Tema 5. Factorización de Polinomios y fracciones algebraicas.

1. Polinomio múltiplo y divisor. Factor de un polinomio. Ruffini

Uno de los conceptos básicos de este tema es el de polinomio múltiplo y el de polinomio divisor. El concepto es equivalente a la multiplicidad de los números naturales. Veamos la definición.

Definición: el polinomio P(x) es ***múltiplo*** de otro polinomio Q(x), y por tanto Q(x) ***divisor*** de P(x) si la división P(x):Q(x) es exacta de forma que P(x) se puede poner como producto de Q(x) por otro polinomio (llamémosle C(x)) del que también será múltiplo.

P(x) múltiplo de Q(x) ←→ P(x)=Q(x)·C(x).

La forma de ver si un polinomio es múltiplo de otro es dividiendo y comprobando que la división es exacta.

Ejercicio 1. Decir de los siguientes polinomios cuales son divisores de $P(x)=x^4-2x^2-x+2$

a) (x-1)
b) (x^2-1)
c) (x^2+x+1)
d) (x^2-2x)

Dentro de los divisores de los polinomios los más importantes son los de primer grado, que denominaremos factores. Veamos la definición de estos.

Definición: Un ***factor*** de un polinomio P(x) es todo polinomio de primer grado de la forma ***(x-a)*** que sea divisor de P(x), de tal manera que P(x)=(x-a)·C(x).

Para comprobar si un factor es polinomio veremos una forma más sencilla más adelante, pero por ahora lo que haremos es la división y comprobar que esta es exacta. Para hacer la división de un polinomio por un factor podemos utilizar el método de Ruffini mucho más rápido que hacer la división clásica de polinomios.

Regla de Ruffini: es una regla que nos permite calcular la división de un polinomio P(x) entre un factor de la forma (x-a). Para hacer la división por este método colocamos los coeficientes del polinomio P(x) de mayor a menor grado, si falta un grado pondremos un cero. En la caja ponemos el valor de a del factor y realizamos los siguientes pasos:

1. Bajamos el coeficiente de mayor grado del polinomio
2. Debajo del siguiente coeficiente pondremos el resultado obtenido del coeficiente de mayor grado multiplicado por a.
3. Sumamos al coeficiente del polinomio P(x) el valor obtenido en 2 y repetimos el procedimiento hasta llegar al coeficiente de menor grado.
4. Los números obtenidos serán los coeficientes del polinomio cociente de un gado menor que P(x) y el último el resto de la división.

Ejemplos:

$(x^3-2x^2-3):(x+2)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & 0 & -3 \\ -2 & & -2 & 8 & -16 \\ \hline & 1 & -4 & 8 & \underline{|-19} \end{array}$$

→ $C(x)=x^2-4x+8$ r=-19

$(x^3-2x^2-3):(x-1/2)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -2 & 0 & -3 \\ -\frac{1}{2} & & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} & -\frac{5}{8} \\ \hline & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{4} & \underline{\left| -\frac{29}{8} \right.} \end{array} \quad \rightarrow C(x)=x^2-\frac{5}{2}x+\frac{5}{4} \quad r=-\frac{29}{8}$$

Ejercicio 2. Dividir el polinomio $P(x)=x^4+3x^3-x^2-3x$ entre los factores (x-1), (x+1), (x-2), (x+3) y x. Decir cuáles de ellos son factores y expresar P(x) como producto de estos factores.

2. Valor numérico de un polinomio. Raíz del polinomio.

Igual de importante que saber lo que es un factor es saber lo que es una raíz de un polinomio, conceptos que como veremos están íntimamente relacionados. Para ver lo que es una raíz primero tenemos que definir valor numérico de un polinomio.

Valor numérico de P(x) en $x=a\in\mathbb{R}$ es el resultado de sustituir en el polinomio por el valor a, operar y obtener el resultado.

Ejemplos: calcular el valor numérico del polinomio $P(x)=3x^4-2x^3+3x^2-x+2$ en x=1, x=-1 y x=0

$P(1)=3\cdot1^4-2\cdot1^3+3\cdot1^2-1+2=5$

$P(1)=3\cdot(-1)^4-2\cdot(-1)^3+3\cdot(-1)^2-(-1)+2=11$

$P(0)=3\cdot0^4-2\cdot0^3+3\cdot0^2-0+2=2$

Ejercicio 3. Calcular el valor numérico del polinomio $P(x)=x^3-3x^2+4x-2$ en x=1, x=3 y x=0

Raíz de un polinomio: Las raíces de un polinomio son todos los número reales $x=a\in\mathbb{R}$ cuyo valor numérico es cero.

Ejemplos: en $P(x)=x^4+3x^5-x^2-3x$ son raíces x=1, x=-1, x=2 y x=0, pues P(1)=P(-1)=P(2)=P(0)=0

Ejercicio 4. Por tanteo y razonando la relación de las raíces con las soluciones de las ecuaciones de segundo grado calcular las raíces de

a) $P(x)=x^4-1$
b) $P(x)=x^2-6x+8$

3. Teoremas de factorización. Polinomios irreducibles. Factorizacón de un polinomio

3.1. Teoremas de factorización.

Un polinomio P(x) será múltiplo del polinomio de primer grado de la forma (x-a), con $a\in Z$ si se cumple que la división P(x):(x-a) es exacta, es decir el resto es cero.

Existen diversos teoremas que nos facilitan saber si (x-a) es divisor de P(x) sin necesidad de realizar la división. Veámoslos

Teorema 1*:** Sea $P(x)=a_nx^n+\ldots a_2x^2+a_1x+a_0$ con coeficientes enteros ($a_n,\ldots,a_1,a_0\in Z$) para que ***(x-a) con $a\in Z$ sea ***divisor de P(x)*** es necesario que el ***término independiente, a_0, sea múltiplo de a***. Esta condición es necesaria pero no suficiente, es decir a puede ser divisor de a_0 y en cambio (x-a) no ser divisor.

Ejemplo: Sea el polinomio $P(x)=x^3-x^2-4x+4$ los posibles divisores de la forma (x-a) con a nº entero son los siguientes (compruébalo dividiendo):

- a=1 → (x-1), si dividimos la división es exacta → (x-1) divisor de P(x)
- a=2 → (x-2), si dividimos la división es exacta → (x-2) divisor de P(x)
- a=4 → (x-4), si dividimos la división no es exacta, resto=36
- a=-1 → (x+1), si dividimos la división no es exacta, resto=6
- a=-2 → (x+2), si dividimos la división es exacta → (x+2) divisor de P(x)
- a=-4 → (x+4), si dividimos la división no es exacta , resto=-60

Teorema del resto: el resto de dividir P(x) entre (x-a) es igual al valor numérico de P(a) → ***resto=P(a).***

Ejemplo: comprobémoslo en el polinomio anterior $P(x)=x^3-x^2-4x+4$ y los factores anteriores:

- a=1 → (x-1), resto=P(1)=0
- a=2 → (x-2), resto=P(2)=0
- a=4 → (x-4), resto=P(4)=36
- a=-1 → (x+1), resto=P(-1)=6
- a=-2 → (x+2), resto=P(-2)=0
- a=-4 → (x+4), resto=P(-4)=-60

A partir del teorema del resto podemos saber si un polinomio es múltiplo de P(x) de (x-a) sin necesidad de dividir, simplemente calculando P(a):

a) Si P(a)=0 entonces (x-a) divisor de P(x) pues el resto es 0

b) Si $P(a)\neq 0$ entonces (x-a) no es divisor de P(x) pues el resto no es cero.

Relación entre las raíces de un polinomio, las soluciones ecuación y divisibilidad por (x-a): Recordemos todos los teoremas y definiciones vistas anteriormente para relacionarlas entre si, sea $P(x)= a_nx^n+\ldots a_2x^2+a_1x+a_0$

a es raíz si $P(a)=0 \leftrightarrow$ a solución a la ecuación $a_nx^n+\ldots a_2x^2+a_1x+a_0 \leftrightarrow$ (x-a) divisor de P(x) pues el resto de la división r=P(a)=0.

Luego todas las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a es raíz del polinomio P(x)
- a solución de la ecuación $a_nx^n+\ldots a_2x^2+a_1x+a_0=0$
- (x-a) divisor de P(x)

Teorema fundamental del álgebra: sea un polinomio de P(x) de grado n, el número máximo de raíces es n, y por tanto el número máximo de polinomios de la forma (x-a) divisores y de soluciones a la ecuación $a_nx^n+\ldots a_2x^2+a_1x+a_0=0$

Ejercicio 5: Sean el polinomio $P(x)=x^3+2x^2-x-2$ $Q(x)= x^3-5x^2-9x+45$ calcular

a) Los posibles polinomios (x-a) con $a\in Z$ divisores de P(x)

b) El número máximo de ellos que puede ser divisores de P(x)

c) Cuales son los divisores

d) Calcular las soluciones de la ecuación de $x^3+2x^2-x-2=0$

Soluciones cuando a no es un número entero: hasta ahora sólo hemos considerado las raíces enteras, habiendo visto que estas deben de ser divisores del término independiente. Pero estás no son las únicas que pueden ser raíces, veamos algún ejemplo:

Ejemplos:

a) $P(x)=6x^2+x-1 \rightarrow$ Las únicas raíces enteras pueden ser a=1 y a=-1, pero estas no son raíces P(1)=6 y P(-1)=4, entonces (x-1) y (x+1) no son divisores de P(x) . ¿entonces no tiene raíces ni divisores?. Veamos como si. Las raíces de P(x) serán también soluciones de $6x^2+x-1=0$, que como bien sabemos podemos calcular a partir de las soluciones de ecuaciones de segundo grado.

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{12}=\frac{-1\pm 5}{12}=\left\langle \begin{array}{l} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Luego (x+1/2) y (x-1/3) son divisores de P(x) pues P(-1/2)=0 y P(1/3)=0.

b) $P(x)=x^2-3x-3 \rightarrow$ Las únicas raíces enteras pueden ser a=1 y a=-1, a=3 y a=-3 pero estas no son raíces $P(1)\neq 0$, $P(-1)\neq 0$, $P(3)\neq 0$ y $P(-3)\neq 0$, entonces (x-1), (x-3), (x+1) y (x-3) no son divisores de P(x) . ¿entonces no tiene raíces ni divisores?. Veamos como si. Las raíces de P(x) serán también soluciones de $x^2-3x-3=0$, que como bien sabemos podemos calcular a partir de las soluciones de ecuaciones de segundo grado.

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9+12}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}=\begin{cases}\frac{3+\sqrt{21}}{2}\\ \frac{3-\sqrt{21}}{2}\end{cases}$$

Luego (x-$\frac{3+\sqrt{21}}{2}$) y (x- $\frac{3-\sqrt{21}}{2}$) son divisores de P(x) pues P($\frac{3+\sqrt{21}}{2}$)=0 y P($\frac{3-\sqrt{21}}{2}$)=0.

3.2. Propiedades de la divisibilidad

3.2.1. Polinomios irreducibles

Definición: un ***polinomio*** se dice ***irreducible*** cuando no tiene ningún otro polinomio divisor de grado inferior (siempre es posible encontrar uno del mismo grado)

Teorema: los únicos polinomios irreducibles son los de ***1^er^ grado y los de 2º grado con soluciones no reales***.

Ejemplos: P(x)=x-3, Q(x)=x+5, H(x)=3x+3, I(x)=x^2-3x+3, J(x)=x^2+1

Nota: darse cuenta que 3x+3 es divisible por x+1, pero este polinomio es del mismo grado.

Ejercicio 6. Decir de los siguientes polinomios cuales son irreducibles: x^2-3x+1, x^3+x, x^2+x+6, 7x-3/2

Proposición: desde el punto de vista de la divisibilidad todos dos polinomios son equivalentes si son proporcionales→ P(x) equivalente a Q(x) si P(x)=K·Q(x)

Ejemplos: $x^3+3x+2\equiv 3x^3+9x+6\equiv \frac{1}{3}x^3+x+\frac{2}{3}$

Nota: de todos los polinomios equivalentes se toma el que tiene el coeficiente de mayor grado igual a la unidad.

Ejemplos: 5x^3+3x^2+15x → x^3+3/5x^2+3x ; 2x^2-4x+2 → x^2-2x+1

3.2.2. Número de raíces y divisores de primer grado de un polinomio.

Teorema: un polinomio P(x) tiene a lo sumo n raíces (y por tanto n divisores de primer grado) siendo n el grado del polinomio.

Demostración: supongamos que P(x)=x^n+…+a_1x+a_0 tiene n+1 raíces a^1, a^2,…,a^{n+1}, entonces P(x) se puede poner como P(x)=(x-a^1)·…·(x-a^{n+1}) y sería entonces de grado n+1 y no degrado n.

Definición: una ***raíz*** a de un polinomio P(x) tiene ***multiplicidad 2 (doble)*** si P(x) es divisible por (x-a)^2, multiplicidad 3 si es divisible por (x-a)^3, etc.

Ejemplos:

P(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2, luego a=-1 es raíz doble

Q(x)=x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3, luego a=1 es raíz triple.

Nota: a la hora de contar el número de raíces las raíces dobles cuentan como 2, raíces triples como 3, etc. De esta forma un polinomio de grado 3 no podrá tener 2 raíces dobles (pues sería como 4 raíces)

3.3. Descomposición factorial de un polinomio

Definición: la descomposición factorial de un polinomio consiste en expresarlo como producto de polinomios irreducibles (de 1er grado y de 2º sin soluciones).

Diferentes métodos de sacar factores

a) Sacar factor común: cuando el término independiente es nulo, pudiendo sacar factor común x^m siendo m el grado del monomio de menor grado. De esta forma a=0 es raíz de multiplicidad m.

Ejemplo: $P(x)=x^5-5x^4-9x^3+45x^2=x^2(x^3-5x^2-9x+45)$ a=0 es raíz doble.

b) Buscar divisores de la forma (x-a) por Ruffini: por Ruffini sólo buscaremos divisores donde la raíz, a, es entera. Recordar que entonces a debe de ser divisor del término independiente.

Ejemplo: $Q(x)=x^3-5x^2-9x+45$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -5 & -9 & 45 \\ 3 & & 3 & -6 & -45 \\ \hline & 1 & -2 & -15 & \underline{0} \\ -3 & & -3 & 15 & \\ \hline & 1 & -5 & \underline{0} & \end{array}$$

$$P(x)=(x+3)(x^2-2x-15)$$

$$(x^2-2x-15)=(x+3)(x-5)$$

→ $Q(x)=(x-3)(x+3)(x-5)$

Luego el polinomio P(x) del ejemplo anterior es $P(x)=x^2\cdot(x-3)(x+3)(x-5)$

c) A partir soluciones de ecuación de 2º grado: cuando las raíces no son enteras no es fácil encontrarlas a partir de Ruffini. Si tenemos una ecuación de 2º grado podemos obtener las raíces a partir de sus soluciones.

Ejemplo: $P(x)=x^3-5x^2+5x-1$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -5 & 5 & -1 \\ 1 & & 1 & -4 & 1 \\ \hline & 1 & -4 & 1 & \underline{0} \end{array}$$

$$P(x)=(x-1)(x^2-4x+1)$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-4}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}=\left\langle\begin{array}{l}2+\sqrt{3}\\2-\sqrt{3}\end{array}\right.$$

$(x^2-4x+1)=(x-(2+\sqrt{3}))\cdot(x-(2-\sqrt{3}))$

$P(x)=(x-1)\cdot(x-(2+\sqrt{3}))\cdot(x-(2-\sqrt{3}))$

Ejercicio 7. Factorizar:

a) $P(x)=x^3+4x^2+x+4$
b) $Q(x)=2x^3+x^2-8x-4$
c) $H(x)=3x^2+10x+3$
d) $I(x)=2x^3+4x^2-2x-4$
e) $J(x)=x^3+x$

f) $K(x)=x^3+x^2+x-3$
g) $L(x)=x^4+2x^3+x^2$
h) $M(x)=x^4-3x^3-2x^2+2x$

Ejercicio 8. A partir de los teoremas visto hasta ahora decir si están bien o mal factorizadas los siguientes polinomios. Decir por que.

a) $P(x)=x^3-3x^2+2x+3=(x+5)\cdot(x+1)\cdot(x-2)$

b) $Q(x)=x^3-2x^2+1=(x-1)^2(x+1)^2$

c) $H(x)=x^3-5x^2-6x+5=(x-5)\cdot(x+1)\cdot(x-1)$.

d) $I(x)=x^3+5x^2+6x+10=(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+5)$

e) $S(x)=2x^2+4x+2=(x+1)^2$.

Ejercicio 9. Decir el polinomio que cumple las siguientes propiedades

a) El polinomio P(x) cumple:
(i) Solo tiene dos raices:
· El -1 es una raiz simple (multiplicidad 1)
· El 2 es una raiz doble (multiplicidad 2)
(ii) Es de grado 3
(iii) El coeficiente de mayor grado es 2

b) El polinomio Q(x) cumple.
(i) Solo tiene dos raices:
· El 3 es una raiz simple (multiplicidad 1)
· El -2 es una raiz simple (multiplicidad 1)
(ii) Es divisible por x^2+1
(iii)El coeficiente de mayor grado es 1
(iv) De todos los posibles es el de menor grado

Ejercicio 10. Decir el valor de a para que $x^3+3x^2+3ax+1$ sea divisible por $(x+1)$

4. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

4.1. Máximo común divisor

***Definición*:** el máximo común divisor de 2 o más polinomios es otro polinomio que cumple:

a) es divisor de todos ellos

b) de todos ellos es el de mayor grado con coeficiente de mayor grado la unidad.

Veamos como calcular el máximo común divisor:

1) descomponer factorialmente cada polinomio en polinomios irreducible

2) el máximo común divisor es el polinomio cuya descomposición factorial esta formada por los polinomios irreducibles comunes a todos los polinomios con menor exponente.

Ejemplo:

mcd (x^2-1, x^2+2x+1,x^2+3x+2)=(x+1)

x^2-1=(x+1)(x-1)
x^2+2x+1=$(x+1)^2$
x^2+3x+2=(x+1)(x+2)

4.2. Mínimo común múltiplo

Definición: mínimo común múltiplo de dos o más polinomios es otro polinomio que cumple:

a) es un polinomio múltiplo de todos los polinomios

b) de todos los polinomios múltiplos es aquel que tiene menor grado con coeficiente de mayor grado unidad.

Veamos como calcular el mínimo común múltiplo:

1) descomponer factorialmente cada polinomio en polinomios irreducible

2) el mínimo común múltiplo es el polinomio cuya descomposición factorial esta formada por los polinomios irreducibles comunes y no comunes a todos los polinomios con mayor exponente.

Ejemplo:

mcd (x^2-1, x^2+2x+1,x^2+3x+2)=$(x+1)^2$·(x-1)·(x+2)=x^4+3x^3+x^2+-3x-2

x^2-1=(x+1)(x-1)
x^2+2x+1=$(x+1)^2$
x^2+3x+2=(x+1)(x+2)

Ejercicio 11. Calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes polinomios:

a) p(x)=x^4-3x^2+2x, q(x)=x^3+3x^2-4

b) p(x)=x^5-x^3-x^2+1, q(x)=x^4-2x^3-x^2+2x

5. Fracciones algebraicas

5.1. Definición

Definición : se llama fracción algebraica al cociente de dos polinomios, es decir de la forma $\frac{Px)}{Q(x)}$.

Ejemplos: $\frac{2x+3}{x^2+x-1}, \frac{2}{x+1}, \frac{2x+5}{x^3-x^2+3}$

Las fracciones algebraicas se comportan de forma semejante a las fracciones numéricas como veremos en siguientes apartados.

5.2. Simplificación

Si el numerador y el denominador de una fracción algebraica se pueden dividir por el mismo polinomio (es decir son múltiplos de este polinomio) al dividirlos se simplifica la fracción.

Ejemplo: $\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-2x+1} \underset{:(x-1)}{=} \dfrac{x^2-x-2}{x-2}$

Si dividimos numerador y denominador por el máximo común divisor de los dos polinomios se obtiene la fracción irreducible.

Ejemplo: $\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^3-x^2-x+1} = \dfrac{(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+3)}{(x-1)^2(x+1)} = \dfrac{x+3}{x-1}$

5.3. Reducción a común denominador

Al multiplicar numerador y denominador de una fracción por el mismo polinomio se obtiene una fracción equivalente. Si tenemos varias fracciones y queremos obtener fracciones equivalentes con el mismo denominador tenemos dos opciones poner como denominador el producto de los dos denominadores o el mínimo común múltiplo de ambos.

Ejemplos:

$$\frac{x+7}{x},\frac{x^2+3}{x^2+x},\frac{x^2-1}{x+1} \to \frac{(x+7)\cdot(x+1)}{x^2+x},\frac{x^2+3}{x^2+x},\frac{(x^2-1)\cdot x}{x^2+x} \to \frac{x^2+8x+7}{x^2+x},\frac{x^2+3}{x^2+x},\frac{x^3-x}{x^2+x}$$

$$\frac{x^2-3x+5}{x^2-3x+2},\frac{x-1}{x+3} \to \frac{(x^2-3x+5)\cdot(x+3)}{(x^2-3x+2)\cdot(x+3)},\frac{(x-1)\cdot(x^2-3x+2)}{(x^2-3x+2)\cdot(x+3)} \to \frac{x^3-4x+15}{x^3-7x+6},\frac{x^3-4x^2+5x-2}{x^3-7x+6}$$

5.4. Operaciones

<u>Suma y resta</u>:se reduce a común denominador y se suman o restan los numeradores

Ejemplo: $\dfrac{x+7}{x}-\dfrac{x^2+x}{x^2-x} = \dfrac{(x+7)\cdot(x-1)}{x^2-x}-\dfrac{x^2+x}{x^2-x} = \dfrac{x^2+6x-7-(x^2+x)}{x^2-x} = \dfrac{5x-7}{x^2-x}$

<u>Producto</u>: el resultado es una fracción algebraica cuyo numerador es el producto de los numeradores y su denominador el producto de los denominadores.

Ejemplo: $\dfrac{x+1}{x-3}\cdot\dfrac{x-2}{x} = \dfrac{(x+1)\cdot(x-2)}{(x-3)\cdot x} = \dfrac{x^2-x-2}{x^2-3x}$

<u>División</u>: es una fracción algebraica donde el numerador es igual al producto del numerador de la primera por el denominador de la segunda y el denominador es igual al producto del denominador de la primera por el numerador de la segunda.

Ejemplo: $\dfrac{x+1}{x-3}:\dfrac{x-2}{x} = \dfrac{(x+1)\cdot x}{(x-3)\cdot(x-2)} = \dfrac{x^2+x}{x^2-5x+6}$

Nota: cuando multiplicamos o dividimos, muchas veces al igual que con las fracciones numéricas estas pueden ser simplificables. Para que sea más sencilla la simplificación es mejor factorizar primero los polinomios, y luego simplificar, antes de multiplicar. Veamos un ejemplo:

$$\frac{x^4-2x^3-4x^2+2x+3}{x^3-25x}\cdot\frac{x^3+7x^2+10x}{x^3-6x^2+11x-6}=\frac{(x+1)^2\cdot(x-1)\cdot(x-3)}{x\cdot(x-5)\cdot(x+5)}\cdot\frac{x\cdot(x+5)\cdot(x+2)}{(x-1)\cdot(x-3)\cdot(x-2)}=$$

$$=\frac{(x+1)^2\cdot\cancel{(x-1)}\cdot\cancel{(x-3)}}{\cancel{x}\cdot(x-5)\cdot\cancel{(x+5)}}\cdot\frac{\cancel{x}\cdot\cancel{(x+5)}\cdot(x+2)}{\cancel{(x-1)}\cdot\cancel{(x-3)}\cdot(x-2)}=\frac{(x+1)^2\cdot(x+2)}{(x-5)(x-2)}=\frac{x^3+4x^2+5x+2}{x^2-7x+10}$$

Ejercicios finales

Ejercicio 12. Factorizar los siguientes polinomios:

a) x^2-6x-7
b) $x^2+12x+35$
c) $2x^3+2x^2-24x$
d) $3x^3-9x^2-30x$

Ejercicio 13. Comprobar si las siguientes fracciones son equivalentes

a) $\frac{x-3}{2x-6}\ y\ \frac{1}{2}$

b) $\frac{x^2}{x^2+x}\ y\ \frac{1}{x}$

Ejercicio 14. A partir de los productos notables simplifica

a) $\frac{x^2-1}{x+1}$

b) $\frac{x^2-25}{x^2+25-10x}$

c) $\frac{x^2-1}{x^4-1}$

Ejercicio 15. Decir las raíces de los siguientes polinomios

a) $P(x)=(x+5)^2\cdot(2x-3)\cdot x$

b) $Q(x)=(x-2)\cdot(x^2+1)$

c) $R(x)=3x\cdot(x^2+5)$

d) $S(x)=2x^2(x-7)$

Ejercicio 16. Opera y simplifica

a) $\left(\frac{3}{x}-\frac{x}{3}\right):\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\right)$

b) $\left[\left(x+\frac{1}{x}\right):\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]\cdot(x-1)$

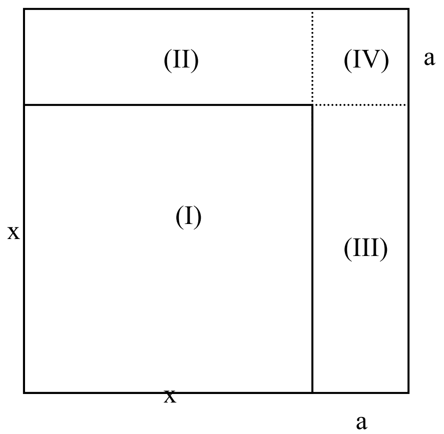
c) $\left(\frac{x-1}{x^2}+\frac{3}{x}-\frac{5}{x-4}\right)\cdot 2x^2$

Ejercicio 17. Calcular en cada caso el polinomio oculto para que las fracciones sean equivalentes

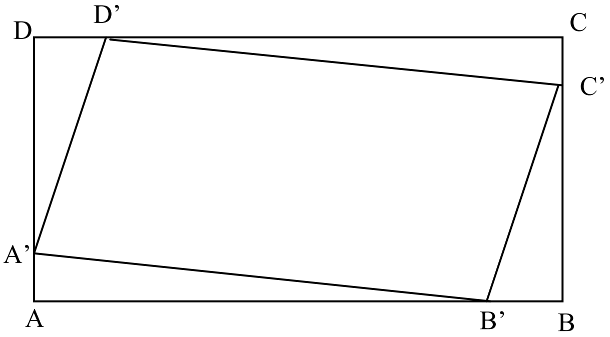
a) $\frac{x^2-x}{x^2-1}=\frac{---}{x+1}$

b) $\frac{x}{2x+1}=\frac{x^2}{---}$

Ejercicio 18. El lado x de un cuadrado aumenta en a cm. Formándose otro cuadrado. Suma las áreas de los rectángulos y cuadrados de la figura y comprueba que obtienes el área del cuadrado de lado x+a



Ejercicio 19. Calcula el área del cuadrilátero A'B'C'D' mediante un polinomio en x, sabiendo que AB=3cm, BC=5cm y AA'=BB'=CC'=DD'=x



Ejercicio 20. Hallar el mcd y el mcm

a) x^2; x^2-x; x^2-1
b) 2x; 2x+1; $4x^2$-1

Ejercicio 21. Efectúa:

a) $\frac{x-2}{x^2}+\frac{x+2}{x^2-x}-\frac{1}{x^2-1}$

b) $\left(1-\frac{x-1}{x}\right)\cdot\frac{x^2}{x+3}-1$

Ejercicio 22. Calcula m para que P(x)=x^3-mx^2+5x-2 sea divisible por (x+1)

Ejercicio 23. Calcular k si el resto de la división de ($2x^4$+kx^3-7x+6):(x-2) es -8

Ejercicio 24. Calcular m para que P(x)=mx^3-3x^2+5x+9m sea divisible por (x+2)

Ejercicio 25. Escribir los polinomios de segundo grado con siguientes raíces

a) 5 y -5

b) 0 y 4

c) 2 y 3

d) -6 y 1

Ejercicio 26. Escribir polinomio de segundo grado cuya única raíz sea 3

Ejercicio 27. Escribir polinomio de segundo grado sin raíces

Ejercicio 28. Inventa dos polinomios P(x) y Q(x) tal que mcm(P(x),Q(x))=x^2(x-3)(x+2)

Ejercicio 29. Inventa dos polinomios P(x) y Q(x) tal que mcd(P(x),Q(x))=x^2-4

Ejercicio 30. ¿Qué relación existe entre el mcd(P(x),Q(x)) y mcm(P(x),Q(x))?

Soluciones

Ejercicio 1.

a) (x-1) → Si hacemos la división P(x):(x-1) es exacta y el cociente es x^2-x-2, por lo que P(x)=(x-1)·(x^2-x-2) y (x-1) es divisor de P(x)

b) (x^2-1) → Si hacemos la división P(x):(x^2-1) es exacta y el cociente es x^2-2x, por lo que P(x)=(x^2-1)·(x^2-2x) y (x^2-1) es divisor de P(x)

c) (x^2+x+1) → Si hacemos la división P(x):(x^2+x+1) no es exacta y por tanto x^2+x+1 no es divisor de P(x)

d) (x^2-2x) → Si hacemos la división P(x):(x^2-2x) es exacta y el cociente es x^2-1, por lo que P(x)=(x^2-1)·(x^2-2x) y (x^2-2x) es divisor de P(x)

Ejercicio 2.

a) P(x):(x-1)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 3 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & & 1 & 4 & 3 & 0 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & 0 & \underline{|0} \end{array}$$

→ C(x)=x^3+4x^2+3x r=0. Es factor

P(x)=(x-1)·(x^3+4x^2+3x)

b) P(x):(x+1)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 3 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & & -1 & -2 & 3 & 0 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & 0 & \underline{|0} \end{array}$$

→ C(x)=x^3+2x^2-3x r=0. Es factor

P(x)=(x+1)·(x^3+2x^2-3x)

c) P(x):(x-2)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 3 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & & 2 & 10 & 18 & 30 \\ \hline & 1 & 5 & 9 & 15 & \underline{|30} \end{array}$$

→ C(x)=x^3+5x^2+9x+15 r=30. No es factor

d) P(x):(x+3)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 3 & -1 & -3 & 0 \\ -3 & & -3 & 0 & 3 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 0 & \underline{|0} \end{array}$$

→ C(x)=x^3-x r=0. Es factor

P(x)=(x+3)·(x^3-x)

e) P(x):(x)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 3 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline & 1 & 3 & -1 & -3 & \underline{|0} \end{array}$$

→ C(x)=x^3+3x^2-x-3 r=0. Es factor

P(x)=x·(x^3+3x^2-x-3) (es sacar factor común a la x)

Ejercicio 3.

a) P(1)=0

b) P(3)=10
c) P(0)=-2

Ejercicio 4.

a) $P(x)=x^4-1 \rightarrow$ Se puede ver a simple vista que x=1 y x=-1 son raíces pues $P(1)=1^4-1=0$ y $P(-1)=(-1)^4+1=0$.
b) $P(x)=x^2-6x+8$, buscamos los valores de x que anulen P(x) es decir la siguiente ecuación de segundo grado: $x^2-6x+8=0$. Resolviendo la ecuación x=-2 y x=-4 que son los valores que cumplen P(-2)=0 y P(-4)=0

Ejercicio 5

$P(x) = x^3+2x^2-x-2$

a) Pueden ser a=1 → (x-1); a=2 → (x-2); a=-1 → (x+1); a=-2 →(x+2)

b) Como mucho sólo 3 pueden ser divisores de P(x)

c) No hace falta dividir simplemente calcular el resto es decir P(a):

- **(x-1)** → r=P(1)=1+2-1-2=0 divisor
- (x-2) → r=P(2)=8+8-2-2=12 no divisor
- **(x+1)**→ r=P(-1)=-1+2+1-2=0 divisor
- **(x+2)**→ r=P(-2)=-8+8+2-2=0 divisor

d) El número máximo de soluciones de la ecuación es de 3, son x=1, x=-1, x=-2

$Q(x) = x^3-5x^2-9x+45$

a) Pueden ser a=1 →(x-1); a=3 →(x-3); a=5 →(x-5); a=9 →(x-9); x=45 →(x-45) a=-1 → (x+1); a=-3 → (x+3); a=-5 → (x+5); a=-9 → (x+9); x=-45 → (x+45)

b) Como mucho sólo 3 pueden ser divisores de P(x)

c) No hace falta dividir simplemente calcular el resto es decir P(a):

- (x-1) → r=P(1)=37 no divisor
- **(x-3)** → r=P(3)=0 divisor
- **(x-5)** → r=P(5)=0 divisor
- (x-45)→r=P(45)=80645 no divisor
- (x+1)→ r=P(-1)=48 no divisor
- **(x+3)**→ r=P(-3)=0 divisor
- (x+5)→ r=P(-5)=-160 no divisor
- (x+45)→r=P(-45)=-100800 no divisor

d) El número máximo de soluciones de la ecuación es de 3, son x=3, x=-3, x=5

Ejercicio 6

a) $x^2-3x+1 \rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$,2 divisores $x^2-3x+1=(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2})(x-\frac{3-\sqrt{5}}{2})$

b) x^3+x → No al ser de tercer grado→ 2 divisores, 1 raíz $x^3+x=x(x^2+1)$

c) $x^2+x+6 \rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1-24}}{2}= no\ sol$, **Irreducible,** no raíces ni divisores

d) $7x-3/2 \rightarrow$ es **irreducible** al ser de primer grado

Ejercicio 7

a) $P(x)=x^3+4x^2+x+4 \rightarrow P(x)=x^3+4x^2+x+4=(x+4)(x^2+1) \rightarrow$ raíz -4

b) $Q(x)=2x^3+x^2-8x-4 \rightarrow Q(x)=2(x+\frac{1}{2})(x-2)(x+2) \rightarrow$ raíz $-\frac{1}{2}, \pm 2$

c) $H(x)=3x^2+10x+3 \rightarrow H(x)=3\cdot(x+3)(x+1/3) \rightarrow$ raíz -3 y -1/3

d) $I(x)=2x^3+4x^2-2x-4 \rightarrow I(x)=2\cdot(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+2) \rightarrow$ raíz -1, 1 y -2

e) $J(x)=x^3+x \rightarrow J(x)=x(x^2+1) \rightarrow$ raíz 0

f) $K(x)=x^3+x^2+x-3 \rightarrow K(x)=(x-1)\cdot(x^2+2x+3) \rightarrow$ raíz 1

g) $L(x)=x^4+2x^3+x^2 \rightarrow L(x)=x^2\cdot(x+1)^2 \rightarrow$ raíz 0 y -1 doble

h) $M(x)=x^4-3x^3-2x^2+2x \rightarrow M(x)=x\cdot(x+1)\cdot(x-(2+\sqrt{2}))\cdot(x-(2-\sqrt{2})) \rightarrow$ raíz 0,-1, $2+\sqrt{2}$, $2-\sqrt{2}$

Ejercicio 8.

a) $P(x)=x^3-3x^2+2x+3=(x+5)\cdot(x+1)\cdot(x-2)$ Falso, 2 y 5 no son divisores de 3
b) $Q(x)=x^3-2x^2+1=(x-1)^2(x+1)^2$ Falso, 4 raíces (dos multiplicidad doble) y grado 3
c) $H(x)=x^3-5x^2-6x+5=(x-5)\cdot(x+1)\cdot(x-1)$. Verdadero 3 raíces $\rightarrow H(1)=H(-1)=H(5)=0$
d) $I(x)=x^3+5x^2+6x+10=(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+5)$ Falso. $I(-1)=-1+5-6+10\neq 0$
e) $S(x)=2x^2+4x+2=(x+1)^2$. Falso, falta multiplicar por 2.

Ejercicio 9.

a) $P(x)= 2\cdot(x+1)\cdot(x-2)^2$

b) $Q(x)=(x-3)\cdot(x+2)\cdot(x^2+1)$

Ejercicio 10.

$P(-1)=-1+3-3\cdot a+1=0 \rightarrow a=1$

Ejercicio 11.

a) $p(x)=x^4-3x^2+2x$, $q(x)=x^3+3x^2-4$

$p(x)=x\cdot(x-1)^2\cdot(x+2)$

$q(x)=(x-1)\cdot(x+2)^2$

$mcm(p(x),q(x))=(x-1)^2\cdot(x+2)^2\cdot x=x^5+2x^4-3x^3-4x^2+4x$

$mcd(p(x),q(x))=(x-1)\cdot(x+2)=x^2+x-2$

b) $p(x)=x^5-x^3-x^2+1$, $q(x)=x^4-2x^3-x^2+2x$

$p(x)=(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x^2+x+1)$

$q(x)=x\cdot(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-2)$

$mcm(p(x),q(x))=x\cdot(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x^2+x+1)=x^6-x^5-2x^4-x^3+x^2+2x$

$mcd(p(x),q(x))=(x+1)\cdot(x-1)=x^2-1$

Ejercicio 12.

a) $x^2-6x-7=(x+1)\cdot(x-7)$
b) $x^2+12x+35=(x+5)\cdot(x+7)$
c) $2x^3+2x^2-24x=2\cdot x\cdot(x-3)\cdot(x+4)$
d) $3x^3-9x^2-30x=3\cdot x\cdot(x+2)\cdot(x-5)$

Ejercicio 13.

Dos métodos, haremos cada apartado por uno.

a) $\frac{x-3}{2x-6}$ y $\frac{1}{2}$ → si son equivalentes se cumple (x-3)·2=(2x-6)·1 → 2x-6=2x-6. Si son equivalentes

b) $\frac{x^2}{x^2+x}$ y $\frac{1}{x}$ → factorizamos y simplificamos $\frac{x^2}{x\cdot(x+1)}=\frac{x}{x+1}$ y $\frac{1}{x}$ → No son equivalentes

Ejercicio 14

a) $\frac{x^2-1}{x+1}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)}=(x-1)$

b) $\frac{x^2-25}{x^2+25-10x}=\frac{(x+5)\cdot(x-5)}{(x-5)^2}=\frac{x+5}{x-5}$

c) $\frac{x^2-1}{x^4-1}=\frac{(x+1)\cdot(x-1)}{(x^2-1)\cdot(x^2+1)}=\frac{1}{x^2+1}$

Ejercicio 15.

a) $P(x)=(x+5)^2\cdot(2x-3)\cdot x$ → x=0, x=-5(doble) y x=3/2

b) $Q(x)=(x-2)\cdot(x^2+1)$ → x=2

c) $R(x)=3x\cdot(x^2+5)$ → x=0

d) $S(x)=2x^2(x-7)$ → x=0 (doble) y x=7

Ejercicio 16.

a) $\left(\frac{3}{x}-\frac{x}{3}\right):\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{9-x^2}{3x}\right):\left(\frac{3+x}{3x}\right)=\frac{(9-x^2)\cdot(3x)}{3x\cdot(3+x)}=\frac{(3+x)(3-x)}{(3+x)}=3-x$

b) $\left[\left(x+\frac{1}{x}\right):\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]\cdot(x-1)=\left[\left(\frac{x^2}{x}+\frac{1}{x}\right):\left(\frac{x^2}{x}-\frac{1}{x}\right)\right]\cdot(x-1)=\left[\frac{x^2+1}{x}:\frac{x^2-1}{x}\right]\cdot(x-1)=$

$=\left[\frac{(x^2+1)\cdot x}{(x^2-1)\cdot x}\right]\cdot(x-1)=\left[\frac{x^2+1}{x^2-1}\right]\cdot(x-1)=\frac{(x^2+1)\cdot(x-1)}{x^2-1}=\frac{x^2+1}{x+1}$

c) $\left(\frac{x-1}{x^2}+\frac{3}{x}-\frac{5}{x-4}\right)\cdot 2x^2=\left(\frac{(x-1)\cdot(x-4)}{x^2(x-4)}+\frac{3\cdot x\cdot(x-4)}{x^2(x-4)}-\frac{5x^2}{x^2(x-4)}\right)\cdot 2x^2=$

$$=\left(\frac{x^2-5x+4+3x^2-12x-5x^2}{x^2(x-4)}\right)\cdot 2x^2=\frac{-x^2-17x+4}{x^2(x-4)}\cdot 2x^2=\frac{-2x^2-34x+8}{x-4}$$

Ejercicio 17.

a) $\frac{x^2-x}{x^2-1}=\frac{---}{x+1}\to P(x)=\frac{(x^2-x)\cdot(x+1)}{x^2-1}=\frac{x^2-x}{x-1}=\frac{x(x-1)}{x-1}=x$

b) $\frac{x}{2x+1}=\frac{x^2}{---}\to P(x)=\frac{x^2(2x+1)}{x}=x(2x+1)=2x^2+x$

Ejercicio 18.

Área cuadrado (I) = x^2
Área cuadrado (IV)= a^2
Área rectángulo (II)=xa
Área rectángulo (III)=ax

Área total = $x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$

Ejercicio 19.

área (A'B'C'D')=area(ABCD)-2·area(BB'C')-2· area(CC'D')=

$=3\cdot 5-2\cdot\frac{1}{2}\cdot x\cdot(3-x)-2\cdot\frac{1}{2}\cdot x\cdot(5-x)=15-(3x-x^2)-(5x-x^2)=15-8x+2x^2$

Ejercicio 20.

a) x^2; x^2-x; x^2-1 → $x^2=x^2$; $x^2-x=x\cdot(x-1)$; $x^2-1=(x+1)\cdot(x-1)$
mcd(x^2; x^2-x; x^2-1)=1
mcm(x^2; x^2-x; x^2-1)=$x^2\cdot(x-1)\cdot(x+1)=x^4-x^2$

b) 2x; 2x+1; $4x^2$-1 → $2x=2\cdot x$; $2x+1=2\cdot(x+1/2)$; $4x^2-1=4\cdot(x^2-1/4)=4\cdot(x+1/2)\cdot(x-1/2)$
mcd(2x; 2x+1; $4x^2$-1)=1
mcm(2x; 2x+1; $4x^2$-1)=$x\cdot(x+1/2)\cdot(x-1/2)=x^3-\frac{1}{4}x$

Ejercicio 21.

a) $\frac{x-2}{x^2}+\frac{x+2}{x^2-x}-\frac{1}{x^2-1}=\frac{(x-2)\cdot(x^2-1)+(x+2)\cdot x-x^2}{x^2(x-1)(x+1)}=\frac{2x^3+x+2}{x^2(x^2-1)}$

b) $\left(1-\frac{x-1}{x}\right)\frac{x^2}{x+3}-1=\left(\frac{x}{x}-\frac{x-1}{x}\right)\frac{x^2}{x+3}-1=\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{x+3}-1=\frac{x}{x+3}-1=\frac{x-(x+3)}{x+3}=-\frac{3}{x+3}$

Ejercicio 22.

Si es divisible por (x+1) entonces-1 es raíz de P(x) es decir P(-1)=-1-m-5-2=0 → m=-8

Ejercicio 23.

Resto=P(2)=32+8k-14+6=-8 → 8k=-32 k=-4

Ejercicio24.

Si P(x) divisible por (x+2) entonces P(-2)=0 → -8m-12-10+9m=0 → m=22

Ejercicio 25.

a) 5 y -5 → $P(x)=(x-5)\cdot(x+5)=x^2-25$

b) 0 y 4 → $P(x)=x\cdot(x-4)=x^2-4x$

c) 2 y 3 → $P(x)=(x-2)\cdot(x-3)=x^2-5x+6$

d) -6 y 1 → $P(x)=(x+6)\cdot(x-1)=x^2+5x-6$

Ejercicio 26.

$P(x)=(x-3)^2$

Ejercicio 27.

$P(x)=x^2+2x+7$

Ejercicio 28. Inventa dos polinomios P(x) y Q(x) tal que $mcm(P(x),Q(x))=x^2(x-3)(x+2)$

$P(x)=x\cdot(x-3)$, $Q(x)=x^2\cdot(x-2)$

Ejercicio 29. Inventa dos polinomios P(x) y Q(x) tal que $mcd(P(x),Q(x))=x^2-4$

$P(x)=(x^2-4)\cdot x$; $Q(x)=(x^2-4)\cdot(x+1)$

Ejercicio 30. ¿Qué relación existe entre el mcd(P(x),Q(x)) y mcm(P(x),Q(x))?

El mcm(P(x),Q(x)) es múltiplo del mcd(P(x),Q(x)). Ya que el mcm tiene los polinomios irreducibles, comunes y no comunes con mayor exponente, y el mcd sólo los comunes y con menor exponente.