Examen de 2º Bachiller CCSS. Matrices y Determinantes

Nombre del alumno: **Grupo:**

Cada problema tiene el valor que se indica, se valorará no sólo el resultado sino también el ***desarrollo del problema*** y el ***uso correcto de la notación matemática***

Ejercicio 1 (PAU CYL 2010 Septiembre): Una empresa de transportes debe organizar el traslado de dos productos A y B entre dos ciudades utilizando camionetas y furgones. Cada camioneta permite transportar 5 unidades de A y 4 de B, mientras que en cada furgón se puede transportar 2 unidades de A y 1 de B. La empresa no puede transportar más unidades de las que pueda vender en la ciudad de destino y en la ciudad de destino puede vender como máximo 90 unidades de A y 60 de B. El envío de una camioneta le reporta a la empresa un beneficio de 1600 euros, mientras que el envío de un furgón le reporta un beneficio de 600 euros. Usando técnicas de programación lineal, ¿cuántas camionetas y furgones deben usar para maximizar el beneficio en estos transportes? ¿A cuánto asciende dicho beneficio óptimo?

Solución:

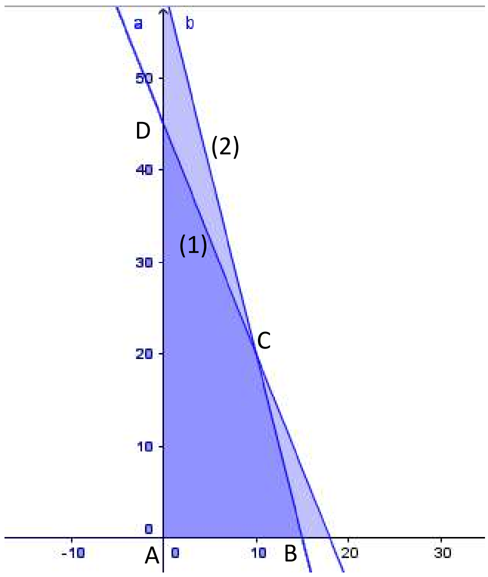
x=nº de camionetas; y=nº furgones

Limitación unidades de A: $5x+2y\leq 90$

Limitaciones de B: $4x+y\leq 60$

$$\left.\begin{array}{r} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ (1)\,5x+2y\leq 90 \\ (2)\,4x+y\leq 60 \end{array}\right\}$$

A(0,0), B(15,0), D(0,45)



$C\begin{cases}(1)5x+2y=90\\(2)4x+y=60\end{cases}$ y=60-4x; 5x+2(60-4x)=90 → -3x=-30 → x=10, y=20 C(10,20)

z=beneficio=1600·x+600·y (máximo)

A(0,0) → z=0€ ; B(15,0) → z=24.000; C(10,20) → z=28.000€; D(0,45) → z=27.000

El máximo beneficio será 28.000€ cuando se usan 10 camionetas y 20 furgonetas

Ejercicio 2. (PAU CYL 2009 Junio): Estudia el siguiente sistema en función del parámetro "a". Resuélvelo siempre que sea posible, dejando las soluciones en función de parámetros si fuera necesario. Resuélvelo para el caso particular a = 3.

$$\begin{cases} x+y+2z=3 \\ x+2y+3z=5 \\ x+3y+az=0 \end{cases}$$

Solución: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & a & 0 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$; |A|=2a+6+3-4-9-a=a-4

|A|=0 → a=4.

Si a=4, rang(A)=rang(A*)=3=nº incógnitas → SCD (Teorema de Rouche-Frobenius)

Si a∈R-{4} rang(A)=2 y rang(A*)=2 → SI (Teorema de Rouche-Frobenius)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 9+5-6-15=-7$$

Tiene solución si a∈R-{4}. Resolvamos el sistema por Regla de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & a \end{vmatrix}}{a-4} = \frac{6a+30-27-5a}{a-4} = \frac{a+3}{a-4}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix}}{a-4} = \frac{5a+9-10-3a}{a-4} = \frac{2a-1}{a-4}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{a-4} = \frac{9+5-6-15}{a-4} = \frac{-7}{a-4}$$

Si a=3 el sistema es compatible determinado. Solución (sustituyendo en la solución anterior): x=-6, y=-5, z=7

Ejercicio 3. (PAU CYL 2006 Junio): Una familia disponen de 80€ mensuales para realizar la compra en la carnicería. El primer mes compran 10 kg de carne de pollo, 6kg de carne de cerdo y 3kg de carne de ternera y le sobran 3,1€. El segundo me compra 10 kg de pollo, 7 kg de cerdo y 2kg de carne de ternera y le sobran 5,1€. El tercer mes compra 11 kg de carne de pollo, 6 kg de carne de cerdo y 2kg de ternera abonando 72€ y 30 céntimos. Suponiendo que no ha variado el precio de la carne en los meses calcular el precio por kg de las tres carnes.

x=precio pollo/kg; y=precio cerdo/kg; z=precio ternera/kg

$$\begin{cases} 10x+6y+3z=80-3.1 \\ 10x+7y+2z=80-5.1 \\ 11x+6y+2z=72.3 \end{cases} \longrightarrow A^*=\begin{pmatrix} 10 & 6 & 3 & 76.9 \\ 10 & 7 & 2 & 74.9 \\ 11 & 6 & 2 & 72.3 \end{pmatrix};\ A=\begin{pmatrix} 10 & 6 & 3 \\ 10 & 7 & 2 \\ 11 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

|A|=-19$\neq 0$→ rang(A)=rang(A*)=n SCD (Teorema de Rouche-Frobenius).

Regla de Cramer: $x=\frac{\begin{vmatrix} 76.9 & 6 & 3 \\ 74.9 & 7 & 2 \\ 72.3 & 6 & 2 \end{vmatrix}}{-19}=2.5$ $y=\frac{\begin{vmatrix} 10 & 76.9 & 3 \\ 10 & 74.9 & 2 \\ 11 & 72.3 & 2 \end{vmatrix}}{-19}=5.1$ $z=\frac{\begin{vmatrix} 10 & 6 & 76.9 \\ 10 & 7 & 74.9 \\ 11 & 6 & 72.3 \end{vmatrix}}{-19}=7.1$

2.5€/kg el pollo, 5.1€/kg el cerdo y 7.1€/kg la ternera.