Tema 10. Geometría plana

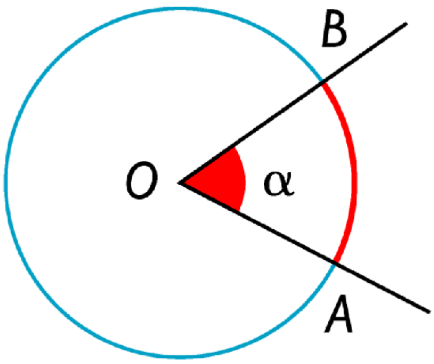
Contenido

1. Relaciones angulares

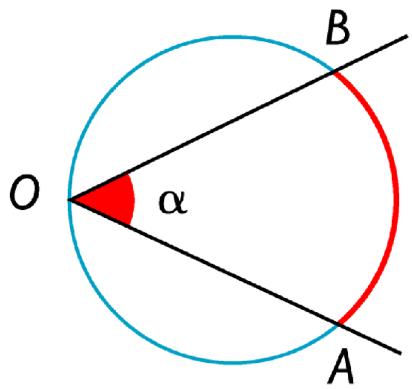
1.1. Ángulos en una circunferencia

Veamos las definiciones de los siguientes ángulos:

- ***Ángulo central:*** Se dice al ángulo que tiene el vértice en el origen, dividiendo a la circunferencia en dos arcos de circunferencia.
- ***Ángulo inscrito:*** Se dice que un ángulo que tiene el vértice sobre la circunferencia y corta a esta en dos arcos de circunferencia.



Ángulo central

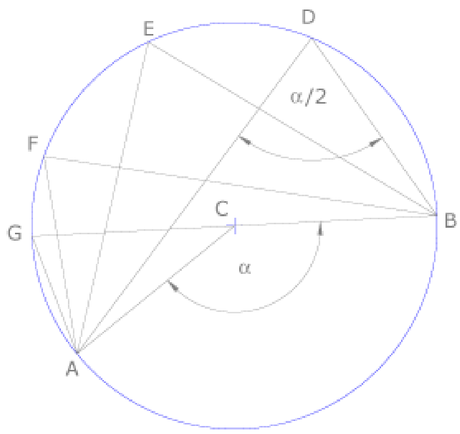


Ángulo inscrito

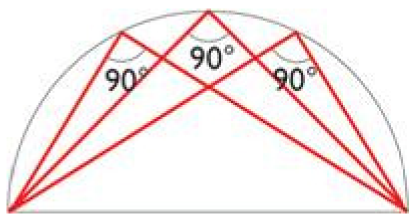
Relaciones en los ángulos de una circunferencia:

1. Todos los ángulos inscritos que abarcan el mismo arco (pasen por A y B) tienen el mismo valor independientemente donde se sitúe el vértice
2. El ángulo central vale el doble del ángulo inscrito que abarque el mismo arco de circunferencia.

Gráficamente:



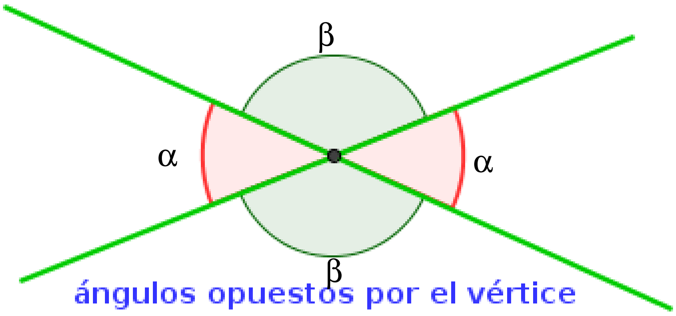
Caso particular: Si el arco que abarca el ángulo central es de media circunferencia (90º) entonces los inscritos serán de 90º.



1.2. Ángulos opuestos por el vértice

Cuando dos rectas se cortan en un punto se forman 4 ángulos, siendo dos parejas de ángulos opuestos por el vértice.

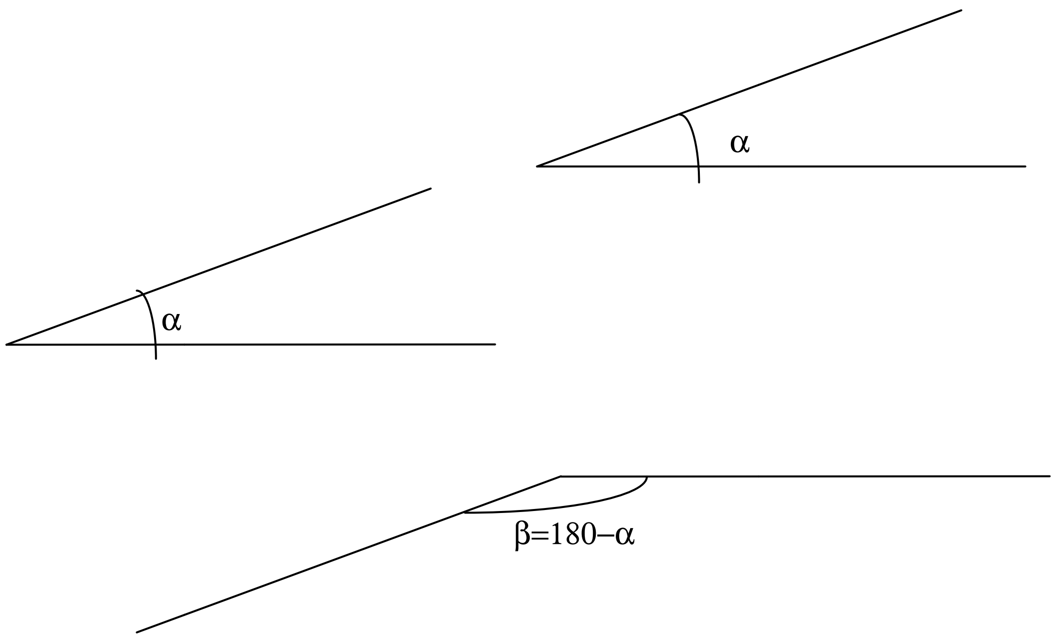
Se cumple que los ángulos opuestos por el vértice miden lo mismo, siendo suplementarios (suman 180º) los no opuestos por el vértice.



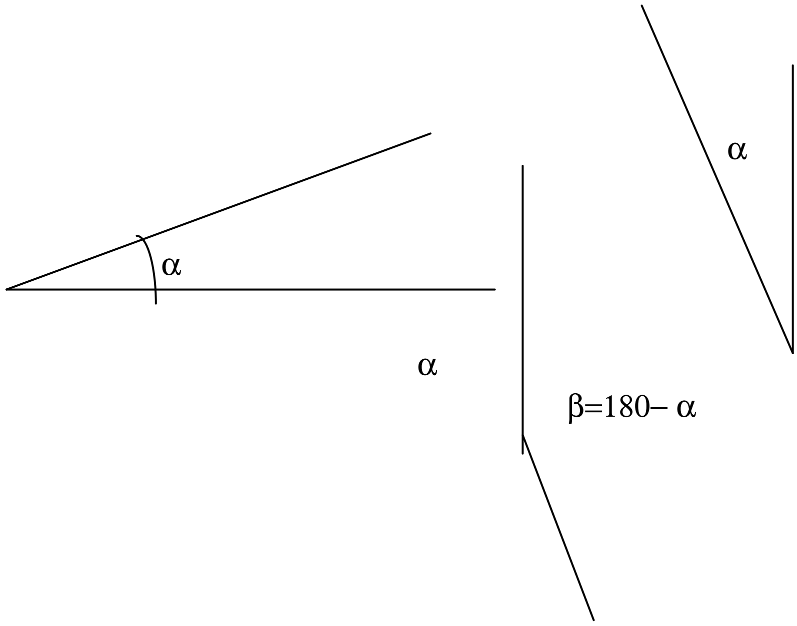
$\alpha+\beta=180º$

1.3. Ángulos formados por lados paralelos y perpendiculares

Cuando dos ángulos están formados por dos lados paralelos puede ocurrir que estos ángulos sean iguales o suplementarios (sumen 180º)



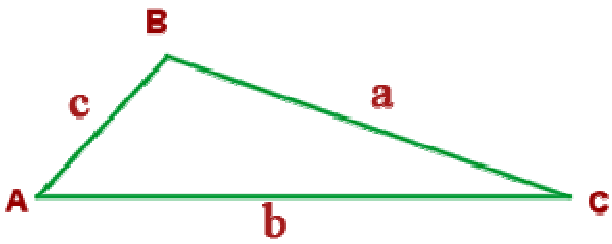
Cuando dos ángulos están formados por lados perpendiculares puede ocurrir que estos ángulos sean iguales o suplementarios (sumen 180º)



2. Triángulos

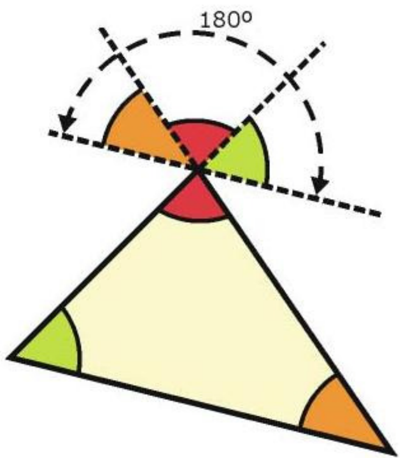
2.1. Propiedades generales de los triángulos

Notación: llamaremos a los vértices A,B.C a sus lados opuestos a, b, cy los ángulos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$.



Propiedad de los ángulos: la suma de los ángulos de un triángulo es de 180º, independiente de cómo sea el triángulo. $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180º$

Demostración: Si trazamos una recta paralela a uno de los lados por el vértice opuestos se nos forman con el vértice tres ángulos, el ángulo del propio triángulo y dos más que son iguales a los otros dos ángulos del triángulo, ya que están formados por lados paralelos. Como los tres ángulos suman 180º se cumple la proposición

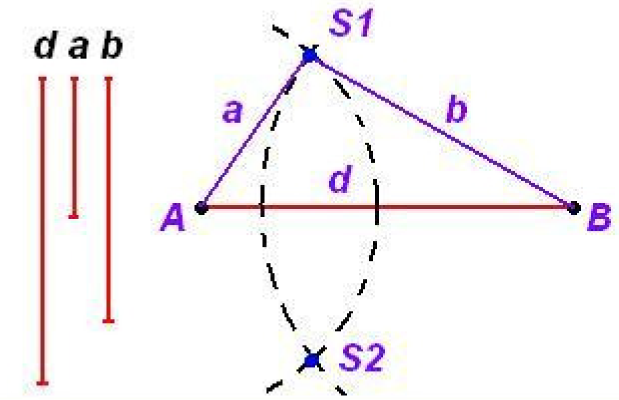


$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180º$

Propiedad de los lados: los lados de un triángulo cumplen que el mayor siempre es menor que la suma de los otros dos.

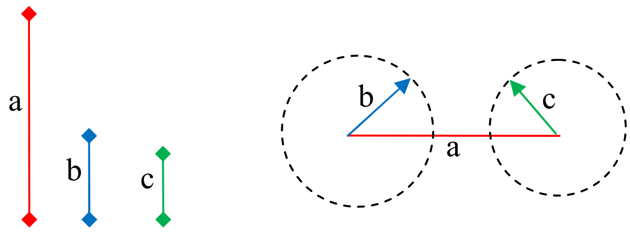
Demostración: es imposible construir un triángulo si el lado mayor es superior a la suma de los otros dos, veámoslo gráficamente:

a) Construcción de triángulo donde lado mayor es menor que la suma de los otros os:



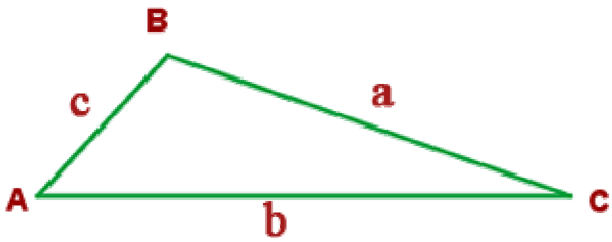
. d<a+b

b) Construcción imposible de triángulo donde lado mayor es mayor que la suma de los otros dos:



a>b+c

Relación de los lados y ángulos: en todo triángulo al mayor ángulo le corresponde el lado opuesto de mayor tamaño, al menor ángulo el lado opuesto es el menor.



b>a>c → $\hat{B} > \hat{A} > \hat{C}$

Nota: si un triángulo tiene dos ángulos iguales sus lados opuestos son iguales, y lo son los tres lados lo son también los tres lados (así el triángulo equilátero tiene también los tres ángulos iguales)

Ejercicio 1: Decir si son posibles los siguientes triángulos:

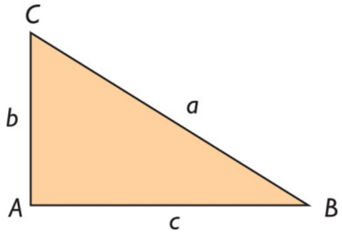
a) a=4cm, b=20cm, c=12cm
b) Isósceles A=80º, B=40º

Ejercicio 2: Calcular el ángulo de un triángulo isósceles donde el ángulo opuesto al lado desigual mide 100º.

Ejercicio 3: Calcular los ángulos de un triángulo equilátero.

2.2. Relación en triángulo rectángulo. Teorema de Pitágoras.

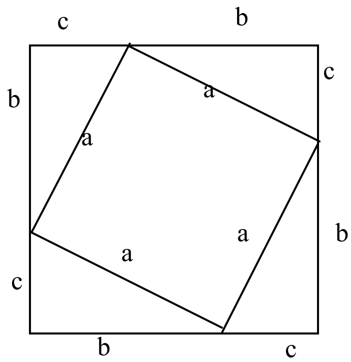
Notación: en un triángulo rectángulo los catetos (lados menores que forman el ángulo recto) se denotan como b y c, y la hipotenusa (el otro lado del triángulo) se denotará como a. Se cumple entonces que $\hat{A}$=90º



Teorema de Pitágoras: en todo triángulo <u>rectángulo</u> se cumple que la suma de los catetos al cuadrado es igual a la suma de la hipotenusa al cuadrado. Es decir

$$\boxed{a^2=b^2+c^2}$$

Demostración: existe más de 100 demostraciones diferentes, veamos una de ellas. Para eso construimos un cuadrado repitiendo 4 veces el triángulo rectángulo:



Vemos que se generan dos cuadrados, el grande de lado b+c y el pequeño de lado a. El área del cuadrado grande será igual a la suma del área del pequeño más la de los 4 triángulos (iguales):

$\text{área}_{\text{cuadrado grande}}=(b+c)^2$

$\text{área}_{\text{cuadrado pequeño}}= a^2$

$\text{área}_{\text{triángulo}}=\frac{1}{2}bc$

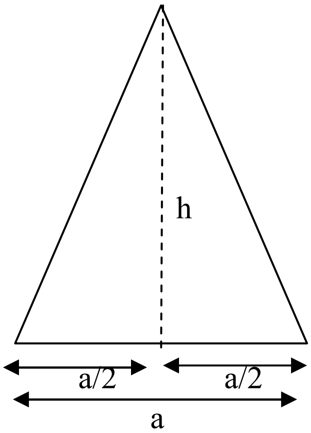
Igualando las áreas: $\text{área}_{\text{cuadrado grande}}=\text{área}_{\text{cuadrado pequeño}}+4\cdot\text{área}_{\text{triángulo}} \rightarrow$

$(b+c)^2=a^2+4\cdot\frac{1}{2}bc \rightarrow b^2+c^2+2bc=a^2+2\cdot bc,$

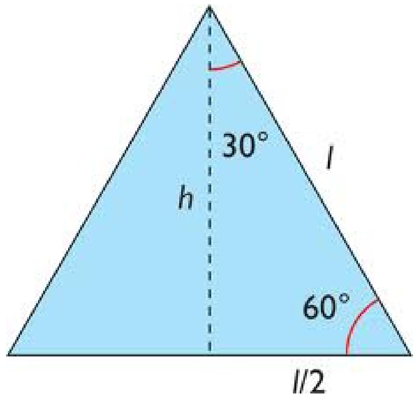
simplificando obtenemos el teorema de Pitágoras: $b^2+c^2=a^2$

2.3. Propiedades de los triángulos equiláteros e isósceles

En los triángulos equiláteros e isósceles se cumple que la altura del lado desigual (en los equiláteros las tres alturas) dividen a la base en dos partes iguales.



Triángulo isósceles



Triángulo equilátero

Ejercicio 4: Calcular el área de un triángulo equilátero de lado 6 cm.

Ejercicio 5: Calcular la diagonal de un cuadrado de área $36m^2$

Ejercicio 6: Calcular el área de un hexágono regular de 8cm de lado.

Ejercicio 7: Calcular el valor de la altura de un trapecio isósceles donde las bases vale 10 m y 4 m y la altura 4m.

3. Semejanzas de figuras.

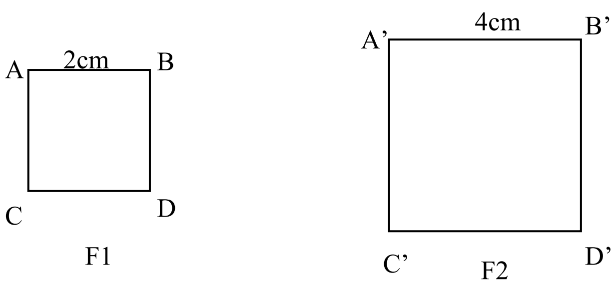
3.1. Definición de semejanza

Definición: dos figuras se dicen que son semejantes si tienen misma forma de tal manera que se cumple:

1. Los ángulos correspondientes son todos iguales
2. Los lados son todos proporcionales entre si. La razón de proporcionalidad (cociente entre lados correspondientes) se llama ***razón de semejanza***

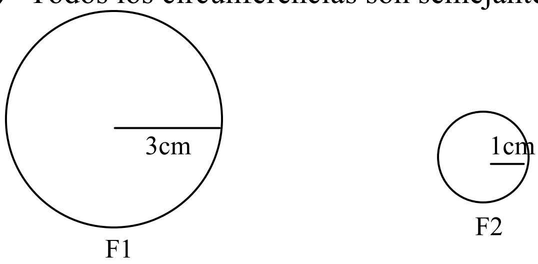
Ejemplo:

1) todos los cuadrados son semejantes (ángulos iguales y lados proporcionales)



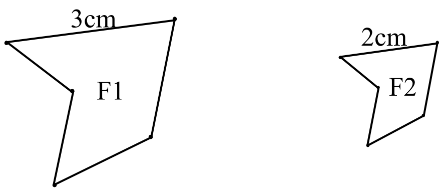
Luego la figura F_1 es semejante a F_2 ($F_1 \equiv F_2$) con razón de semejanza de k= $\frac{4cm}{2cm}=2$

2) Todos los circunferencias son semejantes



Luego la figura F_1 es semejante a F_2 ($F_1 \equiv F_2$) con razón de semejanza de k= $\frac{1cm}{3cm}=\frac{1}{3}$

3) Veamos un ejemplo de dos figuras arbitrarias semejantes:



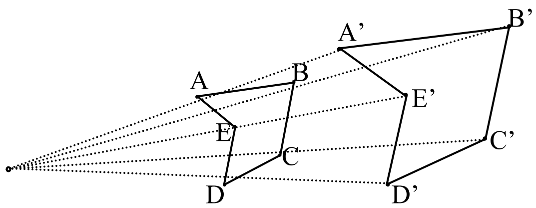
La figura F_1 es semejante a F_2 ($F_1 \equiv F_2$) con razón de semejanza k=$\frac{2cm}{3cm}=\frac{2}{3}$

En la vida corriente las figuras semejantes que se utilizan son por ejemplo los planos (en 2 dimensiones) o las maquetas (en 3 dimensiones).

Definición de escala: el concepto de escala es equivalente al de razón de semejanza, es la razón métrica entre un plano o maqueta y aquello a lo que representa.

La notación usual en los mapas es la siguiente 1:1000 que significa que 1cm en el mapa es en realidad 1000cm=10m. Es equivalente a una razón de semejanza k=1000.

Formas de construir figuras semejantes: hay varias formas veamos a partir de un punto fijo (foco):



3.2. Criterios de semejanza generales de triángulos

La semejanza en triángulos es tan importante porque todo polígono se puede dividir en triángulos, y será semejante si los triángulos que los forman lo son con misma constante de semejanza.

Gracias al teorema de Tales para comprobar si dos triángulos son semejantes no es necesario ver si todos los ángulos son iguales y todos los lados proporcionales. En la práctica tenemos 3 criterios:

<u>*Primer Criterio*</u>: dos triángulos $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ son semejantes si dos ángulos iguales (por ejemplo $\hat{A} = \hat{A}'$ y $\hat{B} = \hat{B}'$)

<u>*Segundo Criterio*</u>: dos triángulos $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ son semejantes si sus tres lados son proporcionales ($\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$).

<u>*Tercer Criterio*</u>: dos triángulos $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ son semejantes si un ángulo igual y los dos lados que lo forman son proporcionales (por ejemplo $\hat{A} = \hat{A}'$ $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$)

Todas las demostraciones se hacen a partir del teorema de Tales

Ejercicio 8: decir si son semejantes los siguientes triángulos. **a)** b=7cm, c=6cm; b'=2,5cm, c'=2cm $\hat{A} = \widehat{A'}$=30º **b)**$\hat{A} = 30°, \hat{B} = 70°, \widehat{A'} = 80°, \widehat{B'} = 70°$,

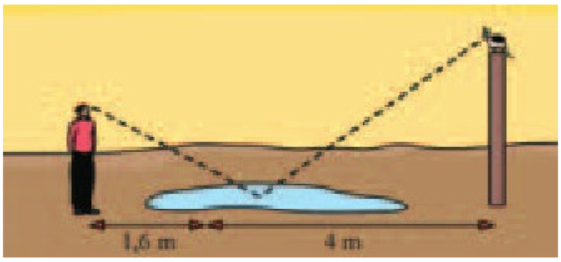
3.3. Área de figuras semejantes

Teorema: sean F1 y F2 dos polígonos semejantes con razón de semejanza k, el área de F_2 y F_1 se relacionan de la siguiente manera: area(F_2)=k^2area(F_1).

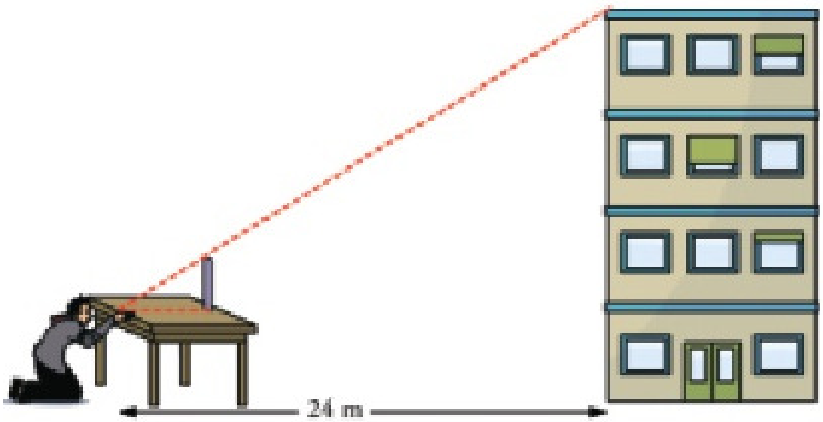
La demostración es sencilla si pensamos que para calcular el área de cualquier figura multiplicamos dos longitudes (base por altura por ejemple en los triángulos), y si ambas se relacionan con k el producto de ellas lo hará con k^2

Ejercicio 9: Los lados de un triángulo miden 3 cm, 4 cm y 5 cm. Se construye otro semejante a él cuyo lado menor mide 15 cm. a) ¿Cuál es la razón de semejanza? b) Halla los otros dos lados del segundo triángulo.c) El primer triángulo es rectángulo. ¿Podemos asegurar que el segundo también lo será?

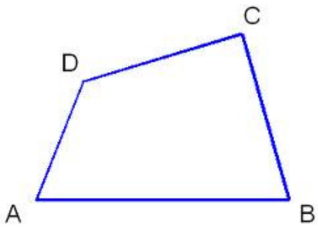
Ejercicio 10: El gato de Leticia se ha subido a un poste. Leticia puede ver a su gato reflejado en un charco. Toma las medidas que se indican en el dibujo y mídela altura de sus ojos: 144 cm. ¿A qué altura se encuentra el gato?

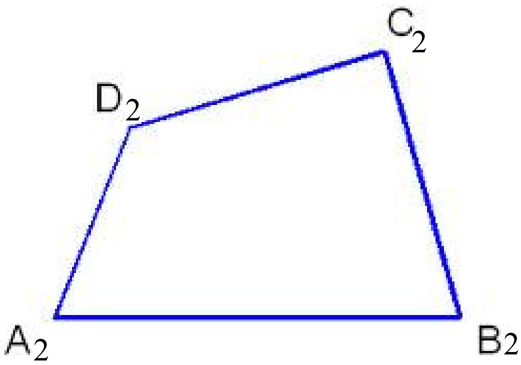


Ejercicio 11: Hallar la altura del edificio sabiendo que la mesa 1 m de altura, 80cm de acho y la regla una altura de 52cm



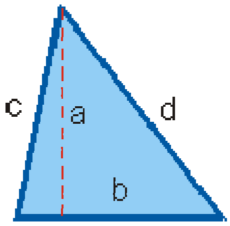
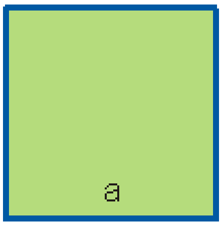
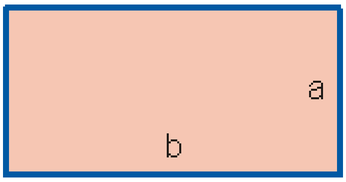
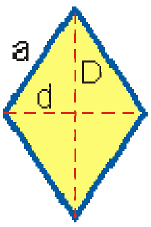
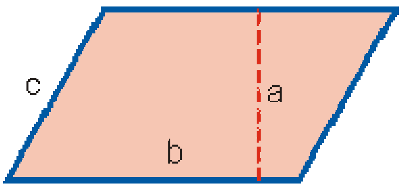
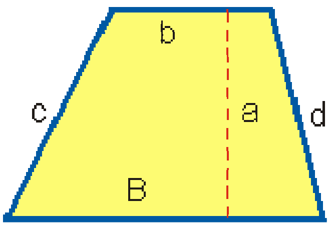
Ejercicio 12: Calcular los datos que faltan sabiendo que la figura 1 tiene un área de $4cm^2$ y la figura 2 de $36cm^2$. AD=2cm, BC=3,5cm, A_2B_2=9cm, D_2C_2=8,4cm

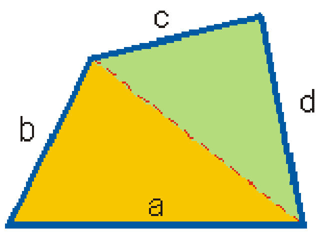
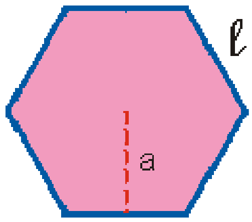




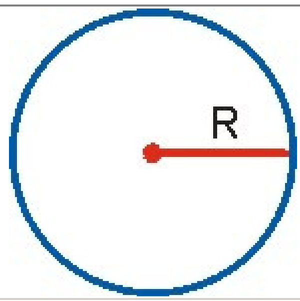
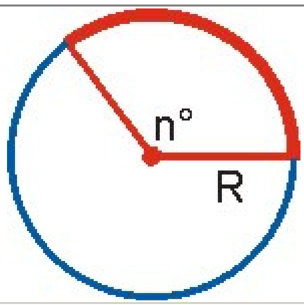
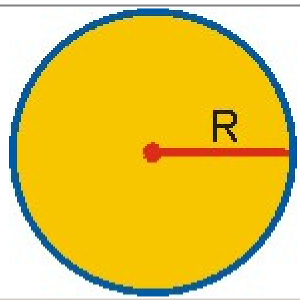
4. Áreas y perímetros de los polígonos

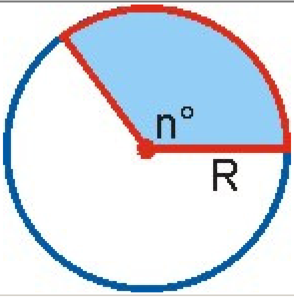
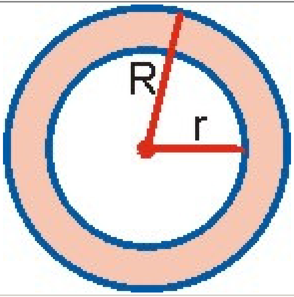
Tablas elaboradas por José María Arias Cabezas (www.infoymates.es)

Nombre	Dibujo	Perímetro	Área
Triángulo		P = Suma de los lados $P = b + c + d$	$A = \frac{b \cdot a}{2}$
Cuadrado		$P = 4 \cdot a$	$A = a^2$
Rectángulo		$P = 2(b + a)$	$A = b \cdot a$
Rombo		$P = 4 \cdot a$	$A = \frac{D \cdot d}{2}$
Romboide		$P = 2(b + c)$	$A = b \cdot a$
Trapecio		$P = B + c + b + d$	$A = \frac{B + b}{2} \cdot a$

Trapezoide		$P = a + b + c + d$	A = Suma de las áreas de los dos triángulos
Polígono Regular		$P = n\ell$	$A = \frac{1}{2} P \cdot a$

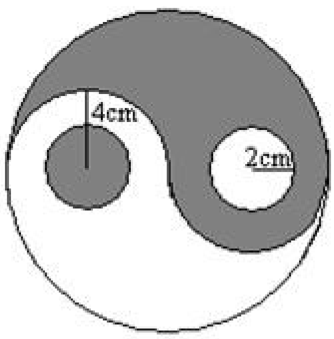
5. Perímetros y áreas de figuras circulares

Nombre	Dibujo	Longitud	Área
Circunferencia		$L = 2\pi R$	
Arco		$L = \frac{2\pi R}{360°} \cdot n°$	
Círculo			$A = \pi R^2$

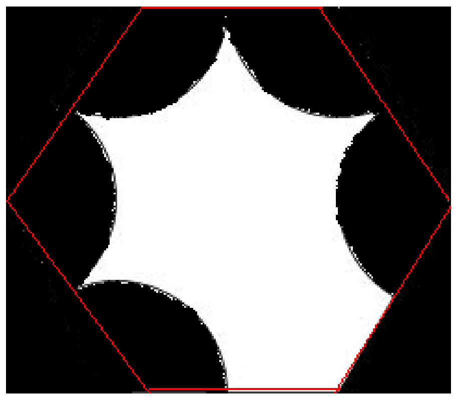
Sector circular			$A = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot n^\circ$
Corona circular			$A = \pi(R^2 - r^2)$

Ejercicio 13: Calcular las áreas sombreadas

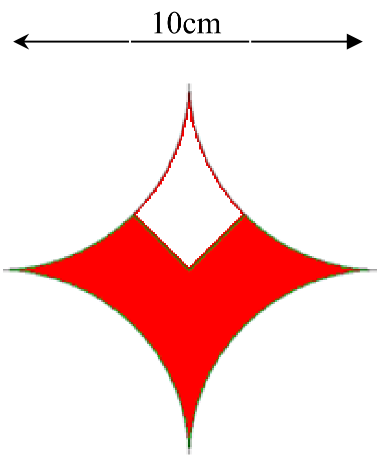
a)



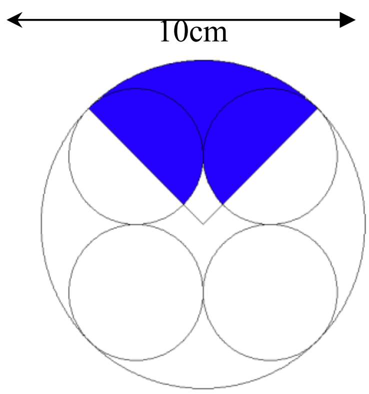
b) (lado del hexagono 4 cm, es rectángulo)



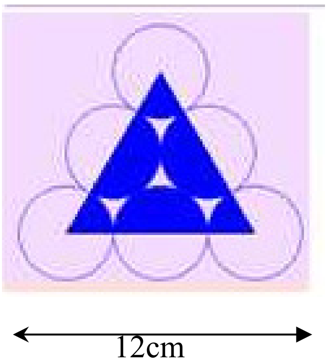
c)



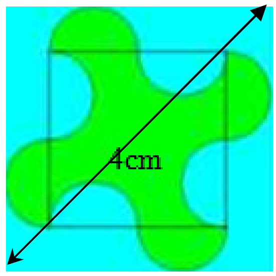
d)



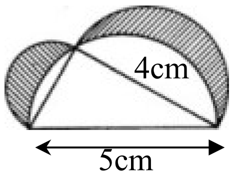
e) .



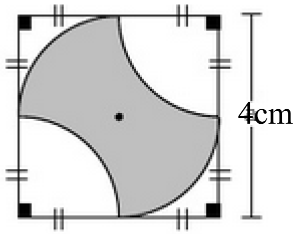
f)



g)



h)



Soluciones

Ejercicio 1:

a) No es posible pues b>a+c
b) No es posible pues si es isósceles dos ángulos iguales, luego dos opciones el águlo que falta es de 40º → 40º+40º+80º≠180º o de 80º→ 80º+80º+40º≠180

Ejercicio 2:

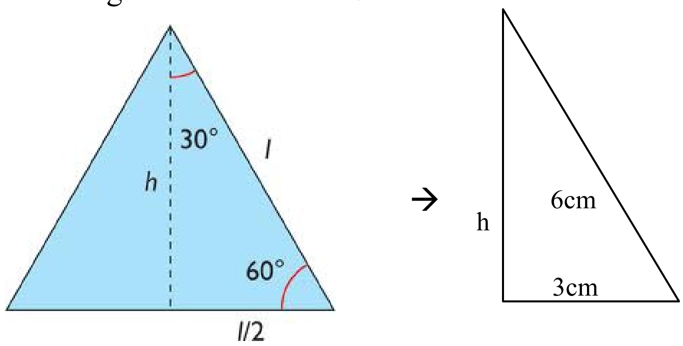
El ángulo que nos dan es el distinto a los otros dos, luego 100º+x+x=180º→ x=40º

Ejercicio 3

Los tres ángulo son iguales pues los tres lados también lo son, luego 3x=180º → x=60º

Ejercicio 4

Necesitamos calcular la altura, para esto debemos buscar un triángulo rectángulo cuya única incógnita sea la altura. Como la altura divide al triángulo en dos partes iguales:

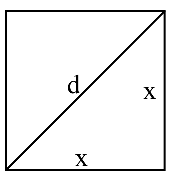


a=6cm, b=3cm, c=h → $a^2=b^2+c^2$ → $6^2=h^2+3^2$ →

h=$\sqrt{36-9}=\sqrt{27}$cm

Area=$\frac{b\cdot h}{2}=\frac{6\cdot\sqrt{27}}{2}=3\sqrt{27}$ cm^2

Ejercicio 5:

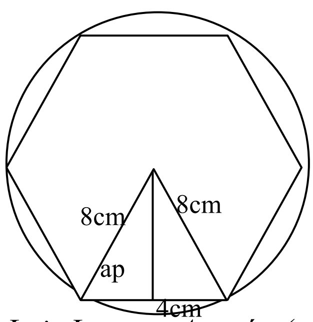


A=x^2=36m^2→ x=6m

$x^2+x^2=6^2$; $2x^2=36$; $x^2=18$; x=$\sqrt{18}$m

Ejercicio 6: En el hexágono regular se cumple que el lado del hexágono es igual al radio de la circunferencia donde está inscrita, ya que el triángulo central es equilátero. Las razones de ser equilátero es que al ser dos lados el radio de la circunferencia el triángulo es al menos isósceles, pero el ángulo en principio desigual del triángulo mide 360º/6=60º, luego es equilátero.

$area=\frac{perimetro\cdot ap}{2}$

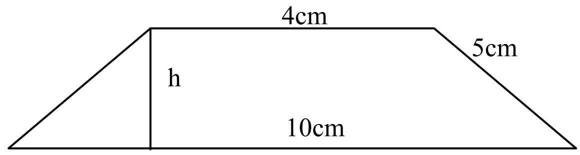


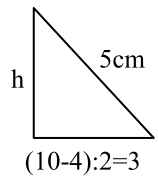
ap=$\sqrt{8^2-4^2}$=$\sqrt{58}$cm

Perimetro=8·6=48cm

Area=$\frac{48\cdot\sqrt{58}}{2}$=24$\sqrt{58}$

Ejercicio 7: Tenemos que aplicar el teorema de Pitágoras cuya única incógnita del triángulo recto.

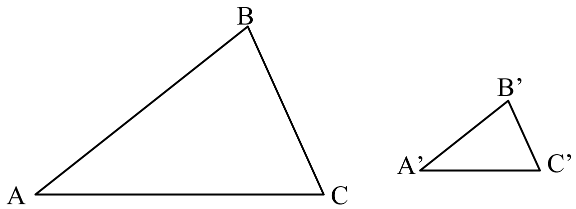




$h^2=5^2-3^2 \rightarrow h=4m.$

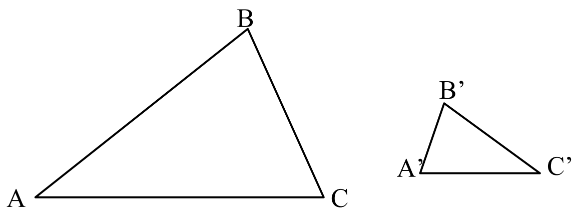
Ejercicio 8:

a) b=7cm, c=6cm; b'=2,5cm, c'=2cm $\hat{A}=\hat{A}'=30^{\circ}$



Veamos si se cumple el criterio 3: $\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'} \rightarrow \frac{7}{2,5}=\frac{6}{2} \rightarrow 14 \neq 15$ no semejantes

b) $\hat{A}=30^{\circ}, \hat{B}=70^{\circ}$, $\hat{A}'=80^{\circ}, \hat{B}'=70^{\circ}$



A simple vista parece que no son semejantes, pero engaña. Lo que ocurre es que los 2 triángulos son semejantes pero están girados. Tal que el vértice equivalente de A es C', el de C es A'. Vemos como son iguales los tres ángulos:

$$\hat{A}=30^{\circ}, \hat{B}=70^{\circ}, \hat{C}=180-(70+30)=80^{\circ} \rightarrow 30^{\circ}, 70^{\circ}, 80^{\circ}$$

$$\hat{A}'=80^{\circ}, \hat{B}'=70^{\circ}, \hat{C}'=180-(70+80)=30^{\circ} \rightarrow 30^{\circ}, 70^{\circ}, 80^{\circ}$$

Luego son semejantes.

Ejercicio 9:

a) k=15/3=5

b) 4cm·5 = 20cm, 5cm·5 = 25 cm

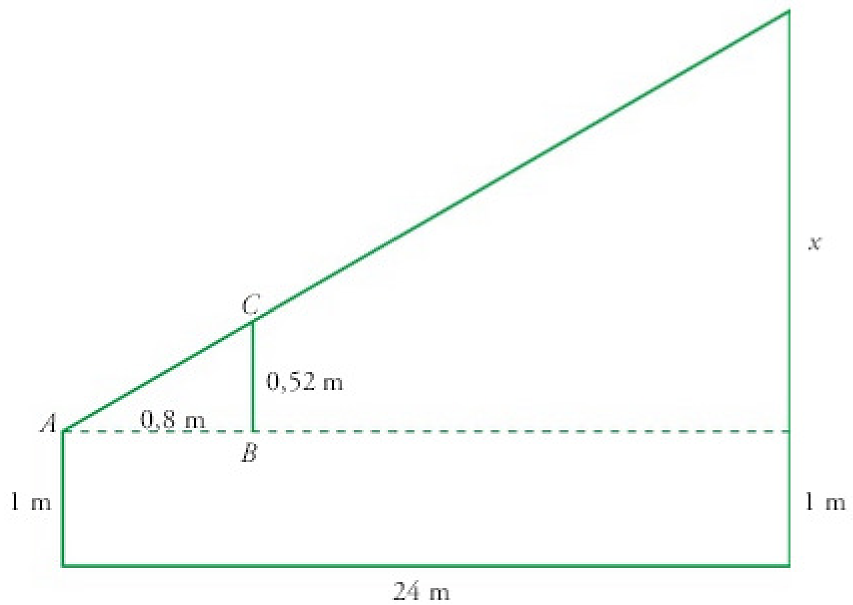
c) Dos triángulos semejantes tienen los ángulos respectivamente iguales. Por tanto, si uno es rectángulo, también lo es el otro.

Ejercicio 10

Los triángulos formados por Leticia y el charco y el poste con el charco, son rectángulos. Además, los ángulos que forman con el charco son iguales. Luego, los dos triángulos son semejantes.

$\frac{1,44}{1,6} = \frac{x}{4} \rightarrow x = \frac{4 \cdot 1,44}{1,6} = 3,4$ El gato se encuentra a 3,6 m de altura

Ejercicio 11



0,52/x==0,8/24 → x=15,6. La altura de la casa es 15,6+1=16,6 m

Ejercicio 12

AD=2cm, BC=3,5cm, A_2B_2=9cm, D_2C_2=8,4cm
Calculemos la constante de semejanza a partir de las áreas: k^2=36/9=4 → k=2
Luego A_2D_2=2·2=4cm, B_2C_2=3,5·2=7cm, AB=9/2=4,5 cm, DC=8,4/2=4,2cm