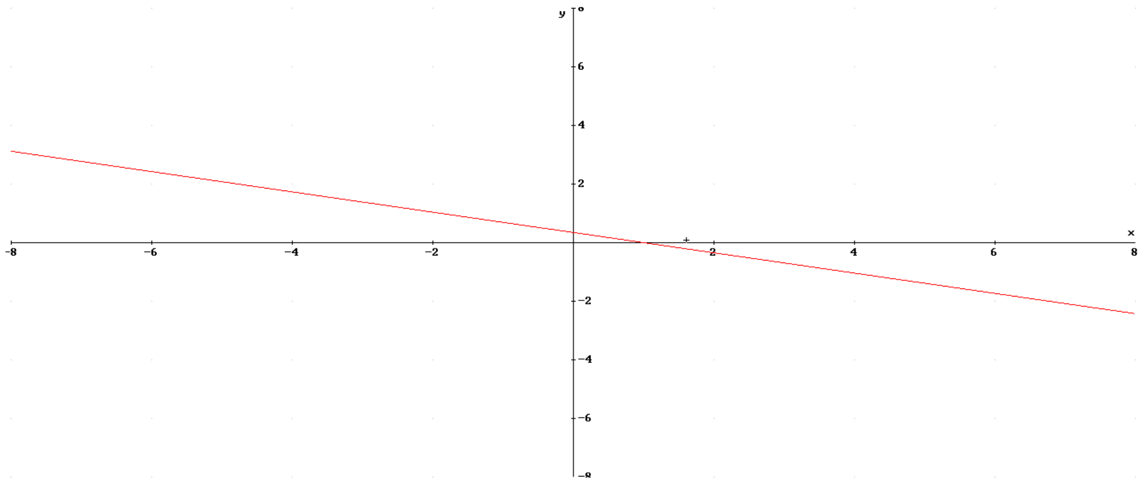
a) –x+y=1 → y=1+x

x	y
1	2
0	1
-1	0



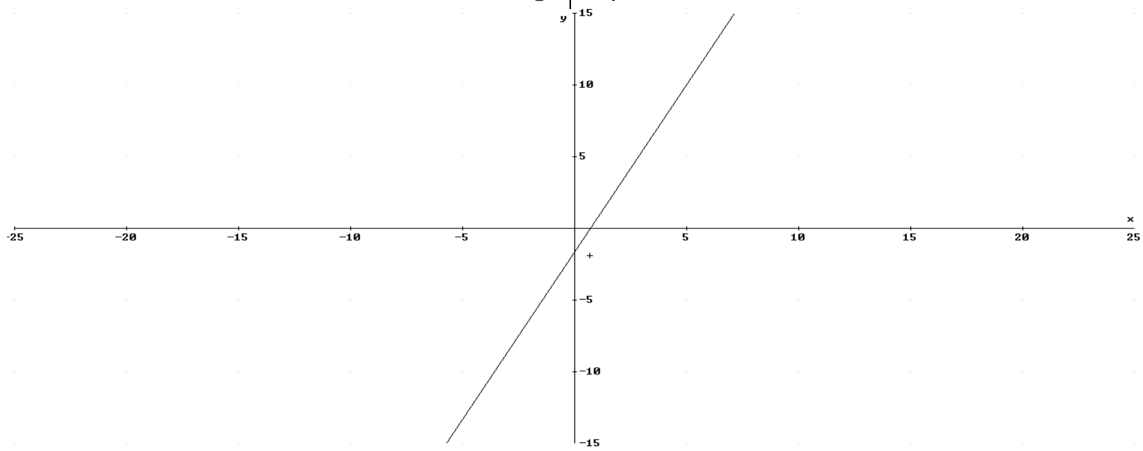
b) √3x+5y=√3 → $y=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{3}x}{5}$

X	y
1	0
2	$-\sqrt{3}/5 \approx$ -0,35



c) -7x+3y=-5 → $y=\dfrac{-5+7x}{3}$

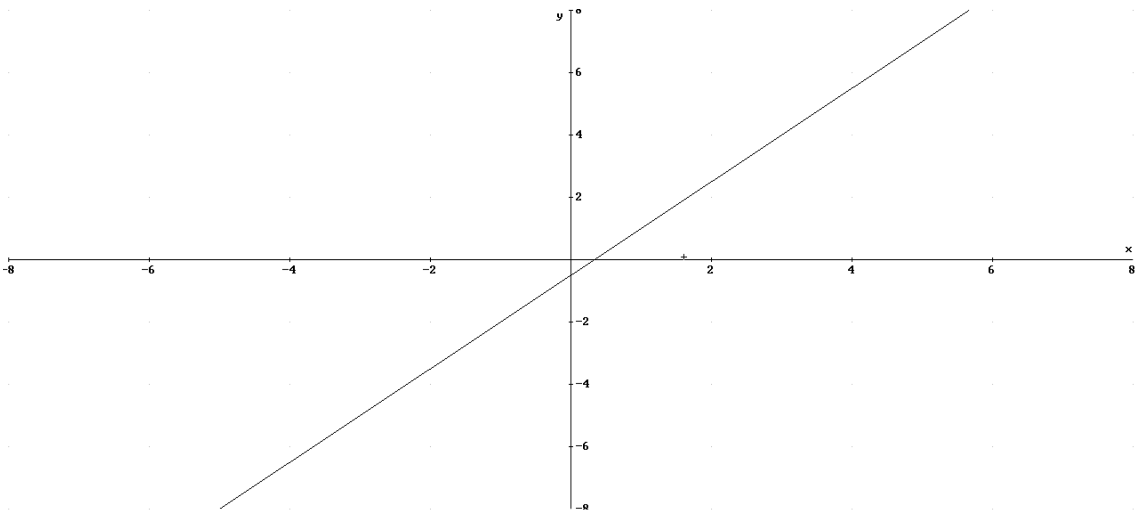
x	y
2	3
-1	-4



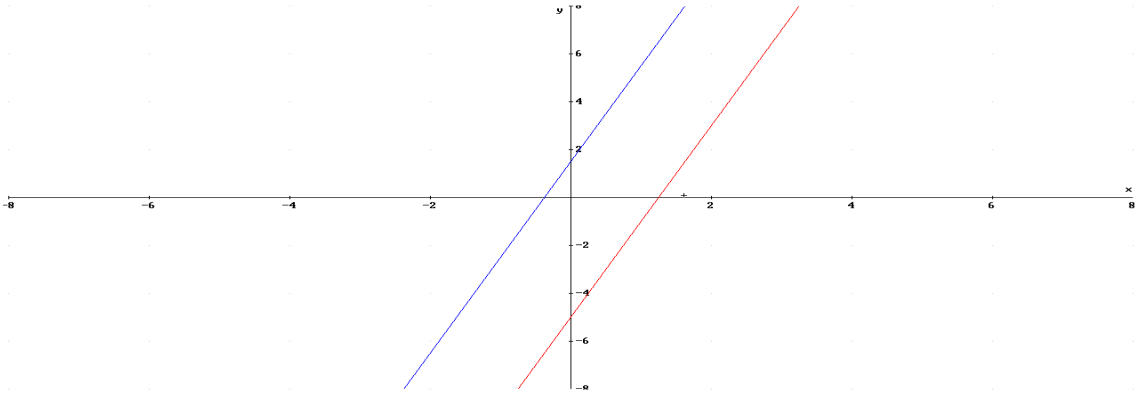
Ejercicio 10.

a) $\left.\begin{array}{l}(1)\,3x-2y=1\\(2)\,6x-4y=2\end{array}\right\}$

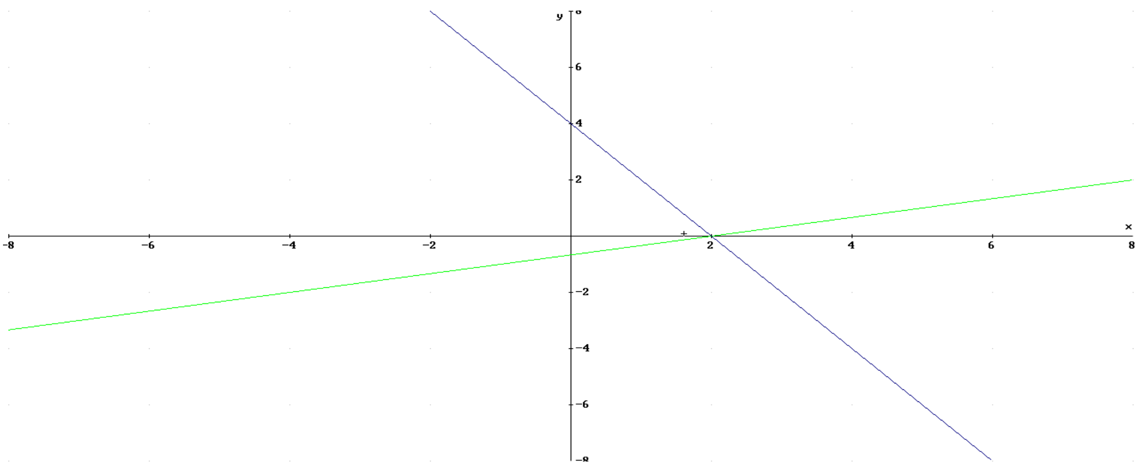
$\dfrac{3}{6}=\dfrac{-2}{-4}=\dfrac{1}{2}$ Compatible indeterminado→ $x=\dfrac{1+2y}{3}$



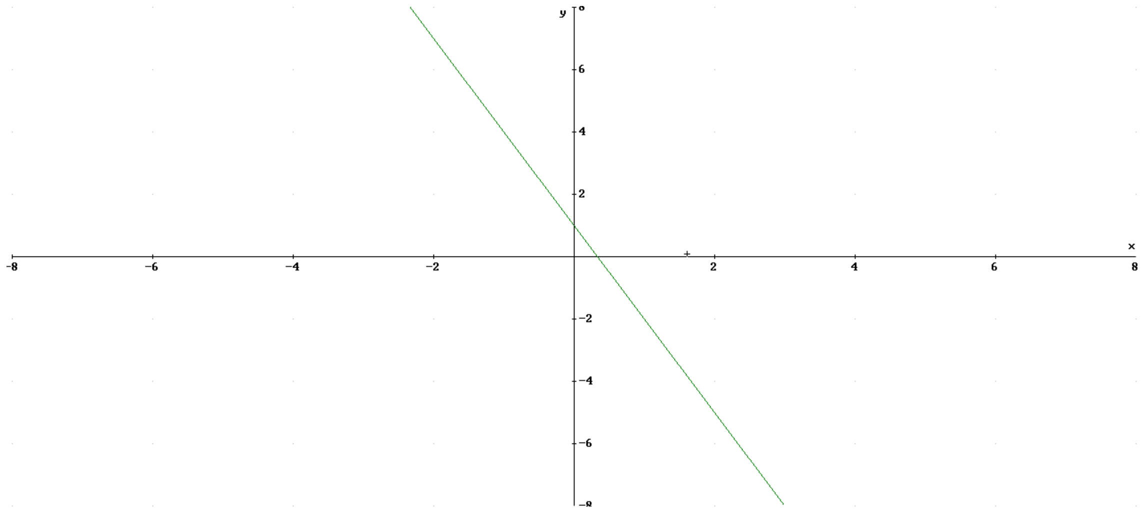
b) $\left.\begin{array}{l}(1)\ \ 4x-y=5\\ (2)-8x+2y=3\end{array}\right\}\ \frac{4}{-8}=\frac{-1}{2}\neq\frac{5}{3}$. Incompatible, no solución



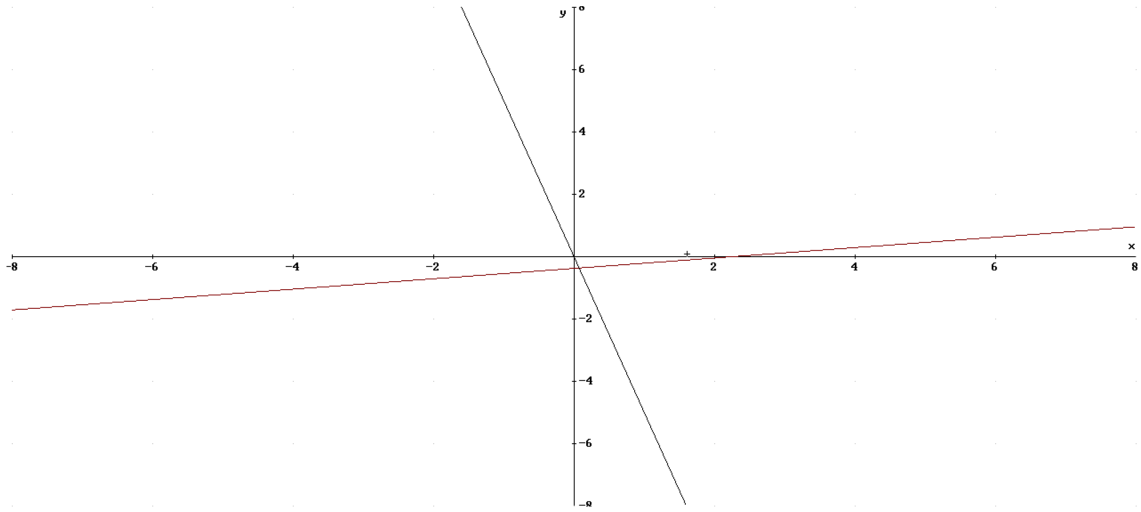
c) $\left.\begin{array}{l}(1)\ \ \ x-3y=2\\ (2)\ 2x+y=4\end{array}\right\}\ \frac{1}{2}\neq\frac{-3}{1}$. Compatible determinado, una solución. **x=2, y=0**



d) $\left.\begin{array}{r}(1) -18x+6=6y \\ (2) y+3x+5=6\end{array}\right\} \frac{-18}{3}=\frac{-6}{1}=\frac{-6}{1}$ → Compatible indeterminado. Infinitas soluciones.



e) $\left.\begin{array}{l}(1)\ \frac{x}{3}-2y=\frac{3}{4} \\ (2)\ 5x+y=0\end{array}\right\} = \left.\begin{array}{l}(1)\ 4x-24y=9 \\ (2)\ 5x+y=0\end{array}\right\} \frac{4}{5}\neq\frac{-24}{1}$ → compatible determinado, una solución → Solución x=9/124, y=-45/124



Problema 1.

x=nº de gallinas
y=nº de conejos

$\left.\begin{array}{r}x+y=50 \\ 2x+4y=134\end{array}\right\}$ → x=50-y; 2(50-y)+4y=134; 2y=32; y=16, x=34

Problema 2.

x=nº conejos
y=nº jaulas

$\left.\begin{array}{r}6y-4=x \\ 5y+2=x\end{array}\right\}$ → 6y-4=5y+2; y=6, x=32

Problema 3.

x=nº moscas
y=nº arañas

$$\left.\begin{array}{r} x+y=42 \\ 6x+8y=276 \end{array}\right\} \rightarrow$$ x=42-y; 6(42-y)+8y=276; 2y=24; y=12; x=30

Problema 4.

x=nº botellas de 2 litros
y=nº botellas de 5 litros

$$\left.\begin{array}{r} x+y=120 \\ 2x+5y=300 \end{array}\right\} \rightarrow$$ x=120-y; 2·(120-y)+5y=300; 3y=60; y=20, x=100

Problema 5.

x= litros de vino de 0,6€

y= litros de vino de 0,35€

$$\left.\begin{array}{r} x+y=200 \\ 0{,}6x+0{,}35y=200\cdot 0{,}5 \end{array}\right\} \rightarrow$$ x=200-y; 0.6(200-y)+0.35y=100;-0.25y=-20, y=80 l, x=120 l

Problema 6.

x=respuestas correctas
y=respuestas equivocadas

$$\left.\begin{array}{r} x+y=30 \\ 5x-2y=94 \end{array}\right\} \rightarrow$$ x=30-y; 5(30-y)-2y=94; -7y=-56, y=8, x=22

Problema 7.

x=chicos
y=chicas

$$\left.\begin{array}{r} x+y=35 \\ x+2y=55 \end{array}\right\} \rightarrow$$ x=35-y; 35-y+2y=55; y=20; x=15

Problema 8.

x=precio kg de café
y=precio kg de azúcar

$$\left.\begin{array}{r} 6x+3y=15{,}3 \\ x+10y=8{,}25 \end{array}\right\} \rightarrow$$ x=8,25-10y; 6·(8,25-10y)+3y=15,3; -57y=34,2, y=0,6€, x=2,25€

Problema 9

x=nº paquetes de leche entera
y= nº paquetes de leche semidesnatada

$$\left.\begin{array}{r} x+y=9 \\ 1.15x+0{,}9y=9{,}6 \end{array}\right\} \rightarrow$$ x=9-y; 1.15(9-y)+0.9y=9.6 ; -0.25y=-0,75 y=3,x=6

Problema 10.

x=precio kg de naranja
y=precio kg de patata

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ 2x+5y=5.4\\(2)\ 4x+2y=6\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{ll}-2\cdot(1) & -4x-10y=-10.8\\ (2) & 4x+2y=6\end{array}\right\}$$
$$/ \quad -8y=-4.8 \qquad y=0.6€/kg \quad x=1{,}2€/kg$$

Problema 11.

x=precio kg de café primera calidad
y= precio kg de café segunda calidad

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ 2x+3y=5\cdot 0.75\\(2)\ 3x+2y=5\cdot 0.8\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{ll}-3\cdot(1) & -6x-9y=-11.25\\ 2\cdot(2) & 6x+4y=8\end{array}\right\}$$
$$/ \quad -5y=-3.25 \qquad y=0.65€/kg \quad x=0.9€/kg$$

Problema 12.

x=nº adultos
y=nº de niños

$$\left.\begin{array}{l}x+y=600\\4x+1.5y=1962{,}5\end{array}\right\}\rightarrow$$ x=600-y; 4·(600-y)+1.5y=1962,5; -2.5y=-437,5 y=175; x=425

Problema 13.

x=libros de 8€
y=libros de 12€

$$\left.\begin{array}{l}x+y=20\\8x+12y=192\end{array}\right\}\rightarrow$$ x=20-y; 8·(20-y)+12y=192; 4y=32; y=8; x=12

Problema 14.

x=nº tartas primer tipo
y=nº tartas del segundo tipo

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ 2.4x+2y=67\\(2)\ 3x+4y=80\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{ll}-2\cdot(1) & -4.8x-4y=-134\\ (2) & 3x+4y=80\end{array}\right\}$$
$$-1{,}8x+/ \ =-54 \qquad x=30,\ \ y=37$$

Problema 15.

x= precio equipo de música
y= precio del ordenador

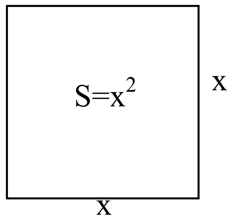
$$\left.\begin{array}{l}x+y=2500\\0.9x+0.85y=2157{,}5\end{array}\right\}\rightarrow$$ Resolviendo el sistema x=650€, y=1850€

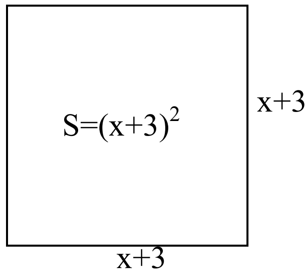
Problema 16.

x= preguntas acertadas
(20-x)= preguntas erróneas

$$\left.\begin{array}{r}2x-0{,}5\cdot(20-x)\geq 20\\x\leq 20\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x\geq 12\\x\leq 20\end{array}\right\}\rightarrow x\in\{12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

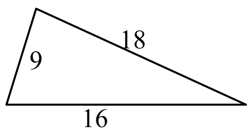
Problema 17.

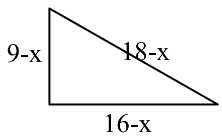




$x^2+75=(x+3)^2 \rightarrow x^2+75=x^2+6x+9 \rightarrow 6x=66 \rightarrow$ **x=11m**

Problema 18.

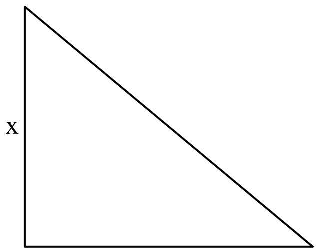




Teorema de Pitágoras para el triángulo rectángulos $\rightarrow (18-x)^2=(16-x)^2+(9-x)^2 \rightarrow$

$x^2-14x+13=0 \rightarrow x=\begin{cases} 13 \;\; no \;\; solución \;\; 9-13<0 \\ 1 \;\;\; lados = 8cm, 17cm, 15cm \end{cases}$

Problema 19.



hip$=\sqrt{x^2+x^2}=\sqrt{2}x$

perímetro$=2x+\sqrt{2}x=24$ cm

$\rightarrow x=$

x

$$\frac{24}{2+\sqrt{2}}=\frac{24(2-\sqrt{2})}{2}=(24-12\sqrt{2})cm$$

Problema 20.

t=tiempo llenar un cubo 1er grifo.
2t= tiempo llenar un cubo 2º grifo.
Capacidad cubo=c
Velocidad 1ergrifo=c/t
Velocidad 2ºgrifo=c/2t
Velocidad dos grifos= c/t+c/2t=3c/2t

Capacidad del cubo $c=v_{dos\ grifos}\cdot 3\min \rightarrow c=\frac{3c}{2t}\cdot 3 \rightarrow 1=\frac{9}{2t} \rightarrow t=9/2=4{,}5\min$

Tiempo llenar un cubo 1er grifo$\rightarrow$4,5min
Tiempo llenar un cubo 2º grifo$\rightarrow$9min

Problema 21.

Coche de A→B v=60km/h → $t_{A\to B}=d/v=d/60$

Coche de B→A v=40km/h → $t_{B\to A}=d/v=d/40$

$t_{total}=(d/60+d/40)$ → $v_{media}=\dfrac{2d}{\dfrac{d}{60}+\dfrac{d}{40}}=\dfrac{2}{\dfrac{100}{240}}=48km/h$