Tema 4. Polinomios Operaciones

1. Expresiones algebraicas. Identidades y ecuaciones.
2. Monomios
   2.1. Definiciones
   2.2. Operaciones con monomios
3. Polinomios
   3.1. Definiciones
   3.2. Operaciones con polinomios

1. Expresiones algebraicas. Identidades y ecuaciones.

Definición: una ***expresión algebraicas*** es toda combinación de letras (***variables o incógnitas***) y números relacionados entre sí por las operaciones algebraicas (suma, resta, multiplicación, división, potencias, etc.).

Ejemplo: el perímetro y el área de un rectángulo de lados a y b → $A=a\cdot b$, $P=2a+2b$

Ejercicio 1: Calcula las expresiones algebraicas con siguiente enunciado:

a) El perímetro de un triángulo de lados a, b, c

b) La relación de los tres lados de un triángulo rectángulo a (mayor) b y c.

c) El doble de la suma de a con b dividido entre la mitad de la resta de a y c.

d) Los lados de un triángulo cumplen que el mayor (a) es la raíz cuadrado del producto de los otros dos (b y c).

Dentro de las expresiones algebraicas distinguimos entre las dos más importantes, la identidad (o igualdad) y la ecuación. Veamos en qué consiste cada una de ellas.

Definición: una ***ecuación*** es la relación de igualdad entre dos expresiones algebraicas que sólo son ciertas para ***algún valor*** de las letras (***incógnitas***).

Ejemplos: a) $3x+2=5$ → sólo cierto si $x=1$, b) $x^2-3x+2=0$ → sólo cierto para $x=1$, $x=2$, c) $x-y=2$ → solo cierta si x es dos unidades más que y ($x=8$,$y=6$; $x=23$, $y=21$…)

Definición: una ***identidad*** es la relación de igualdad entre dos expresiones algebraicas que son ciertas para ***todo valor*** de las letras (***variables***).

Ejemplos: a)$3x+5+7x=10x+5$, b)$(2x+1)^2=4x^2+4x+1$, c) $(x+y)\cdot(2x+1)=2x^2+x+2xy+y$

Ejercicio 2: Distingue si las siguientes expresiones son ecuaciones o igualdades. Comprobar dando 2 valores aleatorios a cada letra si se cumplen las igualdades.

a) $(3x+5)\cdot(2x-1)=6x^2+7x-5$

b) $(2x+y)\cdot(y-1)=2xy+y^2-y+2x$

c) $x^2+x=2x^3$

2. Monomios

2.1. Definiciones

Un monomio es una expresión del tipo $a\cdot x^n$ donde:

- $a\in R$ y se denomina ***coeficiente***
- x: es la variable (puede ser otra letra y, z…). Esta "letra" puede tomar cualquier valor real
- $n\in N$ es el ***grado*** del monomio
- x^n se denomina parte literal

***Ejemplos**:* $5x^2, -\frac{2}{3}y^3, z^4, -\pi x, -3$

	Coeficiente	Grado	Variable
$5x^2$	5	2	X
$-\frac{2}{3}y^2$	$-\frac{2}{3}$	3	Y
z^4	1	4	z
$-\pi x$	$-\pi$	1	x
-3	-3	0	--

Los monomios de grado 0 son los números reales $-3=-3\cdot x^0$

Definición: monomios semejantes son todos aquellos que tiene misma parte literal, es decir misma variable y grado.

***Ejemplo**:* $-4x^3, \pi x^3, -x^3$

2.2. Operaciones con monomios

***<u>Suma y resta</u>**:* sólo se pueden sumar los monomios semejantes, sumándose y restándose los coeficientes:

$ax^n \pm bx^n = (a\pm b)x^n$

Ejemplo: $-7x^2+3x^2-12x^2=-16x^2$;

$$\sqrt{8}x-\sqrt{2}x=(\sqrt{8}-\sqrt{2})x=(2\sqrt{2}-\sqrt{2})x=\sqrt{2}x$$

<u>Multiplicación:</u> se multiplican los coeficientes y se suman los exponentes de las variables iguales:

$(ax^n)\cdot(bx^m)=(a\cdot b)x^{n+m}$

***Ejemplos**:* $5x^2\cdot(-3x^4)=-15x^6$; $\sqrt{3}y\cdot\sqrt[3]{2}y^2=(\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2})\cdot y^3=\sqrt[6]{3^3\cdot 2^2}\cdot y^3=\sqrt[6]{108}\cdot y^3$; $2x\cdot(-3y^2)=-6\cdot x\cdot y^2$

***<u>División</u>**:* se dividen los coeficientes y se restan los exponentes de variables iguales:

$(ax^n):(bx^m)=(a:b)x^{n-m}$

***Ejemplo**:* $5x^3:(2x^2)=\frac{5}{2}x$, $\frac{\sqrt{6}x^3}{\sqrt{3}x^2}=\sqrt{2}x$

***<u>Potencia</u>**:* se eleva el coeficiente y se multiplica el exponente por el grado del número.

$(ax^n)^m=a^m\cdot x^{n\cdot m}$

***Ejemplos**:* $(5\cdot x^3)^4=5^4x^{12}=625\cdot x^{12}$; $(-3y)^3=-27y^3$

Ejercicio 3. Opera y simplifica al máximo.

a) $3 \cdot y \cdot x^2 - 5 \cdot y \cdot x^2 + 21 \cdot y \cdot x^2$

b) $(\sqrt[3]{2} \cdot x \cdot y^2)^6$

c) $(3 \cdot x^2 \cdot y^3 \cdot z) \cdot (-2x \cdot y^2 \cdot z^2)$

3. Polinomios

3.1. Definiciones

Definición: se llama polinomio de variable x a la expresión algebraica que resulta de sumar 2 o más monomios de variable x, siendo del tipo:

$P(x)=a_n x^n+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$ Donde:

- $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$ y son los ***coeficientes*** y a_0 ***término independiente***
- n es el ***grado*** del polinomio (el grado mayor de los monomios)
- $a_n x^n, \ldots, a_1x, a_0$ son los términos del polinomio

Ejemplo*:* $P(x)=-6x^5-3x^2+\frac{3}{2}\cdot x+\sqrt{2}$ es un polinomio de variable x, de grado 5 con coeficientes $a_5=-6$, $a_4=a_3=0$, $a_2=-3$, $a_1=\frac{3}{2}$ y $a_0=\sqrt{2}$. Siendo $\sqrt{2}$ el término independiente.

Observa las siguientes expresiones que no son polinomios:

$\sqrt{x}+x$; $x^3-\frac{1}{x}$; x^2-y+2

Otras definiciones:

- *polinomio de grado cero*: son los números reales
- *polinomio nulo*: es el cero $0(x)=0$
- *polinomio completo*: es aquel donde todos los coeficientes desde el de mayor grado al término independiente son distintos de cero. Ejemplo: $P(x)=-2x^3+4x^2-5x+12$

Valor numérico de un polinomio: resulta de sustituir una variable por un número, obteniendo el correspondiente valor numérico.

Ejemplo*:* $P(x)=x^3-x^2+x-5 \rightarrow P(1)=1^3-1^2+1-5=-4$; $P(0)=0^3-0^2+0-5=-5$

Raíz de un polinomio P(x): es todo número real, $a \in R$, tal que su valor numérico es cero es decir $P(a)=0$

Ejemplo*:* $P(x)=7x^5-4x^2+11$ el -1 es una raíz de P(x) $\rightarrow P(-1)=-7-4+11=0$.

En siguientes apartados veremos cuantas y como calcular las raíces de los polinomios.

3.2. Operaciones con polinomios

Suma y diferencia: se suman y restan los monomios semejantes como vimos en el apartado anterior.

Ejemplo: $P(x)=2x^3-5x^2+3x-2$ y $Q(x)=6x^4-5x^3+6x-5$

$P(x)+Q(x)= 2x^3-5x^2+3x-2+(6x^4-5x^3+6x-5)=6x^4-3x^3-5x^2+9x-7$

$P(x)-Q(x)=2x^3-5x^2+3x-2-(6x^4-5x^3+6x-5)=2x^3-5x^2+3x-2-6x^4+5x^3-6x+5=$

$=-6x^4+7x^3-5x^2-3x+3$

Definición: polinomios opuestos son los que sumados el resultado es el polinomio nulo. El opuesto de P(x) se denota como –P(x).

Ejemplo: $P(x)=x^2-3x+5 \rightarrow -P(x)=-x^2+3x-5$

Multiplicación: la multiplicación de dos polinomios resulta de multiplicar cada monomio del primer polinomio por todos los monomios del segundo.

Ejemplo: $(5x^2-3x+5)\cdot(-7x^3+x+1)=-35x^5+5x^3+5x^2+21x^4-3x^2-3x-35x^3+5x+5=$

$=-35x^5+21x^4-30x^3+2x^2+2x+5$

Potencia de polinomios: la potencia n-esima de un polinomio P(x) se denota como $(P(x))^n$ y resulta de multiplicar P(x) n veces por si mismo: $(P(x))^n=\underbrace{P(x)\cdot P(x)\cdot\ldots\cdot P(x)}_{\text{n-veces}}$

Ejemplo: $P(x)=(5x^2+x+1) \rightarrow (P(x))^3=(5x^2+x+1)\cdot(5x^2+x+1)\cdot(5x^2+x+1)=$

$=125x^6+75x^5+90x^4+31x^3+18x^2+3x+1$

Identidades notables:

- Cuadrado de la suma de monomios: $\mathbf{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$.

  Demostración: $(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2$

  Ejemplo: $(5x+3)^2=(5x)^2+2\cdot5x\cdot3+3^2=25x^2+30x+9$

- Cuadrado de la diferencia de monomios: $\mathbf{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$.

  Demostración: $(a-b)^2=(a-b)\cdot(a-b)=a^2-ab-ba+b^2=a^2-2ab+b^2$

  Ejemplo: $(5x-3)^2=(5x)^2-2\cdot5x\cdot3+3^2=25x^2-30x+9$

- Suma por diferencia: $\mathbf{(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2}$

  Demostración: $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-ab+ba-b^2=a^2-b^2$

  Ejemplo: $(5x-3)\cdot(5x+3)=(5x)^2-3^2=25x^2-9$

Ejercicio 4. Calcular

a) $(3x+1)^2$
b) $(a^2+1/2)^2$
c) $(2x^2-3)^2$
d) $(2a^3+b^2)\cdot(2a^3-b^2)$
e) $(2x^3+2x-1)^2$

Sacar factor común: cuando todos los términos del polinomio P(x) son múltiplos de un monomio m(x) podemos sacarlo factor común.

Ejemplo: $6x^4-9x^3+12x^2-3x=3x\cdot(2x^3-3x^2+4x-1)$

Ejercicio 5. Sacar factor común:

a) $490x^3-420x^2+90x$
b) $1/4x^3-3/20x^2+5/4x$

División de polinomios: veamos como se divide a partir de un ejemplo

$$
\begin{array}{lllll|l}
\multicolumn{5}{c|}{\overbrace{6x^4 \quad\quad\quad +8x^2 \ +7x \ +40}^{P(X)}} & \overbrace{2x^2-4x+5}^{Q(x)} \\ \cline{6-6}
-6x^4 & +12x^3 & -15x^2 & & & 3x^2+6x+17/2 = C(x)\ \mathit{cociente} \\ \cline{1-3}
 & +12x^3 & -7x^2 & & & \\
 & -12x^3 & +24x^2 & -30x & & \\ \cline{2-4}
 & & 17x^2 & -23x & & \\
 & & -17x^2 & +34x & -85/2 & \\ \cline{3-5}
 & & & 11x & -5/2 = R(x)\ \mathit{resto} &
\end{array}
$$

Regla de la división: $P(x)=Q(x)\cdot C(x)+R(x)$

Si la división es exacta se cumple $R(x)=0 \rightarrow P(x)=Q(x)\cdot C(x)$, luego P(x) ***múltiplo*** de Q(x) y C(x), o estos ***divisores*** de P(x).

Ejercicio 6. Operar y simplificar al máximo el resultado dados los polinomios siguientes $P(x)=3x^4-2x^2-3x+1$, $Q(x)=-x^5+3x^3+2x-.4$, $S(x)=x^3-2x^2-2x+4$

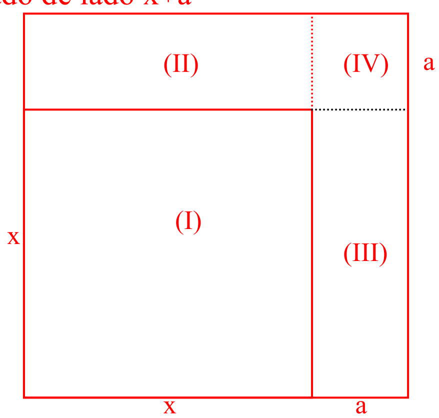
a) $3\cdot P(x)-4\cdot Q(x)-2\cdot S(x)$

b) $P(x)\cdot S(x)$

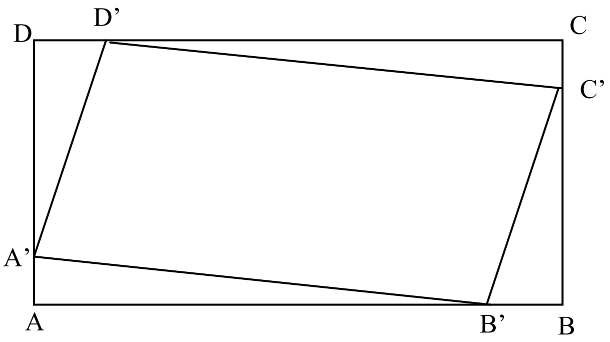
c) P(x) |S((x) (calcular cociente y resto y hacer la regla de la división)

Ejercicio 7. Decir si $A(x)= x^4+3x^3-x^2-4x-1$ es múltiplo de $B(x)=x+3$ y $C(x)=x+1$

Ejercicio 8. El lado x de un cuadrado aumenta en a cm. Formándose otro cuadrado. Suma las áreas de los rectángulos y cuadrados de la figura y comprueba que obtienes el área del cuadrado de lado x+a



Ejercicio 9. Calcula el área del cuadrilátero A'B'C'D' mediante un polinomio en x, sabiendo que AB=3cm, BC=5cm y AA'=BB'=CC'=DD'=x



SOLUCIONES

Ejercicio 1:

a) P=a+b+c

b) $a^2=b^2+c^2$ (teorema de Pitágoras)

c) $\frac{2(a+b)}{(a-c):2}$

d) $a=\sqrt{b\cdot c}$

Ejercicio 2:

a) $(3x+5)\cdot(2x-1)=6x^2+7x-5$ → identidad multiplicando la izquierda obtenemos la derecha.

Valores x=1 → $8\cdot1=6\cdot1+7\cdot1-5$ luego 8=8; x=0→$5\cdot(-1)=0+0-5$luego -5=-5

b) $(2x+y)\cdot(y-1)=2xy+y^2-y+2x$ → identidad multiplicando la izquierda obtenemos la derecha.

Valores x=0, y=0 → $0\cdot(-1)=0+0-0+0$ luego 0=0; x=0, y=1→$1\cdot0=0+1-1+0$ luego 0=0

c) $x^2+x=2x^3$ → Ecuación, no podemos obtener la expresión de la derecha a partir de la izquierda.

Valores: se cumple para x=1 →1+1=2, pero no para otros valores como x=2→ $4+2=2\cdot8$ → $6\neq16$

Ejercicio 3.

a) $3\cdot y\cdot x^2-5\cdot y\cdot x^2+21\cdot y\cdot x^2=19yx^2$

b) $(\sqrt[3]{2}\cdot x\cdot y^2)^6=4\cdot x^6\cdot y^{12}$

c) $(3\cdot x^2\cdot y^3\cdot z)\cdot(-2x\cdot y^2\cdot z^2)=-6x^3\cdot y^5\cdot z^3$

Ejercicio 4.

a) $(3x+1)^2=9x^2+6x+1$
b) $(a^2+1/2)^2=a^4+a+1/4$
c) $(2x^2-3)^2=4x^4-12x^2+9$
d) $(2a^3+b^2)\cdot(2a^3-b^2)=4\cdot a^6-b^4$
e) $(2x^3+2x-1)^2=(2x^3+2x-1)\cdot(2x^3+2x-1)=4x^6+8x^4-4x^3+4x^2-4x+1$

Ejercicio 5.

a) $490x^3-420x^2+90x=10x\cdot(49x^2-42x+9)=10x(7x-3)^2$
b) $1/4x^3-3/20x^2+5/4x=x/4\cdot(x^2-3/5x+5)$

Ejercicio 6.

a) $3\cdot(3x^4-2x^2-3x+1)-4\cdot(-x^5+3x^3+2x-.4)-2\cdot(x^3-2x^2-2x+4)=9x^4-6x^2-9x+3+4x^5-12x^3-8x+16-2x^3+4x^2+4x-8=4x^5+9x^4-14x^3-2x^2-13x+11$

b) $(3x^4-2x^2-3x+1)\cdot(x^3-2x^2-2x+4)=3x^7-6x^6-6x^5+12x^4-2x^5+4x^4+4x^3-8x^2-3x^4+6x^3+6x^2-12x+x^3-2x^2-2x+4=3x^7-6x^6-6x^5+13x^4+11x^3-2x^2-14x+4$

c)

$$\begin{array}{lllll|l}
3x^4 & & \overset{P(X)}{-2x^2} & -3x & +1 & \overset{S(x)}{x^3-2x^2-2x+4} \\ \cline{6-6}
-3x^4 & +6x^3 & +6x^2 & -12x & & 3x+6=C(x)\ \textit{cociente} \\ \cline{1-5}
 & +6x^3 & +4x^2 & -15x+1 & & \\
 & -6x^3 & +12x^2 & +12x-24 & & \\ \cline{2-5}
 & & 16x^2 & -3x-23=R(x)\ \textit{resto} & &
\end{array}$$

Comprobación: $(x^3-2x^2-2x+4)\cdot(3x+6)+16x^2-3x-23=3x^4+6x^3-6x^3-12x^2-6x^2-12x+12x+24+16x^2-3x-23=3x^4-2x^2-3x+1$

Ejercicio 7.

Dividiendo tenemos que la división entre (x+3) la división no es exacta → no múltiplo. La división entre (x+1) la división es exacta → es múltiplo

Ejercicio 8.

Área cuadrado (I) = x^2
Área cuadrado (IV)= a^2
Área rectángulo (II)=xa
Área rectángulo (III)=ax

Área total = $x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$

Ejercicio 9.

área (A'B'C'D')=area(ABCD)-2·area(BB'C')-2· area(CC'D')=

$$=3\cdot5-2\cdot\frac{1}{2}\cdot x\cdot(3-x)-2\cdot\frac{1}{2}\cdot x\cdot(5-x)=15-(3x-x^2)-(5x-x^2)=15-8x+2x^2$$