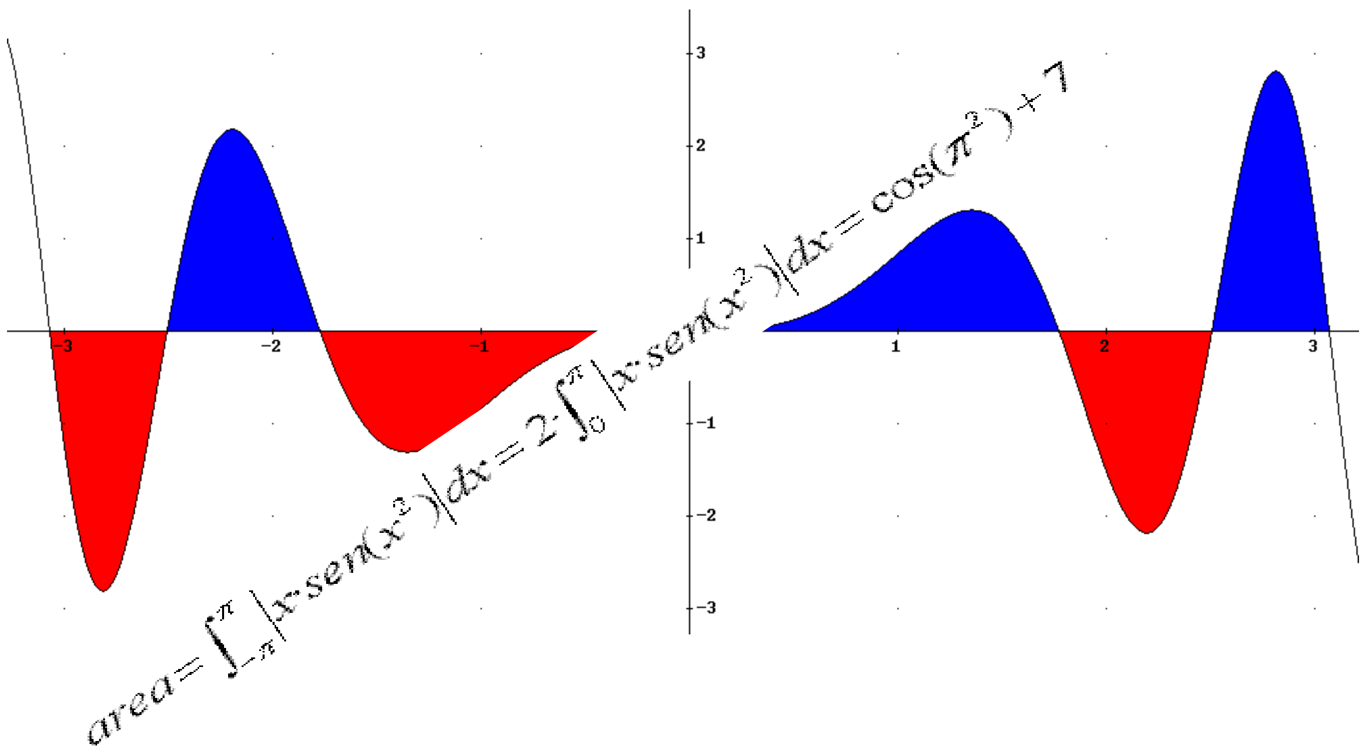
Matemáticas II
(preparación para la PAU)
Tomo II (Integrales y Álgebra)



José Luis Lorente Aragón

A mi mujer, Ruth, y a mi hijo David.

Muchas gracias al corrector, el otro José L. Lorente

ÍNDICE:

BLOQUE I. ANÁLISIS

BLOQUE II. ÁLGEBRA LINEAL

BLOQUE III. GEOMETRÍA

UNIDAD 11. ESPACIOS VECTORIALES.

Contexto con la P.A.U.

Éste es un tema que aunque en el índice se ha incluido en el Bloque de Álgebra lineal, podría también incluirse en el Bloque de Geometría. Pretende así sentar las bases teóricas de los dos siguientes temas.

Aunque en los exámenes de matemáticas de PAU no suele haber ningún ejercicio relacionado con este tema he considerado importante incluirlo, tanto por estar en el temario de la asignatura como por su importancia en las carreras de índole tecnológica como ingenierías, matemáticas, químicas o físicas.

.

1. Espacios vectoriales

1.1. Definición.

***Definición 1**:* Sea V un conjunto; se llama operación interna de V a una aplicación que nos relaciona dos elementos de V con otro de V. El ejemplo más utilizado es el de la suma:

$$+: V\text{x}V \longrightarrow V$$
$$u, v \longrightarrow u+v$$

Ejemplo: sea $V=R^2$ el conjunto de los vectores en el plano($R^2=\{(x,y): x,y\in R\}$);veamos como la suma de vectores en el plano es una operación interna:

$$+: R^2\text{x } R^2 \longrightarrow R^2$$
$$\vec{u}=(x,y), \vec{v}=(x',y') \longrightarrow \vec{u}+\vec{v}=(x+x', y+y')$$

***Definición 2**:* Sea V un conjunto, se llama operación externa de V sobre R a una aplicación que nos relaciona un elemento de V y otro de R con otro de V. El ejemplo más utilizado es el del producto escalar:

$$\cdot: R\text{x}V \longrightarrow V$$
$$\lambda, v \longrightarrow \lambda\cdot v$$

***Ejemplo**:* sea R^2 el conjunto de los vectores en el plano, veamos como el producto de un escalar y un vector en el plano es una operación externa:

$$\cdot: R\text{x } R^2 \longrightarrow R^2$$
$$\lambda, \vec{v}=(x,y) \longrightarrow \lambda\vec{v}=(\lambda x, \lambda y)$$

Definición**:* Un conjunto V es un ***espacio vectorial sobre R si cumple:

1. Tiene una operación interna (suma) tal que cumple las siguientes propiedades:

   $\forall$ u,v,w$\in$V

   $$+: V\text{x}V \longrightarrow V$$

   i) conmutativa: u+v=v+u
   ii) asociativa (u+v)+w=u+(v+w)
   iii) elemento neutro:existe un elemento de V,que denotamos 0,tal que u+0=u
   iv) elemento opuesto: para todo elemento u existe otro, -u, tal que u+(-u)=0

2. Tiene una operación externa (producto escalar) tal que cumple las siguientes propiedades: $\forall\lambda, \mu\in R$, $\forall u,v\in V$

   $$\cdot: R\text{x}V \longrightarrow V$$

   i) Distributiva con R: $(\lambda+\mu)\cdot u=\lambda\cdot u+\mu\cdot u$
   ii) Distributiva con V: $\lambda(u+v)=\lambda\cdot u+\lambda\cdot v$
   iii) Asociativa: $(\lambda\cdot\mu)\cdot u=\lambda\cdot(\mu\cdot u)$
   iv) Elemento neutro: $1\cdot u=u$

Al conjunto V, con las anteriores operaciones y propiedades se le denomina espacio vectorial, y se representa por la terna **(V, +, ·$_R$).** Los elementos pertenecientes a V se les llama ***vectores***, siendo ***escalares*** los pertenecientes a R (se suelen utilizar las letras griegas minúsculas).

1.2. Ejemplos de Espacios Vectoriales

En este apartado vamos a ver varios ejemplos de espacios vectoriales. El origen de la estructura matemática del espacio vectorial son el conjunto de los vectores en el plano, R^2, y el conjunto de los vectores en el espacio, R^3, tantas veces utilizados en la física (velocidad, aceleración, posición…), si bien existen muchos otros espacios vectoriales como veremos a continuación.

1. Conjunto de los vectores en el plano con las operaciones de la suma de vectores y el producto escalar $(R^2,+,\cdot_R)$. Demostración

   1. Operación interna: $\vec{u}=(x,y)$, $\vec{v}=(x',y')$, $\vec{w}=(x'',y'')$

   $$+: R^2 x\, R^2 \longrightarrow R^2$$
   $$\vec{u}=(x,y),\vec{v}=(x',y') \longrightarrow \vec{u}+\vec{v}=(x+x',y+y')$$

      i) Conmutativa: $\vec{u}+\vec{v}=(x+x',y+y')=(x'+x,y'+y)=\vec{v}+\vec{u}$

      ii) Asociativa: $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=((x+x')+x'',(y+y')+y'')=$ $=(x+(x'+x''),y+(y+y'))=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

      iii) Elemento neutro: $\vec{u}+\vec{0}=(x,y)+(0,0)=(x,y)=\vec{u}$

      iv) Elemento opuesto: $\vec{u}+(-\vec{u})=(x,y)+(-x,-y)=(0,0)=\vec{0}$

   2. Operación externa:

   $$\cdot: R x\, R^2 \longrightarrow R^2$$
   $$\lambda,\vec{v}=(x',y') \longrightarrow \lambda\cdot\vec{v}=(\lambda\cdot x,\lambda\cdot y)$$

      i) Distributiva en R:

      $$(\lambda+\mu)\vec{u}=((\lambda+\mu)\cdot x,(\lambda+\mu)\cdot y)=(\lambda\cdot x+\mu\cdot x,\lambda\cdot y+\mu\cdot y)=\lambda(x,y)+\mu(x,y)=\lambda\cdot\vec{u}+\mu\cdot\vec{u}$$

      ii) Distributiva en R^2:

      $$\lambda\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\lambda(x+x',y+y')=(\lambda(x+x'),\lambda(y+y'))=\lambda\cdot(x,y)+\lambda\cdot(x',y')=\lambda\vec{u}+\lambda\cdot\vec{v}$$

      iii) Asociativa: $(\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{u}=((\lambda\cdot\mu)\cdot x,(\lambda\cdot\mu)\cdot y)=\lambda\cdot(\mu\cdot x,\mu\cdot y)=\lambda\cdot(\mu\cdot\vec{u})$

      iv) Elemento neutro $1\cdot\vec{u}=1\cdot(x,y)=(x,y)=\vec{u}$

2. El conjunto de los vectores en el espacio, $R^3=\{(x,y,z):x,y,z\in R\}$ con las operaciones de la suma de vectores y el producto escalar $(R^3,+,\cdot_R)$.

   Demostración: La demostración es equivalente a la vista par los vectores en el plano, con la salvedad de que hay que añadir una coordenada más.

3. El conjunto de los polinomios con grado $\leq$ n con coeficientes reales, $P_n(R)$, con las operaciones de la suma de polinomios y el producto escalar $(P_n(R),+,\cdot_R)$.

   Demostración:

   1. Operación interna: $p(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$; $q(x)= a_n'x^n+\ldots+a_1'x+a_0'$,

      $$h(x)= a_n''x^n+\ldots+a_1''x+a_0''$$

      $$+: Pn(R)xPn(R) \longrightarrow Pn(R)$$
      $$p(x),q(x) \longrightarrow p(x)+q(x)=(a_n+a_n')x^n+\ldots+(a_0+a_0')$$

      i) Conmutativa: $p(x)+q(x)= (a_n+a_n')x^n+\ldots+(a_0+a_0')=$
      $$=(a_n'+a_n)x^n+\ldots+(a_0'+a_0)=q(x)+p(x)$$

      ii) Asociativa: $(p(x)+q(x))+h(x)= ((a_n+a_n')+a_n'')x^n+\ldots+((a_0+a_0')+a_0'')=$
      $$=(a_n+(a_n'+a_n''))x^n+\ldots+(a_0+(a_0'+a_0''))=p(x)+(q(x)+h(x))$$

      iii) Elemento neutro: $p(x)+0(x)=(a_n+0)x^n+\ldots+(a_0+0)= a_nx^n+\ldots+a_0=p(x)$

      iv) Elemento opuesto: $p(x)+(-p(x))= (a_n- a_n)x^n+\ldots+(a_0+0)= 0\cdot x^n+\ldots+0=0(x)$

4. El conjunto de las matrices en cualquier dimensión, $M_{nxm}(R)$, con las operaciones de la suma y del producto escalar $(M_{nxm}(R),+,\cdot_R)$. Demostración:

La demostración es trivial, aplicando las propiedades de la suma y el producto de números reales en cada coeficiente de las matrices. A realizar por el alumno en casa.

Ejercicio 1: decir si son espacios vectoriales los siguientes conjuntos con las operaciones indicadas.

a) Las matrices cuadradas con operación interna el producto de matrices y el producto escalar, como operación externa

b) R^2 con el producto escalar como operación externa y la siguiente suma como operación interna:

$$\oplus: R^2xR^2 \longrightarrow R^2$$
$$(x,y),(x',y') \longrightarrow (x+x'-(y+y'),0)$$

a) Veamos si el conjunto de las matrices cuadradas con el producto de matrices como operación interna es espacio vectorial:

1. Operación interna: $\cdot: M_{nxn}(R)x\ M_{nxn}(R) \longrightarrow M_{nxn}(R)$

$$A, B \longrightarrow A\cdot B$$

i) Conmutativa A·B≠B·A (por lo general las matrices no conmutan), luego no es espacio vectorial con el producto como operación interna (sí es espacio cuando la operación interna es la suma de matrices, como vimos).

b) Veamos si R^2, con la suma anteriormente definida como operación interna, es espacio vectorial:

1. Operación interna:

i) Conmutativa: tenemos que ver si se cumple que $u \oplus v = v \oplus u$:

$$\vec{u} \oplus \vec{v} = (x + x' - (y + y'), 0)$$
$$\|$$
$$\vec{v} \oplus \vec{u} = (x' + x - (y' + y), 0)$$

ii) Asociativa: tenemos que ver si $(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$:

$$(\vec{u} \oplus \vec{v}) \oplus \vec{w} = (x + x' - (y + y'), 0) \oplus (x'', y'') = ((x + x') + x'' - ((y + y') + y''), 0)$$
$$\|$$
$$\vec{u} \oplus (\vec{v} \oplus \vec{w}) = (x, y) \oplus (x' + x'' - (y' + y''), 0) = (x + (x' + x'') - (y + (y' + y'')), 0)$$

iii) Elemento neutro: no existe, pues sea cual sea este vector, nos anula la segunda coordenada del vector. Veamos, suponiendo que el elemento neutro es (0,0): $\vec{u} \oplus \vec{0} = (x + 0 - (y + 0), 0) = (x - y, 0) \neq \vec{u}$

Luego no es espacio vectorial el conjunto de los vectores en el plano con la suma $\oplus$ como operación interna.

2. Subespacio vectorial

2.1. Definición

***Definición**: Sea (V,+,$\cdot_R$) un espacio vectorial y W un subconjunto de V (W⊆V). Se dice que W es subespacio vectorial de V si W, con las operaciones definidas en (V,+,$\cdot_R$), se comporta como un espacio vectorial, es decir, cumple las propiedades definidas en apartado anterior.

En la práctica no es necesario volver a comprobar nuevamente las diferentes propiedades de las operaciones interna y externa sobre W. Veamos una condición necesaria y suficiente en el siguiente subaparatado.

2.2. Condición suficiente y necesaria

Teorema: Sea (V,+,$\cdot_R$) un espacio vectorial y W un subconjunto de V (W⊆V); (W,+,$\cdot_R$) es subespacio vectorial de V si cumple las siguientes proposiciones:

1) $\forall$ u,v $\in$ W → u+v$\in$ W (cerrado con la suma).
2) $\forall$u$\in$ V, $\forall\lambda\in$ R→ λ·u$\in$ W (cerrado con el producto escalar).

Ejemplo: Estudiar cuales de los siguientes subconjuntos de R^2 son subespacios vectoriales

a) S={(0,y): y∈R}

1. ∀ $\vec{u}$=(0,y), $\vec{v}$=(0,y')∈S → $\vec{u}+\vec{v}=(0,y+y')\in$ S, pues y+y'∈R y la primera coordenada es nula

2. ∀ $\vec{u}$ =(0,y)∈S, ∀λ∈R → λ· $\vec{u}$ =(0,λ·y)∈S, pues λ·y∈R y la primera coordenada es nula

Es subespacio, al cumplir las dos condiciones.

b) T={(x,1): x∈R}

1. ∀ $\vec{u}$ =(x,1), $\vec{v}$ =(x',1)∈T → $\vec{u}+\vec{v}=(x+x',2)\notin$ T, pues la segunda coordenada no es 1.

No es subespacio, pues no cumple la primera condición.

c) A={(x,y):x+y=0}, se puede expresar de la siguiente forma: A={(x,-x):x∈R}.

1. ∀ $\vec{u}$ =(x,-x), $\vec{v}$ =(x',-x')∈A → $\vec{u}+\vec{v}=(x+x',-(x+x'))\in A$ pues la segunda coordenada es la opuesta a la primera.

2. ∀ $\vec{u}$=(x,-x)∈A, ∀λ∈R → λ·$\vec{u}$=(λ·x,-λ·x)∈A, pues la segunda coordenada es la opuesta a la primera.

Es subespacio al cumplir las dos condiciones.

Ejercicio 2*:* Decir si los siguientes subconjuntos son o no subespacios vectoriales

a) Matrices simétricas de dimensión n, $S_n(R)$ subespacio vectorial de las matrices cuadradas de dimensión n ($M_{nxn}(R),+,\cdot_R$).

1. ∀A,B∈$S_n(R)$→ $A=a_{ij}=A^t=a_{ji}$ $B=b_{ij}=B^t=b_{ji}$

$$\begin{matrix} C=c_{ij}=A+B=a_{ij}+b_{ij} \\ C^t=(A+B)^t=c_{ji}=a_{ji}+b_{ji} \end{matrix} \quad \text{como } a_{ij}=a_{ji} \text{ y } b_{ij}=b_{ji} \quad C=C^t \rightarrow A+B\in S_n(R)$$

2. ∀λ∈R, ∀A∈$S_n(R)$→ $D=d_{ij}=\lambda\cdot A=\lambda\cdot a_{ij}=\lambda\cdot a_{ji}=d_{ji}$→$(\lambda\cdot A)=(\lambda\cdot A)^t$→λ·A∈$S_n(R)$

Es subespacio vectorial ($S_n(R),+,\cdot_R$)

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ $\quad 3\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & 24 \\ 24 & -3 \end{pmatrix}$

(Iden matrices antisimétricas)

b) Matrices triangulares inferiores de dimensión n, $T^i_n(R)$ subespacio vectorial de las matrices cuadradas de dimensión n ($M_{nxn}(R),+,\cdot_R$).

A∈ $T^i_n(R)$ →a_{ij}=0 j>i (los elemento encima de la diagonal son nulos)

1. ∀A,B∈$T^i_n(R)$:$C=c_{ij}=A+B=a_{ij}+b_{ij}=0$ si j>i pues $a_{ij}=b_{ij}=0$ → A+B∈$T^i_n(R)$

2. ∀A∈ $T^i_n(R)$ y ∀λ∈R: $D=d_{ij}=\lambda A=\lambda a_{ij}=0$ i>j pues $a_{ij}=0$ → λA∈ $T^i_n(R)$

Es subespacio vectorial ($T^i_n(R),+,\cdot_R$) (Iden triangulares superiores).

c) El conjunto de polinomios de grado menor o igual que m, $P_m(R)$, es subespacio vectorial del conjunto de polinomios con grado menor o igual que n , $P_n(R)$,(n>m).

1. $\forall$ p(x), $q(x)\in P_m(R)\rightarrow p(x)+q(x)\in P_m(R)$ (sumando polinomios de grado menor que m el resultado es otro polinomio de grado menor que m)
2. $\forall$ $p(x)\in P_m(R)$ $\forall\lambda\in R\rightarrow$ $\lambda p(x)\in P_m(R)$ (el producto de un polinomio por un nº real es otro polinomio de mismo grado)

Ejercicio 3. Decir si son subespacios vectoriales de $(R^3,+,\cdot_R)$

a) $A=\{(x,y,0): x,y\in R\}\rightarrow$**Subespacio**

1. $\forall(x,y,0),(x',y',0)\in A\rightarrow(x,y,0)+(x',y',0)=(x+x', y+y',0)\in A$, pues la tercera coordenada es nula y la primera y la segunda son reales.
2. $\forall(x,y,0)\in A,\forall\lambda\in R\rightarrow\lambda(x,y,0)=(\lambda x,\lambda y,0)\in A$, pues la tercera coordenada es nula y la primera y la segunda son reales.

b) $B=\{(x,y,-x-y): x,y\in R\}\rightarrow$**Subespacio**

1. $\forall$ $(x,y,-x-y), (x',y',-x'-y')\in B\rightarrow(x,y,-x-y)+ (x',y',-x'-y')=$

   $=((x+x'),(y+y'),-(x-y-x'-y'))\in B$ pues la tercera coordenada es la opuesta a la suma de las dos primeras coordenadas

2. $\forall(x,y,-x-y)\in B$, $\forall\lambda\in R\rightarrow\lambda(x,y,-x-y)= (\lambda x,\lambda y,\lambda(-x-y))\in B$ pues la tercera coordenada es la opuesta a la suma de las dos primeras coordenadas

c) $C=\{(x,2x,3x): x\in R\}\rightarrow$**Subespacio**

1. $\forall$ $(x,2x,3x), (x',2x',3x')\in C\rightarrow$ $(x,2x,3x)+(x',2x',3x')=$

   $=((x+x'),2(x+x'),3(x+x'))\in C$ pues la segunda coordenada es el doble de la primera y la tercera el triple de la primera

2. $\forall$ $(x,2x,3x)\in C$, $\forall\lambda\in R$: $\lambda(x,2x,3x)=(\lambda x,2\lambda x,3\lambda x)\in C$, pues la segunda coordenada es el doble de la primera y la tercera el triple de la primera

d) $D=\{(x,y,z):x+y=3,x,y,z\in R\}=\{(x,3-x,z):x,z\in R\}\rightarrow$**No es Subespacio**

1. $(x,3-x,z), (x',3-x',z')\in D$ $\rightarrow$ $(x,3-x,z)+ (x',3-x',z')=$

$=(x+x',6-(x+x'),z+z')\notin D$, pues la 2ª coordenada no es como la del subespacio.

e) $E=\{(x,y,z): x\cdot z=3\ x,y,z\in R\}=\{(x,y,3/x) :x,y\in R\}\rightarrow$**No es Subespacio**

1. $\forall(x,y,3/x),(x',y',3/x')\in E$: $(x,y,3/x)+ (x',y',3/x')=$

   $=(x+x',y+y',3/x+3/x')\notin D$. $\rightarrow$ Pues $3/x+3/x'\neq 3/(x+x')$

f) $F=\{(x,y,z):x=y^2\ x,y,z\in R\}=\{(y^2,y,z):y,z\in R\}\rightarrow$**No es Subespacio**

1. $\forall$ (y^2,y,z), $(y'^2,y',z')\in F$: $(y^2,y,z)+(y'^2,y',z')=(y^2+y'^2,y+y',z+z')\notin F$, pues $(y+y')^2\neq y^2+y'^2$

3. Combinación lineal. Sistema Generador.

Definición: Un vector $v \in V$ es ***combinación lineal*** de los vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ si se puede escribir de la siguiente forma:

$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$ con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in R$

Ejemplos:

1. $(7,3) \in R^2$ es combinación lineal de los vectores $\{\overrightarrow{u_x} = \vec{i} = (1,0),\ \overrightarrow{u_y} = \vec{j} = (0,1)\}$:

   $(7,3)=7(1,0)+3(0,1)$ $\lambda_1=7,\ \lambda_2=3$

2. $(2,2,-5) \in R^2$ es combinación lineal de los vectores, $\{(1,1,0)$ y $(0,0,1)\}$:

   $(2,2,-5)=2(1,1,0)-5(0,0,1) \rightarrow \lambda_1=2,\ \lambda_2=-5$

3. $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$:

   $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1=5, \lambda_2=-2, \lambda_3=3, \lambda_4=4$

4. $p(x)=3+2x+5x^2$ es combinación lineal de $\{-2+2x,\ 1+x^2\}$:

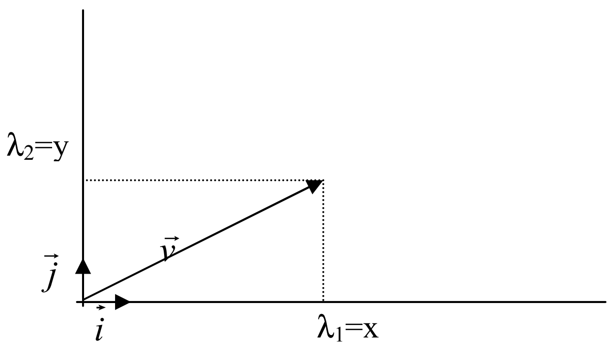
   $p(x)=3+2x+5x^2=1\cdot(-2+2x)+5\cdot(1+x^2)$ $\lambda_1=1,\ \lambda_2=5$

Definición: un conjunto de vectores $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de un espacio vectorial $(V,+,\cdot_R)$, es ***sistema generador*** de V si cualquier vector del espacio V se puede escribir como combinación lineal de éstos.

Ejemplos:

1. Los vectores $\{\overrightarrow{u_x} = \vec{i} = (1,0),\ \overrightarrow{u_y} = \vec{j} = (0,1)\}$ generan el espacio vectorial R^2. Demostración:

   $\forall\ \vec{v} = (x,y) \in R^2$ veamos que es combinación lineal de estos dos vectores: $(x,y)=x(1,0)+y(0,1) \rightarrow \lambda_1=x,\ \lambda_2=y$



2. Los vectores $\{\overrightarrow{u_x} = \vec{i} = (1,0,0), \overrightarrow{u_y} = \vec{j} = (0,1,0), \overrightarrow{u_z} = \vec{k} = (0,0,1)\}$ son generadores de R^3. Demostración:

   $\forall\ \vec{v} = (x,y,z) \in R^3$ veamos que es combinación lineal de estos dos vectores: $(x,y,z)=x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1) \rightarrow \lambda_1=x,\ \lambda_2=y,\ \lambda_3=z$.

3. Los vectores (1,1,0), (0,0,1) no generan R^3 pues, por ejemplo, el vector (2,1,3) no se puede expresarse como combinación lineal de estos, ya que no existen valores de λ_1, λ_2 tal que $(2,1,3)=\lambda_1(1,1,0)+\lambda_2(0,0,1)=(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2)$. Veamos:

   $$\left.\begin{array}{l} 2=\lambda_1 \\ 1=\lambda_1 \end{array}\right\} \text{No solución pues } 2\neq 1.$$
   $$1=\lambda_2$$

   Los vectores (1,1), (0,1) si son generadores de R^2:

   $\forall\ \vec{v}=(x,y)\in R^2$ veamos que es combinación lineal de estos dos vectores: $(x,y)=\lambda_1(1,1)+\lambda_2(0,1)\rightarrow$

   $$\left.\begin{array}{l} \lambda_1=x \\ \lambda_1+\lambda_2=y \end{array}\right\} \quad \lambda_1=x,\ \lambda_2=y-x \rightarrow (x,y)=x(1,1)+(y-x)(0,1)$$

4. Las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ son generadores de $M_{2x2}(R)$.

   Demostración:

   $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema 1: Un conjunto de vectores $\{v_1,\ldots,v_m\}$ es generador del espacio $(V,+,\cdot)$, si el rango de la matriz $B=(v_1,\ldots,v_m)$ es igual a la dimensión del espacio vectorial (qué se definirá en el apartado 5 de este tema).

***Ejemplo**:* Demostrar, que si los siguientes vectores {(1,2,3), (0,1,-2), (0,0,1), (1,1,-2)} generan R^3.

Como se demostrará en el apartado 5, la dimensión de R^3 es 3. Veamos si el rango de B es igual a la dimensión:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow rang(B)=3 \rightarrow \text{Generan}$$

Ejercicio 4: Decir si generan los siguientes vectores de R^3 {(1,1,0), (0,1,1), (1,0,-1)}

Tendremos que ver si para cualquier vector $v=(x,y,z)\in R^3$ comprobaremos si es posible ponerla como combinación lineal de los tres vectores:

$$(x,y,z)=\lambda_1(1,1,0)+\lambda_2(0,1,1)+\lambda_3(1,0,-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\lambda_1+\lambda_3 \\ y=\lambda_1+\lambda_2 \\ z=\lambda_2-\lambda_3 \end{array}\right\}$$

Tendrá solución para cualquier valor de x,y,z si el sistema es compatible; es decir, si rang(B)=3.

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \rightarrow \text{rang}(B)=2 \rightarrow \text{No generan.}$$

4. Dependencia e independencia lineal.

***Definición**:* Los vectores $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ son linealmente dependientes si podemos encontrar números reales, λ_i, tal que:

$$\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\ldots+\lambda_n v_n=0 \text{ en donde al menos un } \lambda_i\neq 0$$

***Definición**:* Los vectores $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ son linealmente independientes si no son linealmente dependientes; es decir, si cumple la siguiente igualdad

$$\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\ldots+\lambda_n v_n=0 \text{ sólo cierta cuando } \lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0 \text{ (solución trivial)}$$

***Teorema 2**:* Si los vectores $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ son linealmente dependientes, entonces, cualquiera de ellos se puede expresar como combinación lineal del resto. Si son linealmente independientes ninguno de ellos se podrá expresar como combinación lineal del resto.

$\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ L.D. $\rightarrow$ $v_i=\mu_1 v_1+\ldots+\mu_{i-1}v_{i-1}+\mu_{i+1}v_{i+1}+\ldots+\mu n v_n$

$\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ L.I. $\rightarrow$ v_i no se puede expresar como combinación lineal del resto.

***Teorema 3**:* Los vectores $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ son linealmente independientes si el rango de la matriz $B=(v_1,\ldots,v_n)$ es igual al nº de vectores, n, (rang(B)=n). En el caso de que sea menor, entonces, son linealmente dependientes

$\text{rang}((v_1,v_2,\ldots,v_n))=n \rightarrow$ L. I.

$\text{rang}((v_1,v_2,\ldots,v_n))<n \rightarrow$ L. D.

***Ejemplos**:*

1. (1,2), (1,4), (1,0) veamos si son L.I. o L.D. :

$\lambda_1(1,2)+\lambda_2(1,4)+\lambda_3(1,0)=(0,0)$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\\ 2\lambda_1+4\lambda_2=0\end{array}\right\}$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 0\end{pmatrix}$$

$\lambda_1=2$, $\lambda_1=-1$, $\lambda_3=1$ es solución. *Linealmente dependientes.*

Teorema 1: (1,4)=2(1,2)-(1,0)

Teorema 2: Es un sistema homogéneo compatible indeterminado(rang(B)=2)

2. (1,0,1), (1,2,0), (0,1,1) veamos si son L.D. o L.I.:

$\lambda_1(1,0,1)+\lambda_2(1,2,0)+\lambda_3(0,0,1)=(0,0,0)$.

$$\left.\begin{array}{r}\lambda_1+\lambda_2=0\\2\lambda_2+\lambda_3=0\\\lambda_1+\lambda_3=0\end{array}\right\} B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

Tenemos que la única solución es $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ →*linealmente independiente*, ya que el sistema es compatible determinado.

Teorema 1: $(1,0,1)\neq\mu_1(1,2,0)+\mu_2(0,0,1)$

Teorema 2: rang(B)=3.

3. $\{1, x^2, x^2+1\}$ veamos son L.D. o L.I.

$\lambda_1\cdot 1+\lambda_2\cdot x^2+\lambda_3\cdot(x^2+1)=0+0x+0x^2$

$$\left.\begin{array}{r}\lambda_1+\lambda_3=0\\0=0\\\lambda_2+\lambda_3=0\end{array}\right\} B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

El sistema es compatible indeterminado; una solución distinta de la trivial es $\lambda_1=1$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=-1$. *Linealmente dependiente*

Teorema 1: $x^2+1=1\cdot 1+1\cdot x^{2\leq}$

Teorema 2: rang(B)=2.

Ejercicio 5: ver si son L.D. o L.I.

a) (1,0,0), (2,0,0), (0,3,1)→ $\lambda_1(1,0,0)+\lambda_2(2,0,0)+\lambda_3(0,3,1)=(0,0,0)$

$$\left.\begin{array}{r}\lambda_1+2\lambda_2=0\\3\lambda_3=0\\\lambda_3=0\end{array}\right\} B=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&3\\0&0&1\end{pmatrix}$$

La solución es $\lambda_3=0$ y $\lambda_1=-2\lambda_2$, luego existe alguna solución distinta de la trivial ($\lambda_1=-2$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=0$). *Linealmente dependiente.*

Nota: Siempre que en el conjunto de vectores haya dos iguales o proporcionales (como los dos primeros), el sistema es linealmente dependiente

Teorema 1: (2,0,0)=2(1,0,0)+0(0,3,1)

Teorema 2: rang(B)=2

b) (1,2,1), (0,1,0), (0,0,1) → $\lambda_1(1,2,1)+\lambda_2(0,1,0)+\lambda_3(0,0,1)=(0,0,0)$

$$\left.\begin{array}{r}\lambda_1=0\\ 2\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_1+\lambda_3=0\end{array}\right\} B=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

La única solución es $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$, luego los vectores son *linealmente independientes*.

Teorema 1: $(1,2,1)\neq\mu_1(0,1,0)+\mu_2(0,0,1)$

Teorema 2: rang(B)=3.

c) (2,1,3), (1,2,-1) → $\lambda_1(2,1,3)+\lambda_2(1,2,-1)=(0,0,0)$

$$\left.\begin{array}{r}2\lambda_1+\lambda_2=0\\ \lambda_1+2\lambda_2=0\\ 3\lambda_1-\lambda_2=0\end{array}\right\} B=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\\3&-1\end{pmatrix}$$

Única solución es $\lambda_1=\lambda_2=0$. Los vectores son *linealmente independiente*

Teorema 1: $(2,1,3)\neq\mu(1,2,-1)$

Teorema 2: rang(B)=2=nº vectores

d) (1,2,5), (0,0,0), (4,-1,2) → $\lambda_1(1,2,5)+\lambda_2(0,0,0)+\lambda_3(4,-1,2)=(0,0,0)$

$$\left.\begin{array}{r}\lambda_1+4\lambda_3=0\\ 2\lambda_1-\lambda_3=0\\ 5\lambda_1+2\lambda_3=0\end{array}\right\} B=\begin{pmatrix}1&0&4\\2&0&-1\\5&0&2\end{pmatrix}$$

Tiene infinitas soluciones, $\lambda_1=\lambda_3=0$ y $\forall\lambda_3\in R$. Por ejemplo una solución no trivial puede ser $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=1$. Luego los vectores son *linealmente dependientes.*

Nota: Siempre que uno de los vectores sea el vector nulo, el conjunto de vectores es linealmente dependiente

Teorema 1: $(0,0,0)=0\cdot(1,2,5)+0\cdot(4,-1,2)$

Teorema 2: rang(B)=2.

Ejercicio 6: ver si son L.D. o L.I.

a) $\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$ → $\lambda_1\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{r}\lambda_1+\lambda_2=0\\ 2\lambda_1=0\\ \lambda_3=0\\ \lambda_2+\lambda_3=0\end{array}\right\} B=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Tiene única solución $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. Luego el conjunto de vectores (matrices) son linealmente independientes.

Teorema 1: $\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 0\end{pmatrix}\neq\mu_1\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}+\mu_2\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$

Teorema 2: rang(B)=3

b) $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & -1\\0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}+\lambda_4\begin{pmatrix}3 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r}\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_4=0\\ -\lambda_2-\lambda_3=0\\ \lambda_2+\lambda_4=0\\ \lambda_1+\lambda_3=0\end{array}\right\} B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\0 & -1 & -1 & 0\\0 & 1 & 0 & 1\\1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Tiene infinitas soluciones (|B|=0), por ejemplo $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=\lambda_4=-1$. Luego el conjunto de las 4 matrices son *linealmente dependientes*.

Teorema 1: $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}3 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$

Teorema 2: rang(B)=3

5. Base de un espacio vectorial. Teorema de la Base

***Definición**:* Dado un conjunto de vectores $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ en un espacio vectorial $(V,+,\cdot_R)$ forman una base si cumplen las dos siguientes condiciones:

1. linealmente independientes
2. sistema generador de V

Teorema de la base: Todas las bases de un espacio vectorial V tienen el mismo número de vectores. Al número de vectores se le llama ***dimensión*** del espacio vectorial.

Ejemplos:

1. $(R^2,+,\cdot_R)$ es espacio vectorial de dimensión 2, pues {(1,0), (0,1)}son base al ser linealmente independientes y generan. A d*emostrar por el alumno*
2. $(R^3,+,\cdot_R)$ es espacio vectorial de dimensión 3, pues {(1,0,0), (0,0,1), (0,0,1)}son base, al ser linealmente independientes y generar. *A demostrar por el alumno*

3. $(M_{mxn}(R),+,\cdot_R)$ es espacio vectorial de dimensión m·n. Ejemplo $M_{2x2}(R)$ dimensión 4, pues $\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\}$ son base al ser linealmente independiente y generar. *A demostrar por el alumno*
4. $P_n(R)$ es un espacio vectorial de dimensión n+1, pues $\{1,x,x^2,\ldots,x^n\}$ son base al generar y ser linealmente independientes. *A demostrar por el alumno*

Teorema 4*:* Si un conjunto de n vectores $\{v_1, \ldots, v_n\}$es base de $(V,+,\cdot_R)$, siendo la dimensión de V igual a n :

a) Se cumple que si son linealmente independientes, entonces son generador de V; y al revés, si generan son linealmente independientes.

b) Se cumple que si son linealmente dependientes, entonces no generan V; y al revés, si no generan son linealmente dependientes.

De esta manera, para ver si un conjunto de n vectores en un espacio de dimensión n es una base, sólo hay que comprobar que son linealmente independientes o generan; no hará falta comprobar las dos condiciones. Por lo general es más fácil ver que son L.I.

Teorema 5*:* Un conjunto de vectores $\{v_1, \ldots, v_n\}$ constituye una base si la matriz $B=(v_1,\ldots,v_n)$ es cuadrada (mismo nº vectores que la dimensión) y su determinante $|B|\neq 0$ (linealmente independientes).

Teorema 6*:* Si el conjunto de vectores $\{v_1, \ldots, v_m\}$pertenece al espacio vectorial $(V,+,\cdot_R)$ de dimensión n<m, entonces estos vectores son linealmente dependientes.

Teorema 7*:* Si el conjunto de vectores $\{v_1, \ldots, v_m\}$ pertenece al espacio vectorial $(V,+,\cdot_R)$ de dimensión n>m, entonces estos vectores no generan a V.

Ejercicio 7: Comprobar si los siguientes vectores son linealmente independientes, generan y si son base de sus respectivos espacios vectoriales.

a) {(1,2), (1,4), (5,3)}→ son tres vectores en un espacio vectorial de dimensión 2, luego los vectores son linealmente dependientes, y por lo tanto no son base.

Veamos si generan; para eso estudiemos el rango de B

$B=\begin{pmatrix}1&1&5\\2&4&3\end{pmatrix}$ → rang(B)=2 → Generan

b) {(1,0), (2,0)}→ son dos vectores al igual que la dimensión de R^2, pude suceder:

a) Son base y, por lo tanto, linealmente independientes y generan.

b) No son base y, por lo tanto, linealmente dependientes y no generan.

Para ver en qué caso nos encontramos miramos el determinante de B.

$\begin{vmatrix}1&2\\0&0\end{vmatrix}=0$ →estamos en el caso b) linealmente dependientes y no generan

c) {(1,1), (5,0)}→ son dos vectores, igual que la dimensión de R^2, estamos en el mismo caso que en b). Veamos en este caso en qué situación nos encontramos:

|B|=-5→Luego son base y por tanto linealmente independientes y generadores.

d) {(1,2,0), (0,1,0)}→ son dos vectores en un espacio vectorial de dimensión 3, luego no son generadores, y por lo tanto, tampoco son base.

Es fácil de ver que son linealmente independientes, ya que los dos vectores no son proporcionales. Otro método es ver el rango de B:

Rang(B)=2=numero de vectores→ linealmente independientes.

e) {(1,0,1), (2,1,1), (0,0,-1)}→ son 3, igual a la dimensión. Por lo tanto estamos en la misma situación que en b). Serán base o no según el valor de |B|:

$|B|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$ → son base de R^3, por lo tanto, generan y son linealmente independientes.

f) $\{1+x, 1-x^2, -x+2x^2\}$ base de $P_2(R)$ → son 3 vectores en un espacio vectorial de dimensión 3. Veamos si son base calculando |B|

$|B|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-3\neq 0$→ son base de $P_2(R)$ y, por lo tanto, generan y son linealmente independientes.

g) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\right\}$ base de $M_{2x2}(R)$→ son 4 matrices en un espacio pectoral de dimensión 4; veamos si son base viendo el valor de |B|

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-7\neq 0$ → son base de $M_{2x2}(R)$

6. Coordenadas de un vector.

Teorema 8: Sea B={v_1, v_2, …, v_n} una base del espacio vectorial $(V,+,\cdot_R)$; entonces todo vector $u\in V$ se puede escribir de *forma única* como combinación lineal de los vectores B.

$u=\mu_1 v_1+\ldots+\mu_n v_n$. Los valores $(\mu_1,\mu_2, \ldots,\mu_n)$ se llaman ***coordenadas*** de u en la base B.

Ejemplos:

Ver las coordenadas del vector $\vec{u}=(1,3,-4)$

a) en la base canónica {(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)}:

(1,3,-4)=1(1,0,1)+3(0,1,0)-4(0,0,1)→ las coordenadas 1,3-4.

b) en la base B={(1,0,1), (2,0,-1), (0,3,0)}

(1,3,-4)=μ_1(1,0,1)+μ_2(2,0,-1)+μ_3(0,3,0)

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \mu_1 + 2\mu_2 \\ 3 &= 3\mu_3 \\ -4 &= \mu_1 - \mu_2 \end{aligned}\right\} \mu_1=-7/3,\ \mu_2=5/3,\ \mu_3=1$$

Luego las coordenadas en la base B son μ_1=-7/3, μ_2=5/3, μ_3=1

Matriz de cambio de base, B, y cambio de base inversa, B^{-1}: Dada una base W={v_1,v_2,…,v_n}, la matriz B es la formada por las coordenadas de los vectores de W. Así, cada columna de B es un vector de W→ B=(v_1,…,v_n). Estas matrices nos permiten obtener de forma rápida:

1. B→ las coordenadas de la base canónica cuando nos dan las coordenadas en otra base
2. B^{-1}→ las coordenadas en una base dada cuando tenemos el vector definido en la base canónica.

$$\{\text{Base W}\} \underset{B^{-1}}{\overset{B}{\rightleftarrows}} \{\text{Base canónica}\}$$

Ejemplo: W={(1,0,1), (1,1,0), (0,0,1)}

$$B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix} \quad B^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

Sea $\vec{v}_w=(3,4,5)_w$ un vector de R^3 en coordenadas de W; el valor de $\vec{v}$ en coordenadas canónicas es :

$$\vec{v}=\left(\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right)^t=\begin{pmatrix}7\\4\\8\end{pmatrix}^t=(7,4,8)=3(1,0,1)+4(1,1,0)+5(0,0,1)$$

Obtener las coordenadas de la base canónica en la base de W:

$$(\vec{u}_x)_w=\left(\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)^t=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}^t=(1,0,-1)_w=1(1,0,1)-1(0,0,1)=(1,0,0)$$

$$(\vec{u}_y)_w = \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)^t = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^t = (-1,1,1)_w = -1(1,0,1)+1(1,1,0)+1(0,0,1)=(0,1,0)$$

$$(\vec{u}_z)_w = \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^t = (0,0,1)_w = 1(0,0,1)$$

Obtener las coordenadas de $\vec{u} = (3,0,2)$ en la base W:

$$\vec{u}_w = \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)^t = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}^t = (3,0,-1)_w$$

Ejercicio 8: Sea el espacio vectorial $P_3(R)$; demostrar que $W=\{1,(x-1),(x-1)^2,(x-1)^3\}$ es base. Calcular las coordenadas de $p(x)=4-x+x^3$ en dicha base.

Como el número de "vectores" de W es 4, será base si son linealmente independientes. Esto ocurre si $|B|\neq 0$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad |B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(triangular)$$

Luego W es base de $P_3(R)$. La matriz B es la matriz de cambio de base de W a la base canónica. Para obtener las coordenadas de p(x) en la base W tendremos que calcular B^{-1}

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p(x)_W = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^t = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}^t = (4,2,3,1)_w = 4\cdot 1 + 2\cdot(x-1) + 3\cdot(x-1)^2 + 1\cdot(x-1)^3$$

Ejercicios:

Espacios vectoriales

Ejercicio 9. Decir si los siguientes conjuntos con sus operaciones son espacios vectoriales.

a. El conjunto de las matrices cuadradas, $M_{nxn}(R)$, con las siguientes operaciones:

   Interna→ $\oplus$: $M_{nxn}(R) \times M_{nxn}(R) \longrightarrow M_{nxn}(R)$

   $A,B \longrightarrow A\oplus B=(A+B)^t$

   Externa→ el producto escalar de un número por una matriz

b. El conjunto de los vectores en el espacio, R^3, con las siguientes operaciones:

   Interna: producto vectorial→ $\otimes$: $R^3 x R^3 \longrightarrow R^3$

   $(x,y,z),(x',y',z') \longrightarrow (yz'-zy',zx'-xz',xy'-yx')$

   Externa: el producto escalar un número por un vectores

Subespacios vectoriales

Ejercicio 10. Decir si son subespacios vectoriales

a. $A=\{p(x)=a_0+a_2x^2: a_0,a_2\in R\}$ subespacio de $P_2(R)$
b. $B=\{(x,-x,1/x): x\in R\}$ subespacio de R^3
c. D_n={matrices diagonales} subespacio de M_{nxn}

Ejercicio 11. Hallar las bases y la dimensión de los siguientes subespacios de R^3

a. $S=\{(x,y,z): x-2z=0, x,y,z\in R\}$
b. $T=\{(x,0,2x): x\in R\}$

Ejercicio 12. Hallar el valor de b para que el vector (1,b,-1) pertenezca al subespacio generado por los vectores {(1,2,0), (2,-1,5)}. Hallar la forma general de este subespacio.

Combinación lineal, generadores, base. Coordenadas

Ejercicio 13. Decir si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes, generadores y base.

c. {(1,2,-1), (0,-1,3), (1,1,1), (-3,0,0)} de R^3
d. $\{1+x, x+x^2, x^2\}$ de $P_2(R)$
e. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ de M_{2x2}

Ejercicio 14. Hallar los valores de x que hacen que los siguientes vectores{(x,2,0), (2x,6x,10), (3,x,15)} sean linealmente independientes

Ejercicio 15. Estudia el conjunto de vectores de R^3 W={(1,2,3),(0,2,4), (0,2,0)} forma base de R^3. En caso afirmativo expresa en esta base las coordenadas de (1,1,1)

Soluciones:

Ejercicio 9.

a.) Tenemos que comprobar que la operación interna definida cumple las siguientes propiedades: $\forall A,B,C\in M_{2x2}(R)$

i. Conmutativa: $A\oplus B=(A+B)^t=A^t+B^t=B^t+A^t=(B+A)^t=B\oplus A$

ii. Asociativa: $(A\oplus B)\oplus C=(A^t+B^t)\oplus C=(A^t+B^t)^t+C^t=(A+B)+C^t$

$$A\oplus(B\oplus C)=A\oplus(B^t+C^t)=A^t+(B^t+C^t)^t=A^t+(B+C)$$

No se cumple la propiedad asociativa, luego no es espacio vectorial.

b) Tenemos que comprobar que la operación interna definida cumple las siguientes propiedades: $\forall\ \vec{u},\vec{v},\vec{w}\in R^3$

i. Conmutativa: $\vec{u}x\vec{v}=$(yz'-zy',zx'-xz',xy'-yx')

$$\vec{v}x\vec{u}=(y'z-z'y,z'x-x'z,x'y-y'x)=-\vec{u}x\vec{v}\neq\vec{u}x\vec{v}$$

No se cumple la propiedad conmutativa, luego no es espacio vectorial.

Ejercicio 10

a.) Veamos si cumple las dos siguientes propiedades $\forall p(x),\ q(x)\in A,\ \forall\lambda\in R$

i. $p(x)+q(x)=a_0+a_0'+(a_2+a_2')\cdot x^2\in A$, pues tiene el término independiente y el de segundo grado.

ii. $\lambda\cdot p(x)=\lambda\cdot a_0+\lambda\cdot a_2x^2\in A$ pues tiene el término independiente y el de segundo grado.

Es subespacio

b.) $\forall\ \vec{u},\vec{v}\in B\ \forall\lambda\in R$; veamos si se cumple las dos propiedades

i. $\vec{u}+\vec{v}=(x+x',-(x+x'),\frac{1}{x}+\frac{1}{x'})\notin B$, pues $\frac{1}{x}+\frac{1}{x'}\neq\frac{1}{x+x'}$

No es subespacio.

c.) $\forall A,B\in D_n(R)\ \forall\lambda\in R$; veamos si se cumple las dos propiedades:

$A=a_{ij}=0$ si $i\neq j$, $B=b_{ij}=0$ si $i\neq j$

i. $C=c_{ij}=A+B=a_{ij}+b_{ij}=0$ si $i\neq j\rightarrow A+B\in D_n(R)$

ii. $D=d_{ij}=\lambda\cdot A=\lambda\cdot a_{ij}=0$ si $i\neq j\rightarrow\lambda\cdot A\in D_n(R)$

Es subespacio.

Ejercicio 11

a) S={(x,y,z): x-2z=0, x,y,z∈R}={(2z,y,z): y,z∈R}

Todo vector de S se puede poner como combinación lineal de (2,0,1), (0,1,0): (2z,y,z)=z·(2,0,1)+y·(0,1,0) ∀ y,z∈R. La dimensión es 2 (2 parámetros libres) La base se consigue dando valores a las variables (tantos como la dimensión)→

y=0, z=1 (2,0,1)

y=1,z=0 (0,1,0)

b) T={(x,0,2x): x∈R}

Todo vector de S se puede poner como combinación lineal de (1,0,2): (x,0,2x)=x·(1,0,2), x∈R. Dimensión 1 (1 parámetro libre). La base se consigue dando valores a las variables (tantos como la dimensión), x=1→ (1,0,2) base de T

Ejercicio 12

(1,b,-1) ∈ <(1,2,0), (2,-1,5)>→ (1,b,-1)=λ_1(1,2,0)+λ_2(2,-1,5)

$$\left.\begin{array}{l} 1=\lambda_1+2\lambda_2 \\ -1=5\lambda_2 \end{array}\right\}\lambda_2=-\frac{1}{5}\ ,\ \lambda_1=\frac{7}{5}$$

(1,b-1)= $\frac{7}{5}$(1,2,0) $-\frac{1}{5}$(2,-1,5)=(1, 3,-1). Luego b=3

Llamaremos B al subespacio B={x(1,2,0)+y(2,-1,5)=(x+2y,2x-y,5y) x,y∈R}

Ejercicio 13

a) {(1,2,-1), (0,-1,3), (1,1,1), (-3,0,0)} son vectores de R^3, cuya dimensión es 3, luego no pueden ser linealmente independientes, y por lo tanto, son linealmente dependientes.

Para ver si son generadores tenemos que estudiar el rango de la matriz B. Si el rango es 3 entonces serán generadores.

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ rang(B)=3, luego son generador de R^3.

b) {1+x, x+x^2, x^2}. La dimensión de P_2(R) es 3, igual que el número de vectores. Pueden ocurrir dos cosas:

1) Son linealmente independientes y generadores, luego base

2) Son linealmente dependientes y no generan, luego no son base.

Para ver en cuál de los dos casos estamos veamos el valor del determinante de B.

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$, det(B)=1, luego estamos en el caso 1 .

c) $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\right\}$, la dimensión es 4, igual que el número de matrices, luego, al igual que en el apartado anterior, tenemos que ver si el determinante de los coeficientes es distinto de cero.

$$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix} \qquad |B|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 3\end{vmatrix}=3\neq 0.$$

Las matrices son linealmente independientes y generadores, y por lo tanto base.

Ejercicio 14

{(x,2,0), (2x,6x,10), (3,x,15)} linealmente independiente si el determinante de los coeficientes es distinto de cero.

$$|B|=\begin{vmatrix}x & 2x & 3\\ 2 & 6x & x\\ 0 & 10 & 15\end{vmatrix}=20(4x^2-3x+3)\neq 0 \rightarrow x\neq\frac{3\pm\sqrt{9-48}}{8}\notin \mathbb{R}.$$

Luego, independientemente del valor de x, los vectores son linealmente independientes, y por lo tanto base.

Ejercicio 15

W={(1,2,3),(0,2,4), (0,2,0)}, son base ya que el determinante de B es distinto de cero.

$$|B|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 2\\ 3 & 4 & 0\end{vmatrix}=-8\neq 0 \rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -3/4 & 0 & 1/4\\ -1/4 & 1/2 & -1/4\end{pmatrix}$$

$$(1,1,1)=\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -3/4 & 0 & 1/4\\ -1/4 & 1/2 & -1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\right)^t=\begin{pmatrix}1\\ -1/2\\ 0\end{pmatrix}^t=(1,-1/2,0)_w$$

UNIDAD 12. ECUACIONES DE RECTA Y PLANO

Contexto con la P.A.U.

Entramos con este tema en el último bloque del libro, la geometría. La importancia de este bloque en la PAU queda de manifiesto año tras año. En los últimos años uno de los dos problemas de 2.5 puntos de cada una de las dos opciones es un problema de geometría.

Entramos en el bloque cuyos problemas quizás sean los más complicados del curso, ya que en muchos casos se requieren una buena visión espacial y de buscar estrategias para resolver los problemas. Si bien en muchas ocasiones, y casi todas las cuestiones son "problemas tipo", como los que vamos a hacer en estos dos temas. Una vez entendido el problema, y elaborada la estrategia de resolución los cálculos son sencillos, no como los vistos en el bloque de análisis.

1. Introducción. Espacio Afín

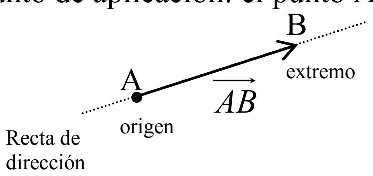
1.1. Vector en el espacio. Vector libre y fijo.

Como hemos estudiado en el tema anterior el conjunto de los vectores del espacio, con las operaciones de la suma de vectores y el producto escalar de vector por un número es espacio vectorial. De hecho la definición matemática de espacio vectorial surge para interpretar las propiedades de las magnitudes físicas vectoriales (velocidad, aceleración, fuerza…)

Así $(R^3,+,\cdot)$ es espacio vectorial, donde $R^3=\{(x,y,z)\colon x,y,z\in R\}$. El conjunto de los elementos que forman parte de R^3 se llaman vectores en el espacio. Dentro de los vectores distinguiremos entre vectores fijos y libres:

a. ***Vector fijo*** de origen A y extremo B, es el segmento orientado caracterizado por tener las siguientes partes:

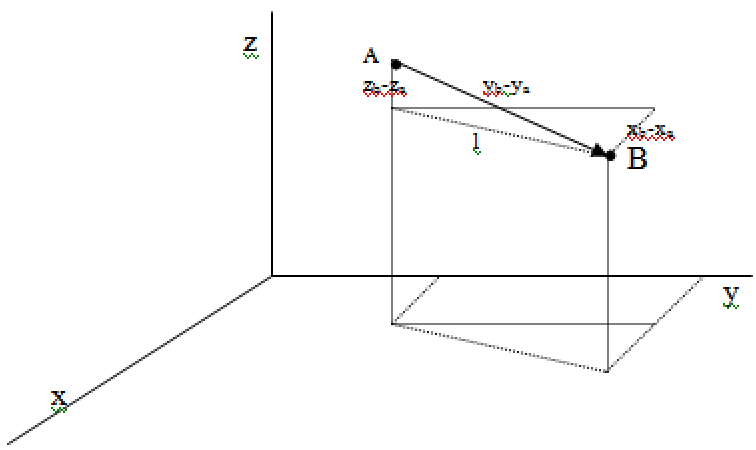
- Dirección: es la recta que une los dos puntos o cualquiera paralela
- Sentido: es la orientación que tiene, desde A hasta B
- Modulo: es la longitud del segmento orientado
- Punto de aplicación: el punto A



Coordenadas de vector fijo: Si $A(x_a,y_a,z_a)$, $B(x_b,y_b,z_b)$ son las coordenadas de los puntos que forman el vector, las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ son las que se obtiene restando las coordenadas de B menos las de A:

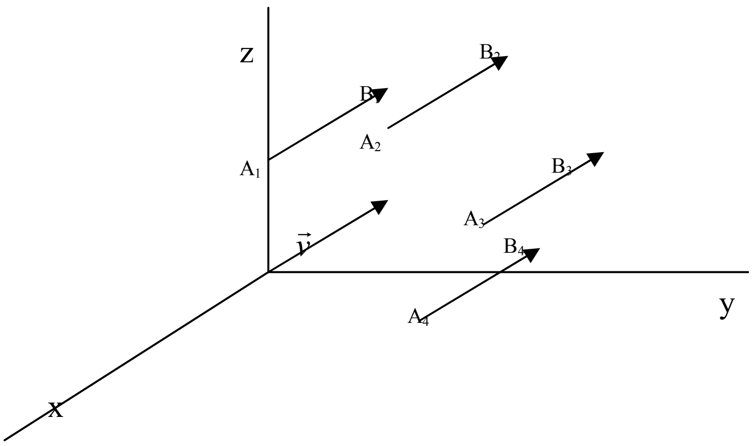
$$\overrightarrow{AB}=B-A=(x_a,y_a,z_a)-(x_b,y_b,z_b)=(x_b-x_a,\ y_b-y_a,\ z_b-z_a)$$

Módulo del vector: es igual a la distancia entre A y B. Utilizando Pitágoras tendremos que $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{l^2+(z_b-z_a)^2}=\sqrt{(x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2+(z_a-z_b)^2}$



b. ***Vector libre:*** Sean los vectores con igual módulo, dirección (situadas en rectas paralelas) y sentido ($\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$, $\overrightarrow{A_3B_3}$ …), estos vectores se llaman ***equipolentes***. Todos los vectores equipolentes tienen mismas las coordenadas.

El conjunto de todos los vectores equipolentes a uno dado definen un vector libre $\vec{v}$. Se suele representar como el vector fijo equipolente situado en el origen.



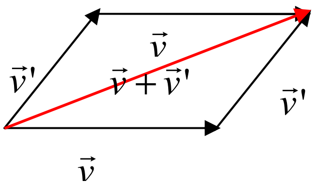
1.2. Operaciones con vectores libres

Veamos las operaciones más importantes con los vectores.

1.Suma

Es la operación interna desde el punto de vista de espacio vectorial. La suma de dos vectores $\vec{v}+\vec{v}'$=(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z')

La interpretación geométrica de esta operación puede verse como el vector que resulta de prologar $\vec{v}'$ al extremo de $\vec{v}$, o por la regla del paralelogramo:



Puedes imaginarlo viendo la fuerza resultante de otras dos fuerzas (que son vectores) con distinta dirección (por ejemplo dos caballos arrastrando una barca cada uno por una orilla).

2.Producto escalar

Es la operación externa desde el punto de vista de espacio vectorial. El producto de un vector $\vec{v}$ por una constante λ es: $\lambda\cdot\vec{v}=\lambda\cdot(x,y,z)=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$.

La interpretación gráfica es tal que si:

a) $\lambda>0$ es un vector con la misma dirección, sentido y con módulo $|\lambda\vec{v}|=|\lambda||\vec{v}|$

b) $\lambda<0$ es un vector con la misma dirección, sentido contrario y módulo $|\lambda\vec{v}|=|\lambda||\vec{v}|$

c) $\lambda=0$ el vector nulo (0,0,0)

1.3. Dependencia e independencia lineal. Base.

El concepto de linealmente independiente y dependiente es el mismo que el estudiado en el tema anterior. Así como el de base.

Recordemos que la dimensión de R^3 es 3, así que el número de vectores que forman la base sería de 3.

Al ser de dimensión 3, el número máximo de vectores linealmente independientes es 3, de manera que si tenemos 4 o más vectores, seguro que son linealmente dependientes.

Tres vectores son linealmente independientes si cumplen alguno de los siguientes requisitos:

a) $\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2+\lambda_3\vec{v}_3=0$ unica solución la trivial $\rightarrow\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$

b) $\vec{v}_1\neq\mu_2\vec{v}_2+\mu_3\vec{v}_3$, $\vec{v}_2\neq\mu_1\vec{v}_1+\mu_3\vec{v}_3$, $\vec{v}_3\neq\mu_1\vec{v}_1+\mu_2\vec{v}_2$

c) $\text{rang}(\begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix})=3$

Dos vectores son linealmente independientes si cumplen alguno de los siguientes requisitos:

a) $\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2=0$ $\lambda_1=\lambda_2=0$

b) $\vec{v}_1\neq\mu_2\vec{v}_2$, $\vec{v}_2\neq\mu_1\vec{v}_1$

c) $\text{rang}(\begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{pmatrix})=2$

1.4. Relación entre punto y vector. Coordenadas.

Para localizar un punto en el espacio necesitamos un sistema de referencia, es decir 3 rectas (generalmente perpendiculares) que se cortan en un punto llamado origen.

El sistema de referencia más utilizado es el ***sistema de referencia cartesiano***, este está formado por tres vectores unitarios (modulo 1) perpendiculares, que forman una base.

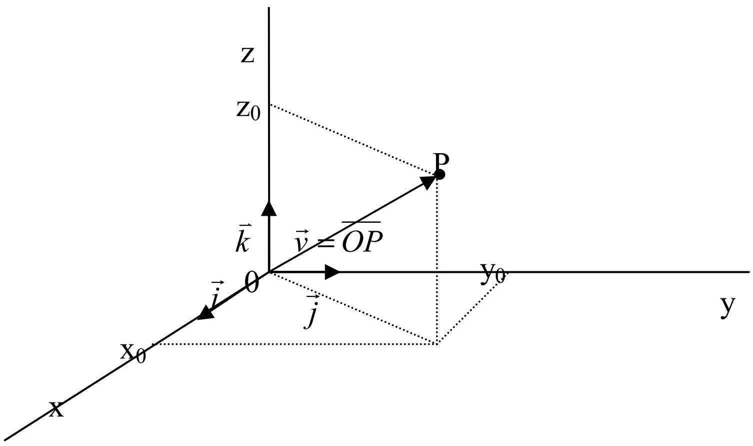
La notación usada es la siguiente: $\{0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$, siendo $\vec{i}=(1,0,0),\vec{j}=(0,1,0),\vec{k}=(0,0,1)$. En este sistema de referencia tenemos tres rectas o ejes cartesianos que contienen cada uno de los tres vectores. Estos ejes se denotan OX (eje de las x) que contiene a $\vec{i}$, OY (eje de las y) que contiene a $\vec{j}$ y OZ (eje de las Z) que contiene a $\vec{k}$.

Coordenadas en un punto y un vector:

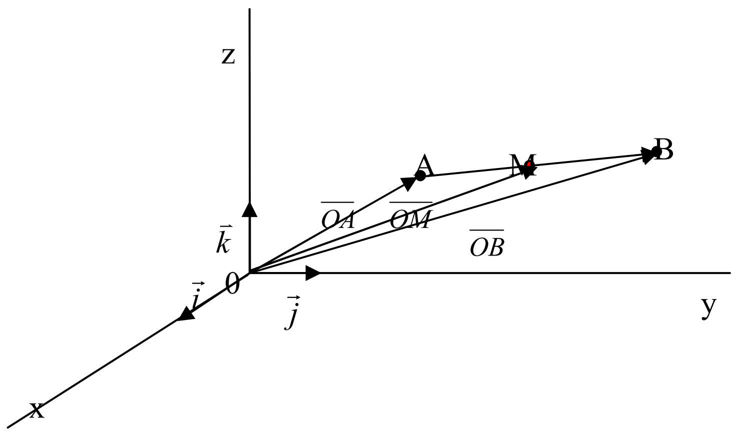
Todo punto en el espacio se puede determinar conociendo la posición que ocupan sus proyecciones sobre los ejes, es decir las coordenadas del punto. Los puntos se suelen denotar por letras mayúsculas → $P(x_0,y_0,z_0)$

Las coordenadas de un vector nos muestran el grado de avance de dicho vector en las tres direcciones del espacio, así $\vec{v}=(1,-2,0)$ implica una unidad de avance en el sentido positivo del eje X, 2 en el negativo del eje Y y no avanza en el eje Z

Se cumple que las coordenadas del punto P son las mismas que las coordenadas del vector $\vec{v}=\overline{OP}=(x_0-0,y_0-0,z_0-0)=(x_0,y_0,z_0)=x_0\vec{i}+y_0\vec{j}+z_0\vec{k}$



Coordenadas del puno medio de un segmento: Sea un segmento AB, con $A=(x_a,y_a,z_a)$ y $B=(x_b,y_b,z_b)$ los extremos del mismo. El punto medio M será el que está en el segmento y tal que la distancia de A a M sea la misma que de M a B. es decir $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$. Para ver las coordenadas de M fijémonos en la siguiente figura:



$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AM}$→ $(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)=2(x_M-x_A,y_M-y_A,z_M-z_A)$. Luego las coordenadas del punto medio son:

$$\boxed{x_M=\frac{x_B+x_A}{2},\quad y_M=\frac{y_B+y_A}{2},\ z_M=\frac{z_B+z_A}{2}}$$

Ejercicios :

Ejercicio 1.- Sean los puntos A=(2,3,5) y B=(1,0,8)

a) Hallar las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{AB} = (1-2, 0-3, 8-5) = (-1,-3,3)$ y $\overrightarrow{BA} = (2-1, 3-0, 5-8) = (1,3,-3) = -\overrightarrow{AB}$

b) Hallar dos puntos C y D tales que el vector $\overrightarrow{CD}$ sea equipolente al vector $\overrightarrow{AB}$

Tenemos que buscar dos puntos C y D tal que las coordenadas de $\overrightarrow{CD}$ sean (-1,-3,3). Fijando un punto obtendremos el otro. Por ejemplo si C=(0,0,0) D=(-1,-3,3).

c) Hallar el extremo F de un vector $\overrightarrow{EF}$ tal que sea equipolente a $\overrightarrow{AB}$, siendo E(-3,6,-9)

$\overrightarrow{EF} = (x+3, y-6, z+9) = (-1,-3,3)$ → E(-4,3,-6)

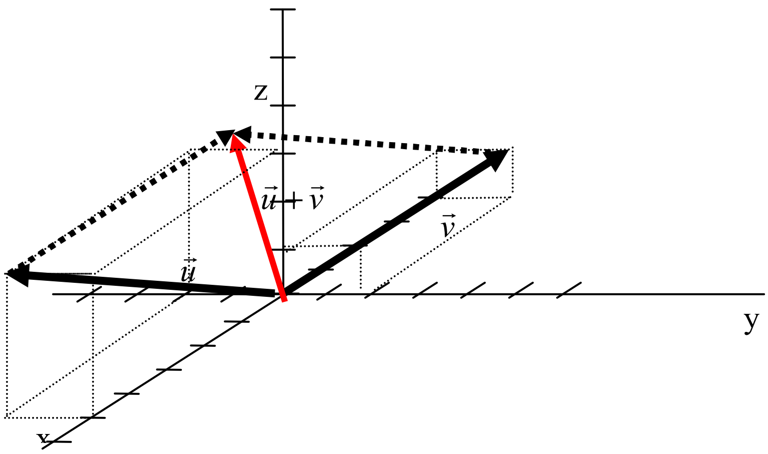
d) Halla el origen G de un vector fijo $\overrightarrow{GH}$ tal que sea equipolente a $\overrightarrow{AB}$, siendo H=(3,2,9)

$\overrightarrow{GH} = (3-x, 2-y, 9-z) = (-1,-3,3)$ → G(4,5,6)

Ejercicio 2.- Sean $\vec{u} = (5,-2,3)$ y $\vec{v} = (-4,2,1)$ dos vectores libres. Se pide:

a) Dibujar cada uno de ellos y su suma

$\vec{u} = (5,-2,3);\ \vec{v} = (-4,2,1);\ \vec{u} + \vec{v} = (1,0,4)$



b) ¿Cuál es el extremo de $\overrightarrow{AB}$ si $\overrightarrow{AB} = \vec{u} - \vec{v}$ y A=(0,2,0)?

$\overrightarrow{AB} = (x-0, y-2, z-0) = \vec{u} - \vec{v} = (5,-2,3) - (-4,2,1) = (9,-4,2)$ →B=(9,-2,2)

c) ¿Cuáles son las coordenadas del vector $2\vec{u}$ *y de* $3\vec{u} - 5\vec{v}$?

$2\vec{u} = (10,-4,6)\quad 3\vec{u} - 5\vec{v} = (15+20, -6-10, 9-5) = (35,-16,4)$

2. Ecuaciones de la recta en el espacio

Las rectas son variedades lineales de dimensión 1 (1 parámetro libre). Quedan determinadas por:

a) Un punto de la recta y un vector paralelo a ésta (vector director de la recta)

b) Dos puntos no coincidentes de la recta.

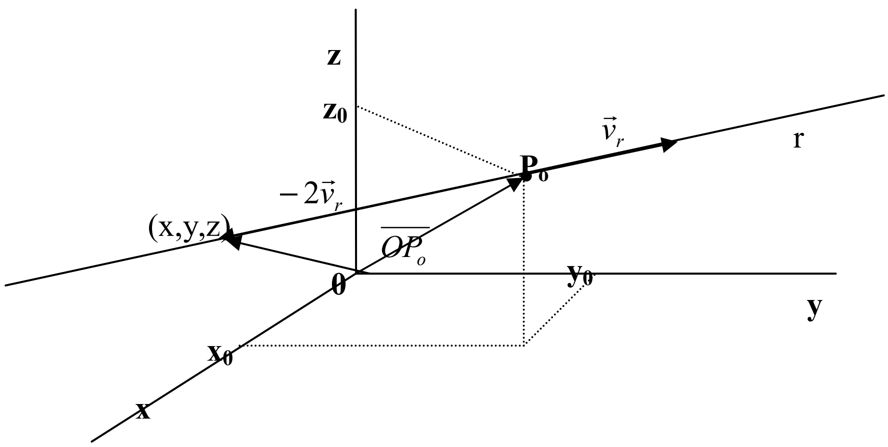
Formas de expresar la recta en el espacio:

1. Forma vectorial y cartesiana
2. Paramétricas
3. Ecuación continua
4. Ecuación general o como intersección de dos planos.

2.1. Ecuación vectorial:

Sea $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto cualquiera de la recta, y con vector director (todo vector paralelo a la recta) $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$. La ecuación vectorial de la recta es:

$\vec{x} = \overrightarrow{0X} = \overline{OP_0} + \lambda \cdot \vec{v}$, o $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \cdot (v_x, v_y, v_z)$ con λ∈R (parámetro libre).



Ejemplo del punto de la recta (x,y,x) cuando λ=-2

2.2. Ecuaciones paramétricas:

Partiendo de la ecuación vectorial, operando e igualando coordenada a coordenada,

$$r: \begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot v_x \\ y = y_0 + \lambda \cdot v_y \\ z = z_0 + \lambda \cdot v_z \end{cases} \quad \lambda \in R \text{ (parámetro libre)}$$

2.3. Ecuación en forma continua:

Despejando λ de las tres ecuaciones paramétricas e igualando, se obtiene la forma continua de la recta. $\boxed{r: \frac{x-x_0}{v_x} = \frac{y-y_0}{v_y} = \frac{z-z_0}{v_z}}$

Nota: cuando alguna o algunas de las coordenadas del vector director de la recta son nulas, la forma de representar la ecuación en continua se modifica para no dividir entre 0. Para ver como se modifica veamos el siguiente ejemplo: P(1,-4,3), $\vec{v}$=(1,-2,0)

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+4}{-2}; z = 3$$

2.4. Ecuación general o como intersección de dos planos:

Partiendo de la ecuación en forma continua, se resuelven las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} v_y(x-x_0) = v_x(y-y_0) \\ v_z(x-x_0) = v_x(z-z_0) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} Ax \quad + By \qquad\qquad = D \\ A'x \qquad\qquad + C'z \quad = D' \end{cases}}$$

Como se verá en el apartado siguiente, se corresponde con las ecuaciones de 2 planos que se cortan en esta recta. Se cumple que el vector director de la recta es perpendicular de los vectores directores de los dos planos, y se obtiene con el producto vectorial de los vectores cuyas coordenadas son los coeficientes que multiplican a x, y, z de los dos planos:

$$\vec{v} = (A, B, 0) \times (A', 0, C') = (BC' - 0 \cdot 0, 0 \cdot A - AC', A \cdot 0 - BA')$$

Como veremos existen infinitas parejas de planos cuya intersección es la misma recta.

2.5. Caso particular, conocido dos puntos de la recta:

Sean $A(x_0, y_0, z_0)$ y $B(x_1, y_1, z_1)$ dos puntos por los que pasa la recta. El vector director de la recta es $\vec{v} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$. Con el punto A y el vector director $\vec{v}$ se puede escribir de cualquier forma la recta. Por ejemplo, la forma continua:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

Ejemplo: Dada la recta $\begin{cases} x+3y-z=2 \\ 2x+y+z=1 \end{cases}$ en forma de intersección de dos planos, determina el vector director de la misma y un punto.

Vamos a expresar la recta en paramétricas, para ello tenemos que expresar dos variables en función de otra variable, podemos hacerlo por sustitución, igualación o reducción:

$\begin{cases} z=x+3y-2 \\ z=1-2x-y \end{cases} \rightarrow x+3y-2=1-2x-y \rightarrow \quad 3x+4y-3=0 \rightarrow \rightarrow x=\dfrac{-4y+3}{3}=-\dfrac{4}{3}y+1 \rightarrow$

$z=\dfrac{-4y}{3}+1+3y-2 \rightarrow$ z = $\dfrac{5y}{3}-1$. Los valores de x, z son ciertos para cualquier valor de *y*. Llamando a y=λ obtendremos la recta en paramétricas:

$$\text{r:}\begin{cases} x=1-\dfrac{4}{3}\lambda \\ y=\lambda \\ z=-1+\dfrac{5}{3}\lambda \end{cases} . \qquad \rightarrow \qquad \text{r:}\begin{cases} x=1-4\lambda \\ y=3\lambda \\ z=-1+5\lambda \end{cases} .$$

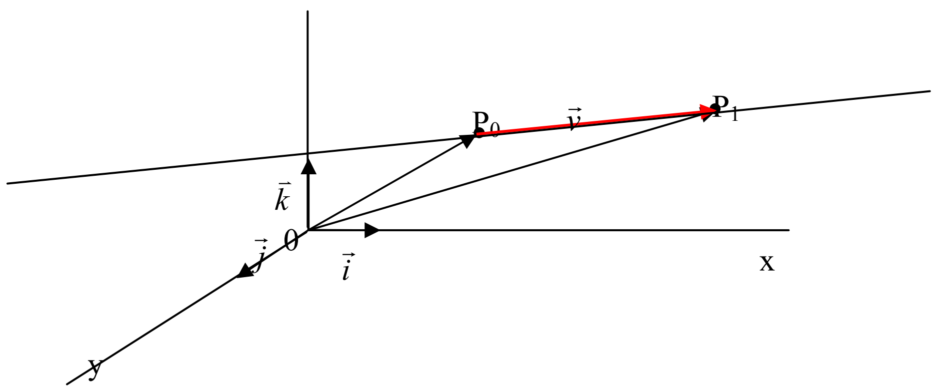
Así el vector director es $\left(\dfrac{-4}{3},1,\dfrac{5}{3}\right)$ o uno proporcional: $(-4,3,5)$. Un punto de la misma es, por ejemplo, $A(1,0,-1)$, que se obtiene haciendo que λ=0.

Comprobemos que el vector director es igual al producto vectorial de los vectores normales de los dos planos: (1,3,-1) × (2,1,1)=(3+1,-2-1,1-3·2)=(4,-3,-5), que es proporcional a $(-4,3,5)$

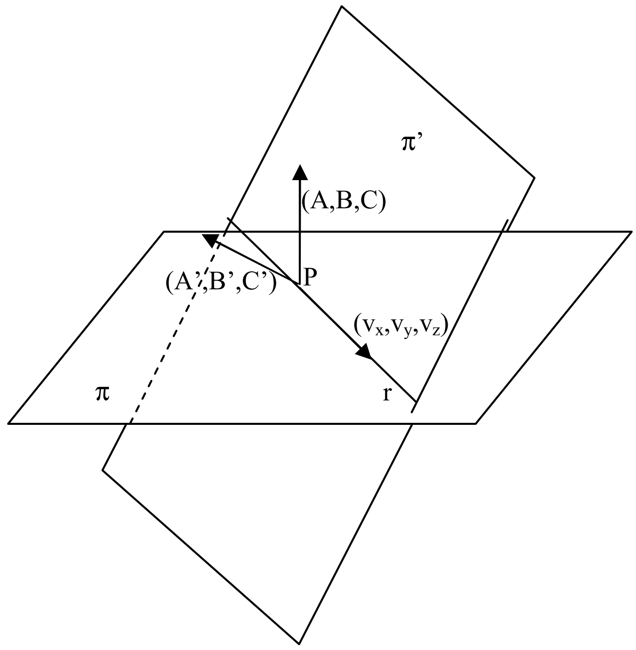
Otras 2 formas de obtener la ecuación en paramétricas son:

1) Calculando 2 puntos de la recta. Los puntos de la recta se obtienen resolviendo el sistema fijando un valor de x (o cualquiera de las variables).

2) Calculando un punto de la recta (de la forma indicada en 1) y el vector director mediante el producto vectorial de los vectores normales de los planos → v=(A,B,C) ×(A',B',C')



Gráfica de la recta como intersección por dos planos:



Ejercicio 3.- Expresa todas las ecuaciones de la recta, en todas sus formas posibles, sabiendo que pasa por el punto P_0 (1,-2,5) y tiene como vector director $\vec{v}$=(3,1,-2)

- Ecuación vectorial (x,y,z)=(1,-2,5)+λ(3,1,-2)

- Paramétricas: $\begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 5 - 2\lambda \end{cases}$

- En forma continua: $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-5}{-2}$

- General: $\begin{cases} x - 3y = 7 \\ 2x + 3z = 17 \end{cases}$

Ejercicio 4.- Expresa la ecuación de la recta en todas sus formas posibles, sabiendo que pasa por el punto P_0(1,-2,5) y por el punto P_1(-2,1,0).

A partir de los dos puntos podemos obtener un vector. Cogemos el punto P_0, y el vector $\overrightarrow{P_0P_1}$ =(-3,3,-5).

- Ecuación vectorial (x,y,z)=(1,-2,5)+λ(-3,3,-5)

- Paramétricas: $\begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = 5 - 5\lambda \end{cases}$

- En forma continua: $\frac{x-1}{-3}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-5}{-5}$

-General o intersección de dos planos: $\begin{cases} x+y=-1 \\ 5x-3z=-10 \end{cases}$

Ejercicio 5.- Hallar las ecuaciones de la recta $\begin{cases} \mathbf{2x+y+z=2\ (1)} \\ \mathbf{x-y-2z=1\ (2)} \end{cases}$ en paramétrica y continua.

En forma paramétrica: resolvemos el sistema (compatible indeterminado) en función de la variable x:

(1)+(2) => 3x-z=3 → z=-3+3x

Sustituyendo en (1)→ y=5-5x.Llamando x=λ, la ecuación en paramétricas es:

$$r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=5-5\lambda \\ z=-3+3\lambda \end{cases}$$

Un punto de la recta es cuando λ=0; P=(0,5,3), y un vector director es $\vec{v}=(1,-5,3)$

Ejercicio 6.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto P(1,2,3) y tiene como vector director $\vec{\boldsymbol{v}}=(\mathbf{6},\mathbf{5},\mathbf{4})$. Obtener 6 puntos que pertenezcan a la misma recta:

Ecuación vectorial (x,y,z)=(1+6λ,2+5λ,3+4λ)

Seis puntos:

λ=0	(1,2,3)
λ=1	(7,7,7)
λ=-1	(-5,-3,-1)
λ=2	(13,12,11)
λ=-2	(-11,-8,-5)

Ejercicio 7. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos P(1,1,0) y Q(1,0,1)

$\vec{v}=\overrightarrow{PQ}=(0,-1,1)$. Ecuación vectorial (x,y,z)=(1,1-λ,λ)

Ejercicio 8.- Estudia si los puntos A(3,-4,2), B(1,2,3) y C(-1,4,6) están alineados

La ecuación de la recta que pasa por A y B es $\frac{x-3}{1-3}=\frac{y+4}{2+4}=\frac{z-2}{3-2}$. El punto C estará alineado si pertenece a la recta, es decir, si se cumple la siguiente igualdad: $\frac{-1-3}{1-3}\neq\frac{4+4}{2+4}\neq\frac{6-2}{3-2}$. Como la igualdad no es cierta, C no pertenece a la recta que pasa por A y B, y por lo tanto, no están alineados.

Conclusión: 3 puntos están alineados si se cumple la igualdad: $\frac{x_1-x_2}{x_1-x_3}=\frac{y_1-y_2}{y_1-y_3}=\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$

Ejercicio 9.-Una recta pasa por el punto P(3,1,2) y es paralela al vector $\vec{v}$=(1,-2,3). Comprueba que los puntos (4,-1,5), (2,3-1), (6,7,4), (0,1,3) y (6,-5,11) pertenecen a esta recta

Veamos la ecuación de la recta en continuas: $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{3}$.

Los demás puntos pertenecerán a la recta si sustituyendo los valores de x, y, z de los puntos en la anterior igualdad, ésta se cumple, comprobémoslo:

(4,-1,5)→ $\frac{4-3}{1}=\frac{-1-1}{-2}=\frac{5-2}{3}$ pertenece, (2,3,-1)→ $\frac{2-3}{1}=\frac{3-1}{-2}=\frac{-1-2}{3}$ pertenece, (6,7,4)→ $\frac{6-3}{1}\neq\frac{7-1}{-2}\neq\frac{4-2}{3}$ no pertenece, (0,1,3)→ $\frac{0-3}{1}\neq\frac{1-1}{-2}\neq\frac{3-2}{3}$ no pertence

(6,-5,11)→ $\frac{6-3}{1}=\frac{-5-1}{-2}=\frac{11-2}{3}$ pertenece.

Ejercicio 10.- Expresar las siguientes recta en todas las formas que conozcas

a) $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-4}{3}$

Un punto es P(2,2,4) y el vector director $\vec{v}=(1,-1,3)$ →

· Ecuación vectorial (x,y,z)=(2+λ,2-λ,4+3λ)

· Paramétricas $\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=4+3\lambda \end{cases}$

· Continua: $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-4}{3}$

· General o intersección de dos planos: $\begin{cases} -x+2=y-2 \\ 3x-6=z-4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y+x=4 \\ 3x-z=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-y-3z=1 \\ x-3y+z=5 \end{cases}$

Vamos a ver un método distinto al visto en la teoría. Buscamos dos puntos de la recta y, a partir de los mismos, obtenemos las ecuaciones paramétricas y vectoriales.

Ejemplos: si x=1 → $\left.\begin{array}{r} -y-3z=0 \\ -3y+z=4 \end{array}\right\}$ y=-6/5, z=2/5. P(1,-6/5,2/5)

si x=0 → $\left.\begin{array}{r} -y-3z=1 \\ -3y+z=5 \end{array}\right\}$ y=-8/5, z=1/5 Q(0,-8/5,1/5)

$\vec{v}=(1-0,-6/5+8/5,2/5-1/5)$=(1,2/5,1/5)→ (5,2,1)

· Ecuación vectorial (x,y,z)=(1+5λ,-6/5+2λ,2/5+λ)

· Paramétricas $\begin{cases} x=1+5\lambda \\ y=-6/5+2\lambda \\ z=2/5+\lambda \end{cases}$

· Continua: $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+6/5}{2}=\dfrac{z-2/5}{1}$

c) $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=3+2t \end{cases}$ → Un punto es P(2,1,3) y un vector $\vec{v}=(1,-1,2)$

· Vectorial: (x,y,z)=(2+λ,1-λ,3+2λ)

· Continua $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$

· General o intersección de dos planos: $\begin{array}{r} -x+2=y-1 \\ 2x-4=z-3 \end{array} \longrightarrow \left.\begin{array}{r} y+x=3 \\ 2x-z=1 \end{array}\right\}$

Ejercicio 11.- Determinar el valor de m y n sabiendo que los puntos (1,2,0), (2,3,1) y (m,1,n) están alineados

$\dfrac{1-2}{1-m}=\dfrac{2-3}{2-1}=\dfrac{0-1}{0-n}$ → $\begin{cases} -1=-1+m \\ n=-1 \end{cases}$ → $\begin{array}{l} m=0 \\ n=-1 \end{array}$

Ejercicio 12.- Halla las ecuaciones de las medianas del triángulo de vértices A(1,1,1), B(3,5,7) y C(0,3,0)

Calculemos la mediana del vértice C (el resto de medianas se hacen de igual forma):

M_c=punto medio AB=$(\dfrac{1+3}{2},\dfrac{1+5}{2},\dfrac{1+7}{2})=(2,3,4)$.

La mediana del punto C pasa por C(0,3,0) y M_c(2,3,4):

$\vec{v}=\overrightarrow{MC}=(2-0,3-3,4-0)=(2,0,4)$ → r:(x,y,z)=(0,3,0)+λ(2,0,4)

3. Ecuaciones del plano.

Un plano ∏ es una variedad lineal de dos dimensiones, y queda determinado por:

a) Un punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ y un vector perpendicular al plano $\vec{n}_\Pi=(A,B,C)$

b) Un punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ y 2 vectores paralelos al plano $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$, $\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)$ no proporcionales. $\vec{n}_\Pi=\vec{v}\times\vec{u}$

c) Tres puntos no coolineales $P_0(x_0,y_0,z_0)$, $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$. $\vec{v}=\overrightarrow{P_0P_1}$, $\vec{u}=\overrightarrow{P_0P_2}$

Veamos las tres formas de representar un plano en el espacio:

3.1. Ecuación vectorial

La ecuación vectorial de un plano que pasa por un punto $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ y tiene 2 vectores paralelos al plano $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$, $\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)$ no proporcionales es:

$$\pi:\overrightarrow{OX}=(x,y,z)=\overrightarrow{OP_0}+\lambda\vec{v}+\mu\vec{u}=(x_0,y_0,z_0)+\lambda(v_x,v_y,v_z)+\mu(u_x,u_y,u_z)$$

3.2. Ecuaciones paramétricas

Consiste en separar la ecuación vectorial en coordenadas

$$\pi:\begin{cases} x=x_0+\lambda\cdot v_x+\mu\cdot u_x \\ y=y_0+\lambda\cdot v_y+\mu\cdot u_y \\ z=z_0+\lambda\cdot v_z+\mu\cdot u_z \end{cases}$$

3.3. Ecuación general o implícita

Eliminando λ y μ de dos de las tres ecuaciones de las paramétricas y sustituyendo en la tercera ecuación, obtenemos la ecuación general: $Ax+By+Cz=D$. Esta ecuación se obtiene de desarrollar el siguiente determinante:

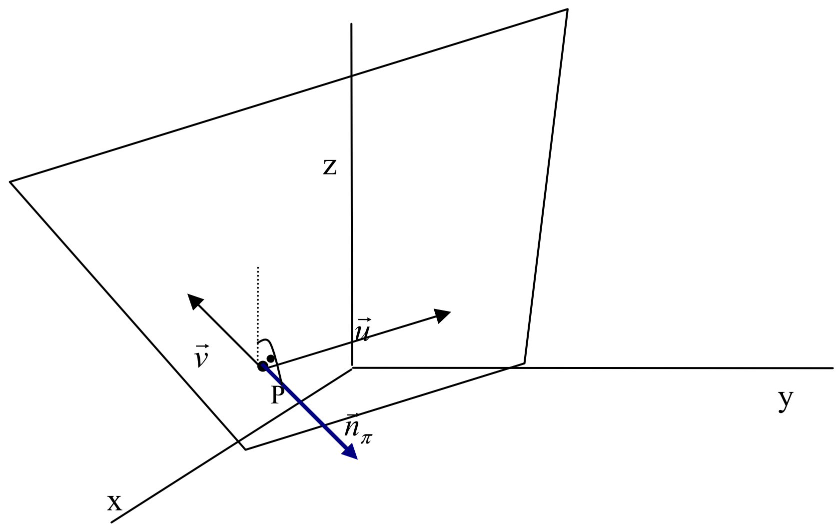
$$\pi\equiv\begin{vmatrix} x-x_0 & v_x & u_y \\ y-y_0 & v_y & u_y \\ z-z_0 & v_z & u_z \end{vmatrix}=0$$

Otra forma es obtener A, B, y C, que son las coordenadas de un vector perpendicular $\vec{v}\times\vec{u}=(A,B,C)$. Conociendo A, B y C podemos obtener D obligando a que el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pertenezca al plano: $Ax_0+By_0+Cz_0=D$.

Para conocer D también podemos calcularla a partir de la ecuación

π: $A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)+C\cdot(z-z_0)=0$

Gráfica de un plano, sus vectores directores y vector normal:



3.4. Caso particular conociendo tres puntos del plano

A partir de tres puntos no colineales del plano, podemos obtener la ecuación de la siguiente forma: Dejamos un punto fijo y obtenemos los dos vectores directores con origen el punto fijado y extremos los otros dos.

Si los puntos son P_0, P_1 y P_2 un punto del plano es P_0, y dos vectores directores $\vec{v} = \overrightarrow{P_0P_1}$ y $\vec{u} = \overrightarrow{P_0P_2}$. También podemos obtener el vector normal al plano $\vec{n}_\Pi = (A,B,C) = \overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}$

Ejemplos:

1. Expresar las ecuaciones del plano determinado por los puntos $P_0(1,2,3)$ y los vectores directores $\vec{v}$=(1,0,1) y $\vec{u}$=(1,1,0):

   - Vectorial: π : (x,y,z)=(1,2,3)+λ(1,0,1)+μ(1,1,0)

   - Paramétrica π: $\begin{cases} x = 1+\lambda+\mu \\ y = 2+\mu \\ z = 3+\lambda \end{cases}$

   - General: $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y-2 & 1 & 0 \\ z-3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ → π: x-y-z+4=0

   Otra forma $\vec{v}$ x $\vec{u}$=(1,0,1)x(1,1,0)=(-1,1,1)=(A,B,C) → π:-x+y+z+D=0

   Pasa por $P_0(1,2,3)$ → -1+2+3+D=0 → D=-4 →π:-x+y+z-4=0

2. Hallar las ecuaciones del plano que pasan por los puntos A(3,2,-1), B(0,-2,5) y C(-2,4,-1).

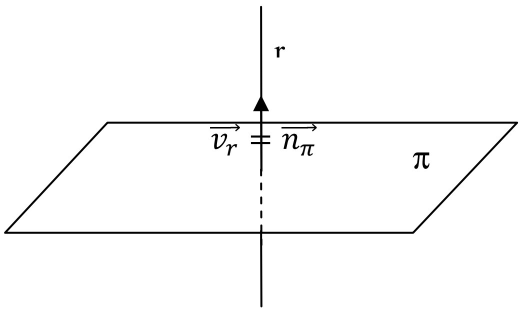
   Lo primero es obtener dos vectores directores. Dejaremos fijo el punto A(3,2,-1) y así $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-3,-4,6)$ y $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-5,2,0)$.

   - Vectorial π: (x,y,z)=(3,2,-1)+λ(-3,-4,6)+μ(-5,2,0)

   - Paramétricas π: $\begin{cases} x = 3 - 3\lambda - 5\mu \\ y = 2 - 4\lambda + 2\mu \\ z = -1 + 6\lambda \end{cases}$

   - Implícita o general: π: $\begin{vmatrix} x-3 & -3 & -5 \\ y-2 & -4 & 2 \\ z+1 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 6x + 15y + 13z - 35 = 0$

3. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto (0,0,1) y es perpendicular a la recta r: $\frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{1} = \frac{z-3}{-1}$.



   Tenemos que el vector director de la recta es (3,1,-1), que es igual al vector normal del plano $\vec{n}_\Pi$ =(3,1,-1). Luego el plano tendrá por ecuación general la siguiente expresión:

   3x+y-z+D=0. Como pasa por (0,0,1)→ 0+0-1+D=0→ D=1 y la ecuación general del plano es π: 3x+y-z+1=0

   Para ponerlo en paramétricas despejamos una variable en función de las otras dos: z=3x+y+1, llamando x=λ e y=μ obtenemos la ecuación en paramétricas:

   $$\pi : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 1 + 3\lambda + \mu \end{cases}$$

   Luego dos vectores directores son $\vec{u} = (1,0,3)$ y $\vec{v} = (0,1,1)$ (se cumple que $\vec{u} \times \vec{v} = (-3,-1,1)$ que es proporcional a $\vec{n}_\Pi$ =(3,1,-1).

4. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos P(0,1,-2), Q(2,-1,1) y tiene como vector director $\vec{u} = (1,0,3)$ Hallar otros dos puntos

   Podemos obtener el segundo vector director a partir de los dos puntos $\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (2,-2,3)$. De esta forma la ecuación vectorial es:

   π: (x,y,z)= (0,1,-2)+λ(1,0,3)+μ(2,-2,3).

Los puntos se obtienen dando valores a λ y μ. Ejemplos:

(λ=1, μ=0)→ (1,1,1); (λ=0, μ=1)→ (2,-1,1)

Ejercicio 13.- Halla la ecuación de los planos determinados por las siguientes condiciones:

a) Plano que pasa por el punto P(2,-3,5) y tiene como vectores directores $\vec{u}=(1,1,2)$ y $\vec{v}=(3,-2,1)$

π: (x,y,z)=(2,-3,5)+λ(1,1,2)+μ(3,-2,1)

b) Plano que pasa por los puntos P(3,-1,0) y Q(1,-1,3) y contiene al vector $\vec{v}=(1,2,3)$

π: (x,y,z)=(3,-1,0)+λ(1-3,-1+1,3-0)+μ(1,2,3)= (3,-1,0)+λ(-2,0,3)+μ(1,2,3)

c) Plano que pasa por los puntos A(1,2,3), B(-1,0,2), C(2,-1,0)

π: (x,y,z)=(1,2,3)+λ(-2,-2-1)+μ(1,-3,-3)

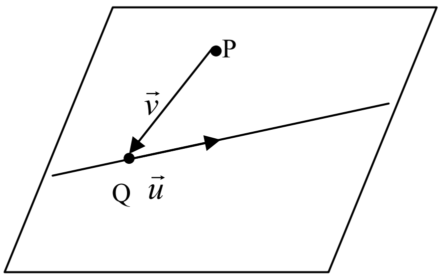
Ejercicio 14.- Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P(2,-4,0) y contiene a la recta $r: \frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-4}{3}$

Si contiene a la recta, el vector director de la misma es vector director del plano, pero todavía nos faltaría otro vector director. Podemos tomar un punto de la recta y formar otro vector director con el otro punto que nos dan (no podemos hacer lo mismo con dos puntos de la recta ya que sería un vector director proporcional al otro vector de la recta).

$\vec{v}=(1,-1,3)$

Q(2,2,4) → $\vec{u}=\overrightarrow{PQ}=(0,6,4)$

Con esto la ecuación del plano será (x,y,z)=(2,-4,0)+λ(1,-1,3)+μ(0,6,4)



Ejercicio 15.- Escribir las ecuaciones paramétricas del plano π: 3x-y+2z=10

π: 3x-y+2z=10. Tenemos que resolver la ecuación, es decir, poner una variable en función de las otras dos: y=3x+2z-10. x=λ, z=μ:

$$\pi: \begin{cases} x=\lambda \\ y=3\lambda+2\mu-10 \\ z=\mu \end{cases}$$

Ejercicio 16.- Prueba que la recta r: $\begin{cases} x - y + z = 4 \\ 3x + 3y + 7z = 6 \end{cases}$ y s: $\frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$ representan a la misma recta

Vamos a poner una expresiones en forma paramétricas y obtener 2 puntos, y si estos pertenecen a la otra recta, serán la misma recta.

$$s: \begin{cases} x = 3 + 5\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = -3\lambda \end{cases}$$

Veamos si hay dos puntos iguales en las dos rectas:

$\lambda=0 \rightarrow (3,-1,0)$ $\frac{3-3}{5} = \frac{-1+1}{2} = \frac{0}{-3}$, pertenece a las dos rectas

$\lambda=1 \rightarrow (8,1,-3)$ $\frac{8-3}{5} = \frac{1+1}{2} = \frac{-3}{-3}$, pertenece a las dos rectas

Luego son la misma recta.

Ejercicio 17.- Sean las rectas r: $\begin{cases} x = 3 - 5t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 \end{cases}$ y s: $\begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$. Halla la ecuación del plano que pasa por r y es paralelo a s. Hallar la intersección de este plano con los ejes coordenados.

Podemos obtener dos vectores directores a partir de las dos rectas, y el punto del plano ser un punto de r:

De la primera recta tenemos el vector director (-5,2,0) y el punto (3,1,3).

De la segunda recta podemos hallar el vector director a partir del producto vectorial de los vectores normales a los planos que la intersectan:

$(3,-1,1)\times(1,2,-1)=(-1,4,7)$

La ecuación vectorial es entonces π: $(x,y,z)=(3,1,3)+\lambda(-5,2,0)+\mu(-1,4,7)$

Para ver la intersección con los ejes pongamos la ecuación en forma algebraica:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-3 & -5 & -1 \\ y-1 & 2 & 4 \\ z-3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi \equiv 14x + 35y - 18z + 49 = 0$$

Corte eje X (y=z=0)$\rightarrow$ x=-49/14 (-49/14,0,0)

Corte eje Y (x=z=0)$\rightarrow$ y=-49/35 (0,-49/35,0)

Corte eje Z (x=y=0)$\rightarrow$ z=49/18 (0,0,49/18)

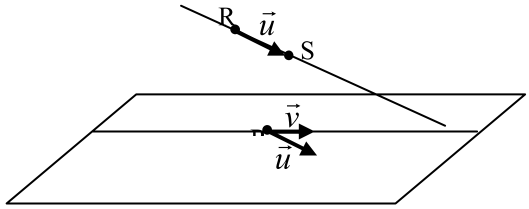
Ejercicio 18.- Halla la ecuación del plano que contiene a la recta de ecuación $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos R(2,0,0) y S(0,1,0)

La recta $r \equiv \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{1}$ pasa por P(1,1,0) y $\vec{v} = (1,2,1)$ que son, respectivamente, un punto y un vector director del plano.

El plano es paralelo al vector que pasa por los punto R(2,0,0) y S(0,1,0). Luego otro vector director del plano es el que une los dos puntos $\overrightarrow{RS} = \vec{u} = (-2,1,0)$.

A partir de los datos anteriores tenemos que el plano vendrá definido por la siguiente ecuación en paramétricas:

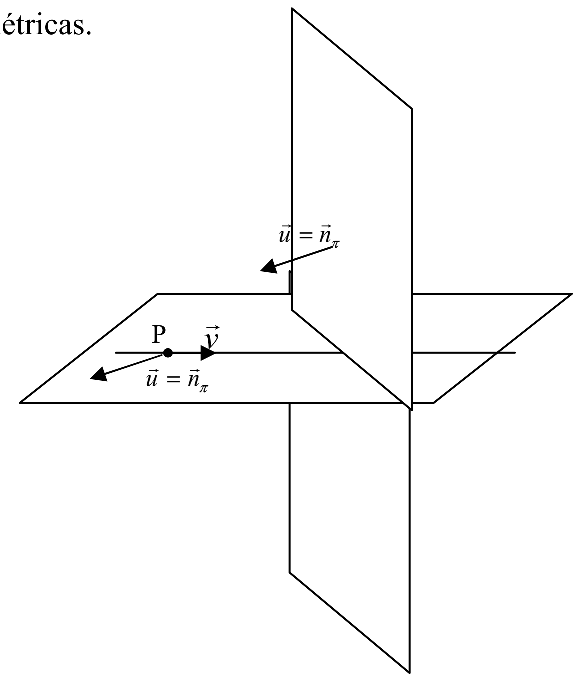
$$\Pi \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda - 2\mu \\ y = 1 + 2\lambda + \mu \\ z = \lambda \end{cases}$$



Ejercicio 19.-Dados el plano π:2x-3y+z=0 y la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$ halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular a π

$r \equiv \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$ pasa por P(1,2,-1) y $\vec{v} = (1,-1,2)$ que son respectivamente un punto y un vector director de la recta r y del plano que buscamos. Por otro lado el vector normal al plano ∏, $\vec{n}_\pi = (2,-3,1)$, es un vector director del plano que buscamos ∏', pues este vector es paralelo al plano ∏'. Luego otro vector director del plano que buscamos es $\vec{u} = \vec{n}_\pi = (2,-3,1)$. A partir de estos datos tenemos que la ecuación del plano en paramétricas.

$$\Pi' \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = 2 - \lambda - 3\mu \\ z = -1 + 2\lambda + \mu \end{cases}$$



4. Posiciones relativas

4.1. Dos planos

Sean dos planos ∏ y ∏' de ecuaciones generales:

∏≡Ax+By+CZ=D

∏'≡A'x+B'y+C'Z=D'

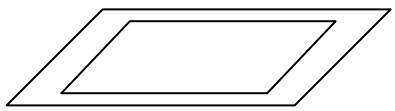
Analizar las posiciones relativas de estos planos consiste en ver si se cortan, son paralelos o coincidentes. Podemos realizar el estudio a partir del teorema de Rouche-Fröbenius, estudiando el rango de A, matriz de los coeficientes del sistema, y de A^*, matriz de la ampliada del mismo sistema.

$$A=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} \quad A^*=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$$

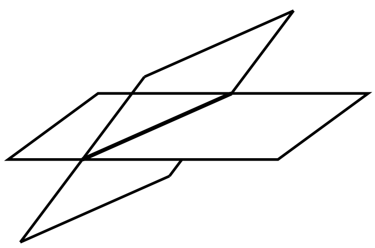
Según los rangos tenemos los casos siguientes:

rang(A)	rang(A*)	Soluciones	Posición relativa	Relación coeficientes
1	1	Infinitas 2 parámetros libre	Coincidentes, ∏=∏' (2 parámetros libres)	$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\frac{D}{D'}$
2	2	Infinitas 1 parámetro libre	Se cortan en una recta (1 parámetro libre)	$\frac{A}{A'}\neq\frac{B}{B'}\, y/o\, \frac{A}{A'}\neq\frac{C}{C'}$
1	2	No solución	Son planos paralelos	$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}\neq\frac{D}{D'}$

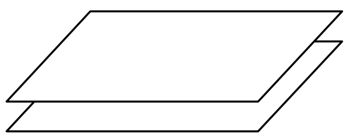
a) Coincidentes



b) Se cortan en una recta



c) Paralelos



Ejemplo: Estudia la posición relativa de los siguientes planos:

a) ∏≡ x+y-2z+2=0

∏≡ 2x+2y-4z+5=0

Son paralelos pues $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{-2}{-4}\neq\frac{2}{5}$ y, por lo tanto, el rang(A)=1 y rang(A^*)=2

b) ∏≡ x-2y+z=0

∏≡ x-2y-z-3=0

Se cortan en una recta pues $\frac{1}{1}\neq\frac{1}{-1}$ y por tanto rang(A)=rang(A^*)=2. La ecuación de la recta es $r\equiv\begin{cases}x-2y+z=0\\x-2y-z=3\end{cases}$

4.2. Posición relativa de tres planos

Sean tres planos ∏, ∏' y ∏'' cuyas ecuaciones generales son las siguientes:

∏≡Ax+By+CZ=D

∏'≡A'x+B'y+C'Z=D'

∏'≡A''x+B''y+C''z=D'

Para estudiar las posiciones relativas de estos tres planos aplicamos el teorema de Rouche-Froubenius para el sistema, siendo A y A^* las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}A & B & C\\ A' & B' & C'\\ A' & B' & C'\end{pmatrix}\quad A^*=\begin{pmatrix}A & B & C & D\\ A' & B' & C' & D'\\ A'' & B'' & C'' & D''\end{pmatrix}$$

Según los rangos tenemos los casos siguientes:

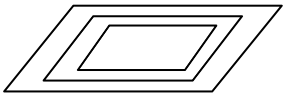
rang(A)	rang(A*)	Soluciones	Posición relativa
1	1	Infinitas 2 parámetros libre	a) Los 3 coincidentes ∏=∏'=∏'' (2 parámetros libres)
2	2	Infinitas 1 parámetro libre	b) Se cortan los 3 en una recta o c) 2 coincidentes y el 3º les corta (*)
1	2	No solución	d) Son planos paralelos o e) dos paralelos y otro coincidente(**)
2	3	No solución	f) Los planos se cortan 2 a dos o g) dos o son paralelos y el otro les corta (***)
3	3	Solución única	h) Son planos secantes en un punto

(*) se comprueba si dos de ellos son coincidentes, es decir, si sus coeficentes y el térmno independiente resulta ser proporcionales.

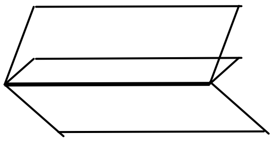
(**) Se comprueba a partir de los coeficientes de los planos si son todos paralelos, o si alguno es coincidente a otro (dos ecuaciones proporcionales).

(***) Se comprueba a partir de los coeficientes si dos de ellos son paralelos o no.

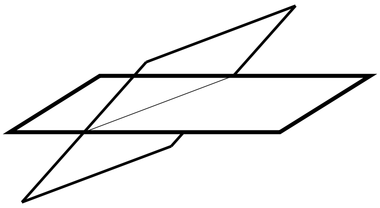
a) Coincidentes en un plano



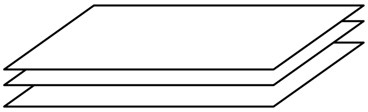
b) Se cortan en una recta



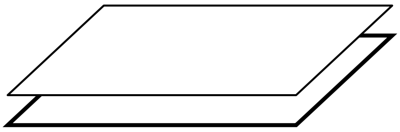
c) Dos coincidentes y el otro les corta



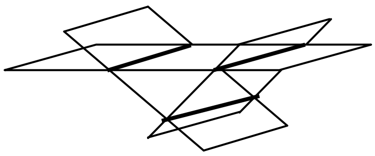
d) Tres planos paralelos



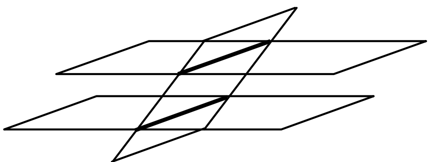
e) Dos coincidentes y el otro paralelo



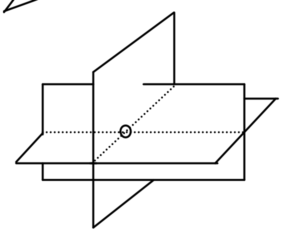
f) Se cortan dos a dos



g) Dos paralelos y el otro secante



h) Secantes en un punto



Ejemplo: Estudia la posición relativa de los siguientes tres planos

a) $\begin{cases} \Pi \equiv x - y + z = 0 \\ \Pi' \equiv 3x + 2y - 2z = 1 \\ \Pi'' \equiv 5x = 1 \end{cases}$ A= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

rang(A)=2 rang(A')=2.

Además ningún plano es coincidente con otro (no son proporcionales los coeficientes), luego son tres planos coincidentes en una recta cuya ecuación en forma general:

$$r \equiv \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 5x = 1 \end{cases}$$

b) $\begin{cases} \Pi \equiv x + 3y - 2z = 0 \\ \Pi' \equiv 2x - y + z = 0 \\ \Pi'' \equiv 4x - 5y - 3z = 0 \end{cases}$ A= $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

rang(A)=rang(A^*)=3→ cortan en un punto.

Para ver el punto debemos resolver el sistema. Si nos fijamos bien tenemos un sistema homogeneo, luego la solución es x=y=z=0, es decir, los tres planos se cortan en el origen (0,0,0)

c) $\begin{cases} \Pi \equiv x + 3y - 2z = 1 \\ \Pi' \equiv 2x - y + z = 1 \\ \Pi'' \equiv 3x + 2y - z = -2 \end{cases}$ A= $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

rang(A)=2, rang(A^*)=3.

No tienen puntos en común. Pueden ser dos casos, o se cortan dos a dos o dos son paralelos y el otro corta a los otros dos. En este caso como los coeficientes de x, y, z no son proporcionales en ninguna pareja de planos, entonces no son paralelos y por lo tanto se cortan dos a dos.

4.3. Posición relativa de una recta y un plano

Consideremos la recta expresada como intersección de dos planos, y el plano de forma implícita:

$$r \equiv \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \end{cases}$$

$$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

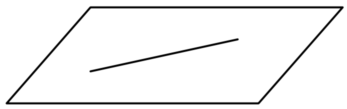
$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A & B & C \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A & B & C & D \end{pmatrix}$$

Haciendo uso del teorema de Rouche-Rröbenius, y estudiando el rango de A y de A^* , tendremos las siguientes posiciones relativas

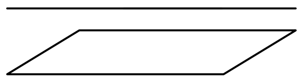
rang(A)	rang(A*)	Soluciones	Posición relativa
2	2	Infinitas 1 parámetro libre	La recta contenida en el plano
2	3	No solución	Recta y plano son paralelos
3	3	1 solución	Se cortan en un punto

Nota: no puede ocurrir que rang(A)=1, pues entonces los dos planos que definen la recta r sería paralelos o coincidentes, y por tanto no describirán tal recta.

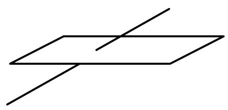
a) Recta contenida en el plano



b) Recta y plano son paralelos



c) Se cortan en un punto



Ejemplos

a)

$$r:\begin{cases}2x-y=3\\ x-z=1\end{cases}\quad A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -3\end{pmatrix}\quad A^*=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 3\\ 1 & 0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -3 & 1\end{pmatrix}$$
$$\Pi: x+y-3z=1$$

rang(A)=2 y rang(A^*)=3 → son paralelos

b)

$$r:\begin{cases}3x-5z=3\\ z=0\end{cases}\quad A=\begin{pmatrix}3 & 0 & -5\\ 0 & 0 & 1\\ 5 & -7 & 0\end{pmatrix}\quad A^*=\begin{pmatrix}3 & 0 & -5 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 5 & -7 & 0 & -3\end{pmatrix}$$
$$\Pi: 5x-7y=-3$$

rang(A)=rang(A^*)=3 → se corta en un punto

Resolviendo el sistema tenemos que x=1, y=8/7 z=0. Luego el punto intersección es P(1,8/7,0)

4.4. Posición relativa de dos rectas

Considerando dos rectas expresadas en forma general, como intersección de dos planos:

$$r_1 : \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + = D_1 \\ A'_1 x + B'_1 y + C'_1 z = D'_1 \end{cases}$$

$$r_2 : \begin{cases} A_2 x + B_2 y + C_2 z + = D_2 \\ A'_2 x + B'_2 y + C'_2 z = D'_2 \end{cases}$$

Las posiciones relativas de dos rectas en el espacio pueden ser las siguientes, según el valor del rango de A y de A^*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A'_1 & B'_2 & C'_2 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A'_2 & B'_2 & C'_2 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A'_1 & B'_1 & C'_1 & D'_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A'_2 & B'_2 & C'_2 & D'_2 \end{pmatrix}$$

rang(A)	rang(A*)	Soluciones	Posición relativa
2	2	Infinitas 1 parámetro libre	Los 2 rectas son coincidentes
2	3	No solución	Son paralelas
3	3	1 solución	Se cortan en un punto
3	4	No solución	Se cruzan en el espacio

Otra forma de ver su posición relativa más sencillamente, es a partir de estudiar el rango de los siguientes 3 vectores:

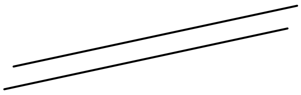
$\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$ vector director de la recta r_1

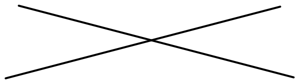
$\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)$ vector director de la recta r_2

$\overrightarrow{PQ}=(w_x,w_y,w_z)$ vector que une un punto P de r_1 con otro Q de r_2

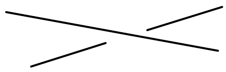
rang($\vec{v},\vec{u}$)	rang($\vec{v},\vec{u},\overrightarrow{PQ}$)	Soluciones	Posición relativa
1	1	Infinitas 1 parámetro libre	Los 2 rectas son coincidentes
1	2	No solución	Son paralelas
2	2	1 solución	Se cortan en un punto
2	3	No solución	Se cruzan en el espacio

a) Coincidentes 

b) Paralelas 



c) Se cortan en un punto

d) Se cruzan 

E*jemplos*: Estudia las posiciones relativas de las siguientes dos rectas

a)

$$r_1:\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y=3 \end{cases} \quad A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad A^*=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$r_2:\begin{cases} x-2y+z=0 \\ x-2y-z=3 \end{cases}$$

rang(A)=rang(A^*)=3, se cortan en un punto. Estudiando la solución por Cramer (eliminando 1 ecuación) es x=3/2, y=0, z=-3/2. Luego el punto de corte es R(3/2,0,-3/2).

Vamos a hacerlo a partir de la ecuación en paramétricas:

r_1→ y=3-2x, z=3-2x-x=3-3x→ $\begin{cases} x=\lambda \\ y=3-2\lambda \\ z=3-3\lambda \end{cases}$ → P(0,3,3), $\vec{u}$=(1,-2,-3)

r_2→ restando las 2 ecuaciones z=-3/2,x=3/2+2y $\begin{cases} x=3/2+2\mu \\ y=\mu \\ z=-3/2 \end{cases}$ Q(3/2,0,-3/2), $\vec{v}$=(2,1,0)

Veamos la relación de incidencia a partir de lo siguientes rangos:

rang($\vec{u},\vec{v}$)=*rang*$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$=2 rang($\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{PQ}$)=rang$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$=2

El punto de corte se hace igualando x, y, z de las dos rectas:

$$\begin{cases} (1)\ \lambda=3/2+2\mu \\ (2)\ 3-2\lambda=\mu \\ (3)\ 3-3\lambda=-3/2 \end{cases} \rightarrow \text{De (3) } \lambda=3/2\text{, sustituyendo en (1) o en (2) } \mu=0$$

Luego sustituyendo λ en r_1 o μ en r_2 → x=3/2, y=0, z=-3→ R(3/2,0,-3/2)

b) Las rectas:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x=-1+3\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=-4+10\lambda \end{cases} \qquad r_2 \equiv \frac{x-2}{6}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-6}{20}$$

de la recta r_1→ P(-1,3,-4), $\vec{u}=(3,1,10)$

de la recta r_2→ Q(2,4,6), $\vec{v}=(6,2,20)$

Estudiando los rangos obtenemos la relación afín de ambas rectas:

$$\text{rang}(\vec{u},\vec{v})=\text{rang}\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}=1,\ \text{rang}(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{PQ})=\text{rang}\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 10 & 20 & 10 \end{pmatrix}=1 \rightarrow \text{misma recta.}$$

Ejercicio 20.- Determinar la posición relativa de las rectas r: x=-y=-z y s: z=2, y=x+2

r:→ $\vec{v}=(1,-1,-1),\ P(0,0,0)$

$$s\equiv\begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda+2 \\ z=2 \end{cases} \rightarrow \vec{u}=(1,1,0),\ Q(-2,0,2)$$

$\overrightarrow{PQ}=(-2,0,2)$

$$\text{rang}(\vec{u},\vec{v})=\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=2$$

$$\text{rang}(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{PQ})=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}=3$$

Si $\text{rang}(\vec{u},\vec{v})=2$ y $\text{rang}(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{PQ})=3$, entonces las dos rectas se cruzan.

Ejercicio 21.- Determinar el valor de m y de n para que los planos que tienen como ecuaciones $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ 3x - y - mz = n \end{cases}$ se corten en una recta.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -m \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -m & n \end{pmatrix}$$

Estudiar la posición relativa de los tres planos no es sencillo al haber dos parámetros, lo que sí es más fácil es obligar a que los tres planos se corten en una recta:

rang(A)=rang(A^*)=2 y que ningún plano sea coincidente.

rang(A)=2 → |A|=m+1=0 → m=-1

rang(A^*)=2 entonces se tienen que anular todos los menores de orden 3 (con m=1):

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & n \end{vmatrix} = 4 - n = 0$ → n=4 $\quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & n \end{vmatrix} = -4 + n = 0$ → n=4 $\quad \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ n & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Luego, si n=4, todos los menores de orden tres se anulan, y por lo tanto rang(A^*)=2.

Ejercicio 22.- Sea la recta r: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+8}{3} = \frac{z-2}{5}$, el plano π: 2x-y+3z=1 y el punto P(1,0,4), obtén una recta s que sea paralela a r y que pase por el punto P. Calcula la intersección entre s y π.

a) El vector director de la recta buscada es el mismo que r al ser paralelas $\vec{v} = (2,3,5)$, y como pasa por el punto P(1,0,4) → s: (x,y,z)=(1,0,4)+λ(2,3,5).

b) Veamos la intersección con el plano π:2x-y+3z=1. Sustituyendo en la ecuación de π las ecuaciones en paramétricas de la recta tendremos el valor de λ, a partir del cual podemos obtener el punto de corte:

2(1+2λ)-3λ+3(4+5λ)=1 → 16λ=-13 → λ=-13/16 →

x_0=1+2(-13/16)=-5/8

y_0=3(-13/16)=-39/16

z_0=4+5(-13/16)=-1/16

Luego el punto de corte es (-5/8,-39/16,-1/16)

Ejercicio 23.- Hallar la ecuación del plano que contiene a las rectas r:$\begin{cases} x-y-3z=1 \\ x-3y+z=5 \end{cases}$ y s:$\begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ x-y+3z=4 \end{cases}$

Tenemos 3 posibilidades:

1. Son paralelas: tomamos el vector director de una de las rectas (que son proporcionales) y obtenemos el otro vector director del plano a partir de dos puntos, uno de cada recta.
2. Se cortan, los vectores directores de las dos rectas no son proporcionales, y por lo tanto son los dos vectores directores del plano buscado.
3. Se cruzan, y entonces no existe ningún plano que pase por las dos rectas

Para ver en cuál de las 3 situaciones nos encontramos estudiemos el rango de los dos vectores directores y de los mismos y el vector que se obtiene de unir un punto de cada recta. Para ver los vectores directores de las rectas y alguno de sus puntos pasemos las ecuaciones a paramétricas:

r→ restando las dos ecuaciones (1)-(2) 2y-4z=-4 → z=y/2+1. Sustituyendo en (1) x=1+y+3(y/2+1)=4+5/2y. De esta forma r en paramétricas

$$\text{r:}\begin{cases} x=4+\frac{5}{2}\lambda \\ y=\lambda \\ z=\frac{\lambda}{2}+1 \end{cases} \longrightarrow \vec{v}=(\frac{5}{2},1,\frac{1}{2})\equiv(5,2,1),\ P(4,0,1)$$

s→ (1)-2(2): 5y-7z=-7 z=5/7y+1. sustituyendo en (2) x=4-3(5/7y+1)+y=-8/7y+1

$$\text{r:}\begin{cases} x=1-\frac{8}{7}\lambda \\ y=\lambda \\ z=\frac{5\lambda}{7}+1 \end{cases} \longrightarrow \vec{u}=(-\frac{8}{7},1,\frac{5}{7})\equiv(-8,7,5),\ Q(1,0,1)$$

$$\overline{PQ}=(-3,0,0)$$

$\text{rang}(\vec{u},\vec{v})=2$

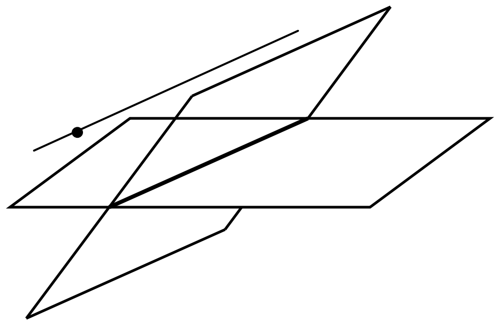
$\text{rang}(\vec{u},\vec{v},\overline{PQ})=3$

Se cruzan y, entonces no hay ningún plano que las contenga

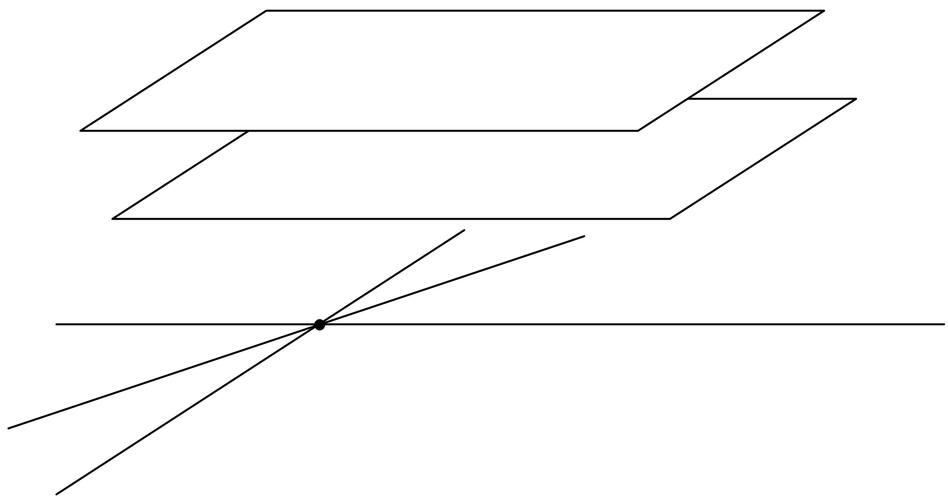
Ejercicio 24.-Halla las ecuaciones de la recta paralela a los planos x+y=1, x+z=0 y que pasan por el punto P(2,0,0)

Hay dos opciones:

a) Los planos se cortan en una recta y la recta buscada es paralela a ésta:



b) Los dos planos son paralelos o coincidentes, entonces existen infinitas rectas que pasan por el punto y son paralelas a los planos:



Estamos en el primer caso, ya que los planos se cortan $(\frac{1}{1} \neq \frac{0}{1})$; veamos el vector director de la recta en la que se cortan, cuya ecuación es:

$$r:\begin{cases} x+y=1 \\ x+z=0 \end{cases}$$

$\vec{v}$=(1,1,0)×(1,0,1)=(1·1-0·0,0·1-1·1,1·0-1·1)=(1,-1,-1).

Conociendo el vector director de la recta s, $\vec{v}$=(1,-1,-1) y un punto de la misma P(2,0,0), la ecuación de la recta en paramétricas viene dado por

s:(x,y,z)=(2,0,0)+λ(1,-1,-1)

Ejercicio 25.- Halla las ecuaciones de la recta que es paralela a la recta $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$ y pasa por el punto P(4,5,6)

Vamos a obtener las coordenadas del vector director de la recta, a partir de las ecuaciones en paramétricas:

Restando las dos ecuaciones se nos va la variable y:

x-z=-1 → x=-1+z, sustituyendo en la 1ª ecuación tenemos y=2(-1+z)+z=-2+3z

$$r:\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=-2+3\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \rightarrow \vec{v}=(1,3,1).$$

Luego la ecuación de la recta buscada tiene el mismo vector director (es paralela) y pasa por el punto P:

s:(x,y,z)=(4,5,6)+λ(1,3,1)

Ejercicio 26.- Siendo la recta r: $\begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ x + 5y - z = 0 \end{cases}$ y el plano π:2x+y+mz=n, hallar m y n de modo que

$$\pi: 2x + y + mz = n$$

$$r:\begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+5y-z=0 \end{cases}$$

a) r corte con π

rang(A)=rang(A*)=3

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix},\ A^*=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & m & n \end{pmatrix}$$

rang(A)=3 → |A|=5m-2+4+20+1+2m=7m+23 → m≠-23/7

rang(A*)=3 siempre que el rango de A sea 3, luego, para que se corten m≠-23/7, ∀n∈R.

b) sean paralelos

Entonces rang(A)=2 → m=-23/7 y rang(A*)=3, es decir alguno de los menores de orden 3 de la matriz A* es distinto de cero. Veamos los valores de n que hacen rang(A*)=3:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & n \end{vmatrix}=7n-9\neq 0 \rightarrow n\neq 9/7\ ;\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & n & -\frac{23}{7} \end{vmatrix}=n-\frac{9}{7}\neq 0 \rightarrow n\neq 9/7;\quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \\ n & 1 & -\frac{23}{7} \end{vmatrix}=12n-\frac{108}{7}\neq 0$$

→ n≠9/7.

Excepto cuando n=9/7 que se anulan los 3 menores el rango de A* es 3. Por esto, para que r y π paralelas n∈R-{9/7} y m=-23/7

c) r esté contenida en π

r está contenido en π si rang(A)=rang(A^*)=2, lo que ocurre si m=-23/7 y n=9/7.

Ejercicio 27.- Halla la ecuación del plano que pasa por P(0,0,1) y contiene a la recta r de ecuaciones r: $\begin{cases} 5x-3y+2z=5 \\ 2x-y-z=1 \end{cases}$

Para obtener las ecuaciones del plano buscado tenemos que conseguir dos vectores directores. Como la recta está contenida en el plano el vector director de r es el vector director de π. Podemos obtener otro vector director uniendo el punto del plano P con un punto cualquiera de la recta, siempre que P no pertenezca a dicha recta, ya que si así fuese este vector sería proporcional al primero.

Pasemos la recta a paramétricas (1)+2(2)→9x-5y=7 → x=7/9+5/9y

Sustituyendo en (2) z=-1+2(7/9+5/9y)-y → z=5/9+1/9y

r: $\begin{cases} x=\frac{7}{9}+\frac{5}{9}\lambda \\ y=\lambda \\ z=\frac{5}{9}+\frac{1}{9}\lambda \end{cases}$ $\vec{v}=(\frac{5}{9},1,\frac{1}{9})\equiv(5,9,1)$, Q$(\frac{7}{9},0,\frac{5}{9})$

$\vec{u}=\overrightarrow{PQ}=(\frac{7}{9},0,-\frac{4}{9})\equiv(7,0,-4)$

A partir de estos datos la ecuación general del plano es :

$\pi:\begin{vmatrix} x-0 & 5 & 7 \\ y-0 & 9 & 0 \\ z-1 & 1 & -4 \end{vmatrix}=-36x+27y-63z+63=0$ →π: 4x-3y+7z=-7

Ejercicio 28.-Estudiar la posición relativa de las siguientes rectas en función de m

r: $\begin{cases} 5x-3y+2z=5 \\ 2x-y-z=1 \end{cases}$ y s: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y+2z=m \end{cases}$

Este ejercicio es equivalente al realizado en el tema 9 (sistemas de ecuaciones), sólo que tenemos que dar una interpretación al resultado cuando las ecuaciones corresponden a dos rectas.

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & m \end{pmatrix}$

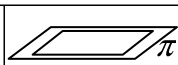
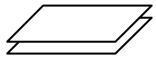
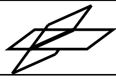
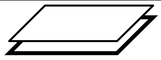
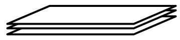
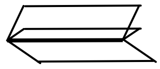
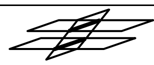
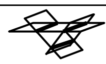
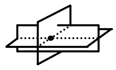
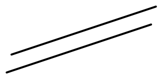
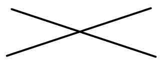
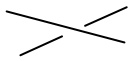
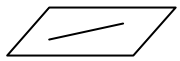
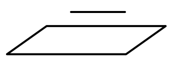
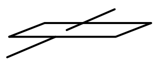
	m=-4	m∈R-{-4}
Rang(A)	3	3
Rang(A^*)	3	4
	Cortan en un punto	Se cruzan

· rang(A)=3

· rang(A^*)=4 si $|A^*|\neq 0$ → $|A^*|=4m+16\neq 0$ → m≠-4.

Si m=4 rang(A^*)=3.

Resumen posiciones relativas

POSICIONES RELATIVAS EN EL ESPACIO	**2 PLANOS** $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$ $\pi' \equiv A'x+B'y+C'z+D'=0$	$rangoM = rangoM^* = 1$	*Coincidentes*	 π, π'
		$rangoM = 1$ $rangoM^* = 2$	*Paralelos*	
		$rangoM = rangoM^* = 2$	*Secantes*	
	3 PLANOS $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$ $\pi' \equiv A'x+B'y+C'z+D'=0$ $\pi'' \equiv A''x+B''y+C''z+D''=0$	$rangoM = rangoM^* = 1$	*Coincidentes*	
		$rangoM = 1$ $rangoM^* = 2$	*2 coincidentes y 1 paralelo*	
			3 paralelos	
		$rangoM = rangoM^* = 2$	*Secantes en una recta*	
		$rangoM = 2$ $rangoM^* = 3$	*2 paralelos y 1 secante*	
			Secantes 2 a 2	
		$rangoM = rangoM^* = 3$	*Secantes en un punto*	
	2 RECTAS $r\begin{cases} P \\ \vec{u} \end{cases} y \; r'\begin{cases} Q \\ \vec{v} \end{cases}$	$rango(\vec{u},\vec{v}) =$ $= rango(\vec{u},\vec{v},\overline{PQ}) = 1$	*Coincidentes*	
		$rango(\vec{u},\vec{v}) = 1$ $rango(\vec{u},\vec{v},\overline{PQ}) = 2$	*Paralelas*	
		$rango(\vec{u},\vec{v}) =$ $= rango(\vec{u},\vec{v},\overline{PQ}) = 2$	*Secantes*	
		$rango(\vec{u},\vec{v}) = 2$ $= rango(\vec{u},\vec{v},\overline{PQ}) = 3$	*Cruzadas*	
	RECTA Y PLANO $r \equiv \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$	$rangoM = rangoM^* = 2$	*Contenida en el plano*	
		$rangoM = 2$ $rangoM^* = 3$	*Paralela al plano*	
		$rangoM = rangoM^* = 3$	*Secante al plano*	

UNIDAD13.PRODUCTO ESCALAR, VECTORIAL Y MIXTO. APLICACIONES

Contexto con la P.A.U.

Este tema es la continuación del anterior. Mientras que en el tema 12 se describen las expresiones que identifican, puntos, rectas y planos, así como las posiciones relativas, en el tema que nos encontramos se estudia las relaciones métricas entre estos elementos.

Al final del tema se realizan los ejercicios del bloque de Geometría de los últimos exámenes de la PAU.

1. Producto escalar de dos vectores.

1.1. Definición

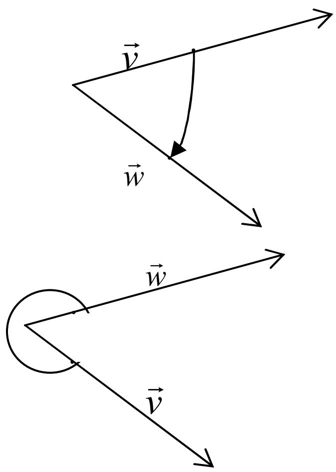
En el curso anterior se estudió ya la definición de producto escalar para vectores en el plano, en éste lo extenderemos al espacio (si la tercera coordenada de los vectores es nula podemos particularizar al producto escalar en el plano).

Definición: El producto escalar de dos vectores libres $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es un número real (escalar) definido como:

$\vec{v}\cdot\vec{w}=|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\cos(\angle(\vec{v},\vec{w}))$, donde:

- $|\vec{v}|$ y $|\vec{w}|$ son los módulos de los vectores ($|\vec{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$)
- $\cos(\angle(\vec{v},\vec{w}))$ es el coseno del ángulo que forman los vectores $\vec{v},\vec{w}$ si se aplican desde el mismo punto

Si recuerdas, en Física el trabajo realizado al desplazar una masa es igual al producto escalar de la fuerza y el desplazamiento W=$\vec{F}\cdot\vec{d}=F\cdot d\cdot\cos(\alpha)$



El ángulo que forman dos vectores $(\vec{v},\vec{w})$ es el que va del primero al segundo en el sentido horario

Propiedades del producto escalar de dos vectores:

- El producto escalar de un vector por sí mismo es igual al cuadrado del módulo:

  $\vec{v}\cdot\vec{v}=|\vec{v}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\angle(\vec{v},\vec{v}))=|\vec{v}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(0)=|\vec{v}|^2$

- El producto escalar es conmutativo

  $\vec{v}\cdot\vec{w}=\vec{w}\cdot\vec{v}$ pues $\cos(\angle(\vec{v},\vec{w}))=\cos(\angle(\vec{w},\vec{v}))$ (pues $\angle(\vec{v},\vec{w})=360º-\angle(\vec{w},\vec{v})$ y el coseno cumple $\cos(\alpha)=\cos(360-\alpha)$

- El producto escalar es distributivo respecto a la suma de vectores:

  $\vec{v}\cdot(\vec{w}+\vec{u})=\vec{v}\,\vec{w}+\vec{v}\,\vec{u}$

- El producto escalar de dos vectores es nulo si y sólo si son perpendiculares o alguno de los vectores es cero:

  $\vec{v}\cdot\vec{w}=0 \leftrightarrow \vec{v}\perp\vec{w}$, $\angle(\vec{w},\vec{v})=90º$ ó $270º$ ó $\vec{v}=0$ y/o $\vec{w}=0$

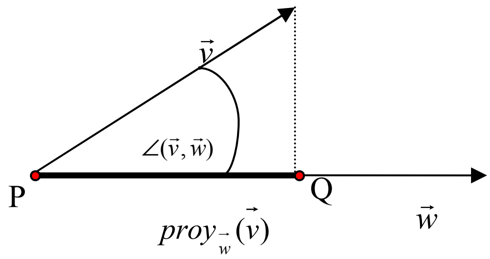
1.2. Interpretación geométrica del producto escalar

Se puede relacionar geométricamente el producto escalar de dos vectores con la proyección de un vector sobre el otro:

$\vec{v}\cdot\vec{w} = proy_{\vec{v}}(\vec{w})\cdot|\vec{v}| = proy_{\vec{w}}(\vec{v})\cdot|\vec{w}|$ donde :

- $proy_{\vec{v}}(\vec{w})$ es el valor de la proyección de $\vec{w}$ sobre $\vec{v}$
- $proy_{\vec{w}}(\vec{v})$ es el valor de la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$

Demostración:



$proy_{\vec{w}}(\vec{v}) = |\overrightarrow{PQ}| = |\vec{v}|\cos(\angle(\vec{v},\vec{w}))$ multiplicando $|\vec{w}|$

$|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cos(\angle(\vec{v},\vec{w})) = \vec{v}\cdot\vec{w} = |\vec{v}|\cdot proy_{\vec{w}}(\vec{v})$

1.3. Expresión analítica del producto escalar.

A partir de la propiedad distributiva del producto escalar y del producto escalar de los vectores unitarios, podemos obtener la expresión analítica del producto escalar de dos vectores cualesquiera. Veamos primero el producto escalar de los vectores unitarios:

$\vec{i}\cdot\vec{i} = |1|\cdot|1|\cdot\cos(0) = 1$

$\vec{j}\cdot\vec{j} = |1|\cdot|1|\cdot\cos(0) = 1$

$\vec{k}\cdot\vec{k} = |1|\cdot|1|\cdot\cos(0) = 1$

$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{i} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{j} = |1|\cdot|1|\cdot\cos(90) = 0$

De esta manera el producto de dos vectores $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ y $\vec{w} = (w_x, w_y, w_z)$ viene definido analíticamente como:

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = v_x\cdot w_x + v_y\cdot w_y + v_z\cdot w_z$$

Demostración:

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = (v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k})\cdot(w_x\vec{i} + w_y\vec{j} + w_z\vec{k}) =$$

$$= v_x\vec{i}\cdot(w_x\vec{i} + w_y\vec{j} + w_z\vec{k}) + v_y\vec{j}\cdot(w_x\vec{i} + w_y\vec{j} + w_z\vec{k}) + v_z\vec{k}\cdot(w_x\vec{i} + w_y\vec{j} + w_z\vec{k}) = v_x\cdot w_x + v_y\cdot w_y + v_z\cdot w_z$$

Ejemplos: (1,2,-1)·(2,1,4)=1·2+2·1-1·4=0 → son perpendiculares

$$(1,1,1)\cdot(2,0,-1) = 1\cdot2+1\cdot0+1\cdot(-1) = 1 = |(1,1,1)|\cdot|(2,0,-1)|\cdot\cos(\alpha) \rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}\right)$$

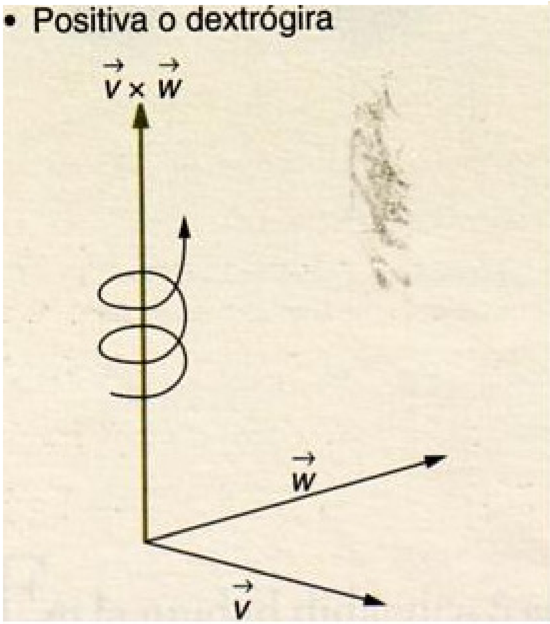
2. Producto vectorial de dos vectores

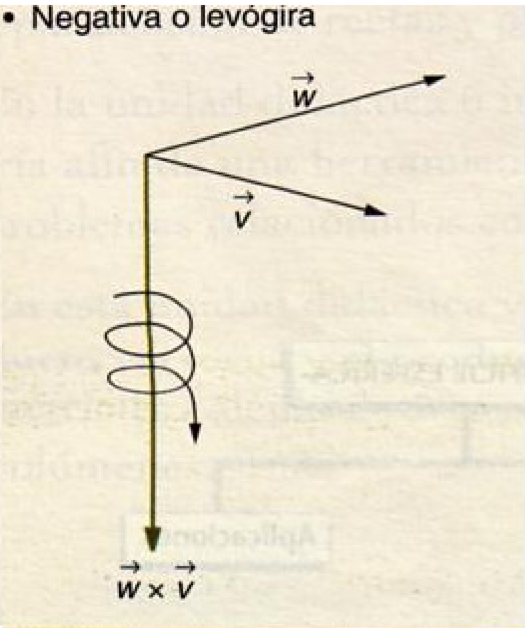
2.1. Definición

Definición: El producto vectorial de dos vectores libres $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es otro vector que designaremos como $\vec{v}\times\vec{w}$ y que se define a partir de las siguientes propiedades:

- *módulo* → $|\vec{v}\times\vec{w}|=|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\text{sen}(\angle(\vec{v},\vec{w}))$
- *dirección* → la perpendicular simultáneamente a $\vec{v}$ y $\vec{w}$
- *sentido* → el de avance a derechas de un sacacorchos girando de $\vec{v}$ a $\vec{w}$ (*)

(*) Sentido del producto vectorial





Propiedades del producto vectorial:

- El producto vectorial es anticonmutativo. El módulo y la dirección no cambian, pero el sentido es el opuesto (ver regla sacacorchos).

  $(\vec{v}\times\vec{w})=-(\vec{w}\times\vec{v})$

- El producto vectorial es distributivo con la suma:

  $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$

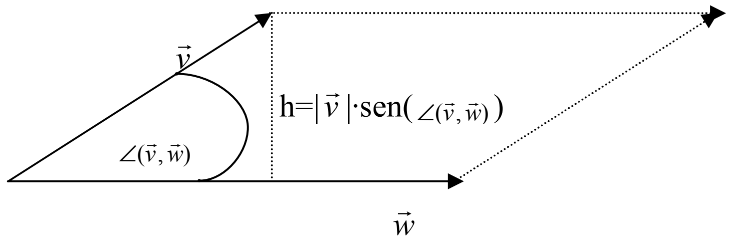
- El producto vectorial es nulo siempre que se cumple una de las dos siguientes condiciones:

  a) uno de los dos vectores o los dos son nulos

  b) son vectores paralelos $\angle(\vec{v},\vec{w})$=0º ya que sen(0)=0

2.2. Interpretación geométrica del producto vectorial

Sean dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ con origen común. Si trasladamos el vector $\vec{w}$ sobre el extremo de $\vec{v}$ y el de $\vec{v}$ sobre el extremo de $\vec{w}$ se forma un paralelogramo (ver figura)



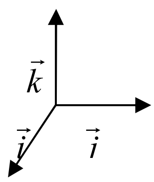
El área del paralelogramo es $|\vec{w}|\cdot h$ siendo $h=|\vec{v}|\cdot sen(\angle(\vec{v},\vec{w}))$. Así el área del paralelogramo es igual al módulo del producto vectorial de los dos vectores que lo forman

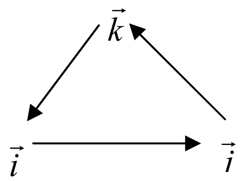
$$\boxed{A_{paralelogramos}=|\vec{w}|\cdot|\vec{v}|\cdot sen(\angle(\vec{v},\vec{w}))=|\vec{v}\times\vec{w}|}$$

2.3.Expresión analítica del producto vectorial

Para calcular la expresión analítica del producto vectorial veamos el producto vectorial de los vectores unitarios:

$$\begin{array}{ll} \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k} & \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k} \\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i} & \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i} \\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j} & \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j} \end{array}$$





A partir de estos productos vectoriales y de la propiedad distributiva podemos calcular de forma sencilla el producto vectorial de dos vectores $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$, $\vec{w}=(w_x,w_y,w_z)$

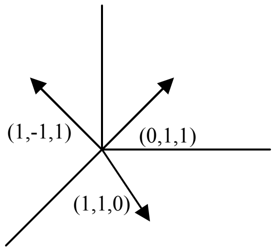
$$\vec{v}\times\vec{w}=(v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k})\times(w_x\vec{i}+w_y\vec{j}+w_z\vec{k})=v_x\cdot w_x\cdot 0+v_x\cdot w_y\vec{k}-v_xw_z\vec{j}-$$

$$-v_y\cdot w_x\vec{k}+v_y\cdot w_y\cdot 0+v_yw_z\vec{i}+v_zw_x\vec{j}-v_zw_y\vec{i}+v_z\cdot w_z\cdot 0=$$

$$=(v_yw_z-v_zw_y)\,\vec{i}+(v_zw_x-v_xw_z)\,\vec{j}+(v_x\cdot w_y-v_y\cdot w_x)\,\vec{k}$$

Se puede calcular fácilmente a partir del siguiente determinante:

$$\boxed{\vec{v}\times\vec{w}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}}$$



Ejemplo: $(1,1,0)\times(0,1,1)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}=(1,-1,1)$

3. Producto Mixto de 3 vectores.

3.1. Definición

El producto mixto de tres vectores $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ es un valor numérico definido a partir del producto vectorial y escalar.

Definición: El producto mixto de 3 vectores, $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ que se designa como $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$, se obtiene del producto escalar del primer vector por el vector resultante de multiplicar vectorialmente los otros dos:

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$$

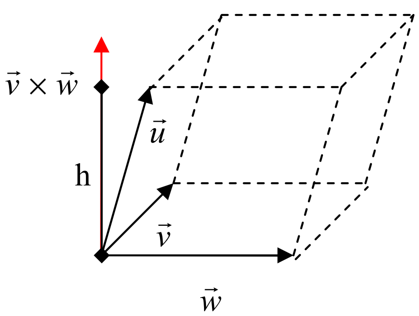
Propiedades del producto mixto:

- Si permutamos dos vectores del producto mixto este cambia de signo: $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=-[\vec{v},\vec{u},\vec{w}]=-[\vec{w},\vec{v},\vec{u}]=-[\vec{u},\vec{w},\vec{v}]$
- El producto mixto es distributivo respecto a la suma de vectores: $[\vec{u}+\vec{u}',\vec{v},\vec{w}=]\,[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]+[\vec{u}',\vec{v},\vec{w}]$
- $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=0$ si algún vector es nulo o son coplanarios (linealmente dependientes).

3.2. Interpretación geométrica del producto mixto.

Consideremos los tres vectores $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ aplicados sobre el mismo origen, de manera que formen un paralelepípedo (con sus proyecciones). Se cumple que el volumen del paralelepípedo es igual al valor absoluto del producto mixto de los tres vectores que lo forman

$$V_{paralelepipedo}=area_{base}\cdot h=|\vec{v}\times\vec{w}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos(\angle(\vec{u},\vec{v}\times\vec{w}))=[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$$



3.3. Expresión analítica del producto mixto

Aplicando la expresión analítica del producto vectorial y escalar de los apartados anteriores, es fácil ver como el producto mixto se puede poner a partir del siguiente determinante:

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

***Ejemplo**:* [(1,2,0),(-1,-2,0),(0,1,0)]= $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$ son coplanarios, es decir linealmente dependientes.

Ejercicio 1. Sean los vectores $\vec{u}=(2,-5,3)$, $\vec{v}=(4,-3,2)$ y $\vec{w}=(0,2,-7)$

a) Calcular los productos escalares entre los tres vectores

$\vec{u}=(2,-5,3)$ $\vec{v}=(4,-3,2)$ $\vec{w}=(0,2,-7)$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=8+15+6=29$

$\vec{u}\cdot\vec{w}=0-10-21=-31$

$\vec{v}\cdot\vec{w}=0-6-14=-20$

b) Determinar el módulo de los tres vectores

$|\vec{u}|=\sqrt{2^2+(-5)^2+3^2}=\sqrt{4+25+9}=\sqrt{38}$

$|\vec{v}|=\sqrt{16+9+4}=\sqrt{29}$

$|\vec{w}|=\sqrt{0+4+49}=\sqrt{53}$

c) Hallar el ángulo que forman entre ellos

$$\angle(\vec{u},\vec{v})=\cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{29}{\sqrt{38\cdot 29}}\right)=29^{\circ}17'7''$$

$$\angle(\vec{u},\vec{w})=\cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{|\vec{u}||\vec{w}|}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{-31}{\sqrt{38\cdot 53}}\right)=133^{\circ}41'\ 27{,}2''$$

$$\angle(\vec{v},\vec{w})=\cos^{-1}\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{-20}{\sqrt{29\cdot 53}}\right)=120^{\circ}\ 40'\ 24{,}4''$$

Ejercicio 2.- Sean los vectores $\vec{u}=(2,2,2)$ y $\vec{v}=(1,0,1)$. Hallar todos los vectores de módulo unidad que formen un ángulo de 30º con $\vec{u}$ y de 45º con $\vec{v}$

$\vec{w}=(x,y,z)$

$|\vec{w}|=x^2+y^2+z^2=1 \quad (Ec1)$

$$\vec{u}\cdot\vec{w}=|\vec{u}|\cdot 1\cdot\cos(30) \quad\rightarrow\quad \cos(30)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{|\vec{u}|}=\frac{2(x+y+z)}{\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow (x+y+z)=\frac{\sqrt{36}}{4}=\frac{3}{2}\ (Ec2)$$

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=|\vec{v}|\cdot 1\cdot\cos(45) \quad\rightarrow\quad \cos(45)=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|}=\frac{(x+z)}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\rightarrow (x+z)=\frac{\sqrt{4}}{2}=1\ \ (Ec3)$$

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ x^2+y^2+z^2=1\\ (2)\ x+y+z=\dfrac{3}{2}\\ (3)\ x+z=1\end{array}\right\}\ (3)-(2)\rightarrow y=\frac{1}{2};\ x^2+\frac{1}{4}+(1-x)^2=1\rightarrow 2x^2-2x+\frac{1}{4}=0\ .$$

Dos soluciones

$$x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4},\ y=\frac{1}{2},\quad z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\qquad \vec{v}_1=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$x=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4},\ y=\frac{1}{2},\quad z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}\qquad \vec{v}_2=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

Ejercicio 3. – Calcula un vector $\vec{u}$ que cumpla en cada caso las siguientes condiciones:

a) Sea proporcional al vector $\vec{v}=(2,-1,1)$ y además $\vec{u}\cdot\vec{v}=3$

$\vec{u}$=(2k,-k,k) $\vec{u}\cdot\vec{v}=(2k,-k,k)\cdot(2,-1,1)=4k+k+k=6k=3\rightarrow k=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\rightarrow\vec{u}=(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

b) Sea perpendicular a los vectores $\vec{v}=(2,-1,1)$ y $\vec{w}=(18,-22,-5)$ y además $|\vec{u}|=14$

$\vec{u}$=(x,y,z):

$|\vec{u}|=x^2+y^2+z^2=196$ (Ec 1)

$\vec{u}\cdot\vec{v}=2x-y+z=0$ (Ec 2)

$\vec{u}\cdot\vec{v}=18x-22y-5z=0$ (Ec 3)

$$\begin{cases}(1)\ x^2+y^2+z^2=164\\ (2)\ \ 2x-y+z=0\\ (3)\ 18x-22y-5z=0\end{cases}$$

(2)→ z=y-2x, (3) → 18x-22y-5(y-2x)=0 28x-27y=0→ x=$\frac{27}{28}y$, z=y-2$\frac{27}{28}y$=-$\frac{13}{14}y$

$$(1)\ \left(\left(\frac{27}{28}\right)^2+1+\left(\frac{13}{14}\right)^2\right)y^2=196\ \rightarrow\ y^2=\frac{196}{\frac{2189}{784}}=\frac{153664}{2189}\rightarrow y=\frac{\pm 392}{\sqrt{2189}}$$

$$x=\frac{378}{\sqrt{2189}} \quad z=-\frac{364}{\sqrt{2189}} \rightarrow \begin{array}{l} \vec{u}_1=\frac{1}{\sqrt{2189}}(378,392,-364) \\ \vec{u}_2=-\frac{1}{\sqrt{2189}}(378,392,-364) \end{array}$$

Otra forma más sencilla: el producto vectorial de dos vectores es un vector perpendicular a ambos

$$\vec{u}=k\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=k\cdot\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 18 & -22 & -5 \end{vmatrix}=k\cdot(27,28-26)$$

$$|\vec{u}|=x^2+y^2+z^2=k^2(27^2+28^2+26^2)=196 \rightarrow k=\frac{\pm 14}{\sqrt{2189}}$$

$$\vec{u}_1=\frac{1}{\sqrt{2189}}(378,392,-364)$$

$$\vec{u}_2=-\frac{1}{\sqrt{2189}}(378,392,-364)$$

c) Que sea perpendicular al eje OZ y cumpla $\vec{u}\cdot\vec{v}=9, y\ \vec{u}\cdot\vec{w}=-4$ siendo $\vec{v}=(3,-1,5)\ y\ \vec{w}=(1,2,-3)$

$\vec{u}=(x,y,z)$

$\vec{u}\cdot\vec{k}=z=0$ (Ec 1)

$\vec{u}\cdot\vec{v}=3x-y+5z=9$ (Ec2)

$\vec{u}\cdot\vec{w}=x+2y-3z=-4$ (Ec 3)

Resolviendo el sistema $\vec{u}=(2,-3,0)$

Ejercicio 4.- Para los vectores $\vec{u}=(2,-3,1)$, $\vec{v}=(-3,1,2)$ y $\vec{w}=(1,2,3)$ calcular $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$ y $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$

$\vec{u}=(2,-3,1)$, $\vec{v}=(-3,1,2)$, $\vec{w}=(1,2,3)$

$$\vec{u}x\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-7\vec{i}-7\vec{j}-7\vec{k} \quad (\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -7 & -7 & -7 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-7\vec{i}+14\vec{j}-7\vec{k}$$

$$\vec{v}\times\vec{w}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-\vec{i}+11\vec{j}-7\vec{k} \quad \vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 11 & -7 \end{vmatrix}=10\vec{i}+13\vec{j}+19\vec{k}$$

Nota: en el producto vectorial no se cumple la propiedad distributiva

Ejercicio 5.-Dado los vectores $\vec{u} = (1,-1,3)$, $\vec{v} = (-2,2,1)$ y $\vec{w} = (3,-2,5)$ calcular $\vec{u} \cdot(\vec{v} \times \vec{w})$

Es el producto mixto $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -7$

Ejercicio 6.- Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se cumple a) sus módulos son, respectivamente, 10 y 2, b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 12$. Calcular $|\vec{u} \times \vec{v}|$

$|\vec{u}| = 10, \quad |\vec{v}| = 2$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\angle(\vec{u},\vec{v})) = 10\cdot2\cdot\cos(\angle(\vec{u},\vec{v})) = 12 \;\rightarrow\; \cos(\angle(\vec{u},\vec{v})) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

$|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot sen(\angle(\vec{u},\vec{v})) = 20\cdot sen(\angle(\vec{u},\vec{v})) = 20\cdot\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = 20\cdot\sqrt{\frac{16}{25}} = 20\cdot\frac{4}{5} = 16$

4. Aplicaciones

4.1. Aplicaciones con vectores

En este apartado veremos las aplicaciones del módulo, del producto escalar, vectorial y mixto relativos a las propiedades de los vectores. Recordemos que muchas magnitudes físicas, como la posición, velocidad, la fuerza…son vectores, de aquí la gran importancia de este punto.

4.1.1. Módulo y vector unitario

A partir del producto escalar es fácil calcular el módulo y el vector unitario de dicho vector. Módulo:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Por otro lado, el vector unitario de un vector $\vec{v}$ es otro vector con la misma dirección y sentido, pero con módulo unidad. Para calcularlo se divide el vector por su módulo:

$$\vec{u}_v = \frac{1}{|\vec{v}|}\cdot\vec{v} = \left(\frac{v_x}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}, \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}, \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}\right)$$

4.1.2 Ángulo de dos vectores

A partir del producto escalar o del módulo del producto vectorial es fácil calcular el ángulo que forman dos vectores:

$$\angle(\vec{u},\vec{v}) = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right)$$

$$\angle(\vec{u},\vec{v}) = sen^{-1}\left(\frac{|\vec{u}\times\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right)$$

Luego, si dos vectores $\vec{u},\vec{v}$ son perpendiculares, se cumple:

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$
- $|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$

4.1.3 Vector normal a un plano y director de una recta

1) Dado un plano con ecuación general π:Ax+By+Cz+D=0, demostremos lo dicho en el tema anterior, esto es que el **vector (A,B,C) es perpendicular al plano π**:

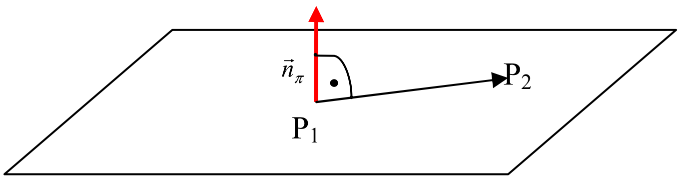
Sea $P_1=(x_1,y_1,z_1)\in\pi \rightarrow Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$ (1)

Sea $P_2=(x_2,y_2,z_2)\in\pi \rightarrow Ax_2+By_2+Cz_2+D=0$ (2)

Restando (1)-(2) $\rightarrow$ $A(x_1-x_2)+B(y_1-y_2)+C(z_1-z_2)=0$

Podemos expresar esta igualdad a partir del siguiente producto escalar del vector $\vec{n}_\pi=$ (A,B,C) y el vector $\overline{P_1P_2}=((x_1-x_2),(y_1-y_2),(z_1-z_2))$, contenido en el plano:

$(A,B,C)\cdot((x_1-x_2),(y_1-y_2),(z_1-z_2))=0$ $\rightarrow$ $\vec{n}_\pi \perp \overline{P_1P_2}$, luego es un vector perpendicular a cualquier vector contenido en el plano, y, por lo tanto $\vec{n}_\pi$ es perpendicular a π.



2) Sea r la recta dada como intersección de dos planos π_1, π_2:

$$r:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

Se cumple que la recta r está contenida en π_1 y π_2, luego el vector director de la recta, $\vec{v}_r$ es perpendicular a π_1 y π_2 $\rightarrow \vec{v}\perp\vec{n}_{\pi_1}, \vec{v}\perp\vec{n}_{\pi_2}$ luego $\vec{v}_r$ **se puede expresar como el producto vectorial de $\vec{n}_{\pi_1}, \vec{n}_{\pi_2}$:**

$$\vec{v}_r=\vec{n}_{\pi_1}\times\vec{n}_{\pi_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

Ejemplo:

$$r:\begin{cases} x-2y+z=2 \\ 2x+y-3z=3 \end{cases} \qquad \vec{n}_{\pi_1}=(1,-2,1),\ \vec{n}_{\pi_2}=(2,1,-3)$$

$$\vec{v}_r=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}=5\vec{i}+5\vec{j}+5\vec{k}$$

4.2. Ángulo entre los elementos del espacio

En este apartado calcularemos los ángulos que forman los distintos elementos del espacio, vectores, rectas y planos. Para su cálculo usaremos el producto escalar de los vectores característicos de ellos, el vector director de la recta y el normal del plano.

4.2.1 Ángulos entre dos rectas.

Sean dos rectas r_1 y r_2 cuyos vectores directores son $\vec{v}_{r_1}$ y $\vec{v}_{r_2}$; el ángulo que forman estas dos rectas es el mismo que forman sus vectores directores:

$$\angle(r_1,r_2)=\angle(\vec{v}_1,\vec{v}_2)=\cos^{-1}\left(\frac{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|}\right)$$

Nota: las dos rectas forman dos ángulos que suman 180º (son suplementarios). El ángulo que forma que se da es el menor de ellos, es decir el que es menor o igual que 90º. De esta forma si $\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|}\right)$ es un ángulo mayor que 90º el ángulo de la recta es el suplementario (180º-α)

Casos:

a) rectas perpendiculares ($r_1\perp r_2$)→ $\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2=0$

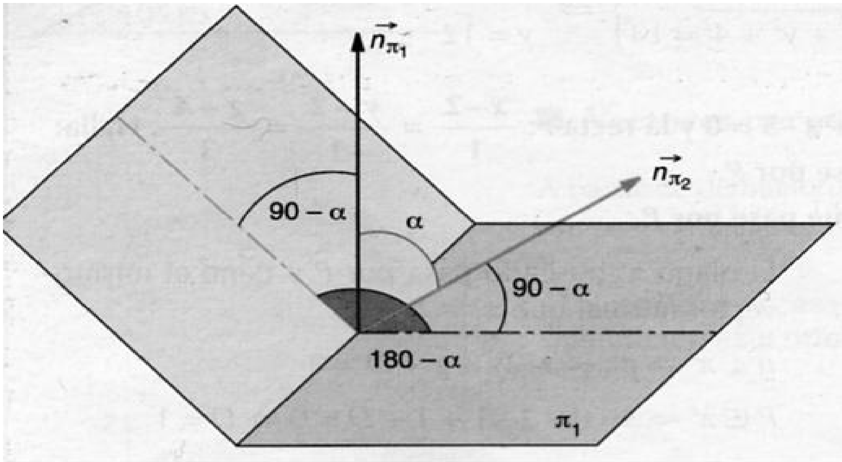
b) rectas paralelas ($r_1 \parallel r_2$)→ $\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2=|\vec{v}_1|\cdot|\vec{v}_2|$, $\vec{v}_1=\lambda\cdot\vec{v}_2$

4.2.2 Ángulos entre dos planos.

Sean dos planos π_1 y π_2, cuyos vectores normales son $\vec{n}_{\pi_1},\vec{n}_{\pi_2}$, respectivamente. Si llamamos α al ángulo entre los dos vectores normales, el ángulo que forman los dos planos es 180º-α.

$$\angle(\pi_1,\pi_2)=180^{\circ}-\angle(\vec{n}_{\pi_1},\vec{n}_{\pi_2})=180^{\circ}-\cos^{-1}\left(\frac{\vec{n}_{\pi_1}\cdot\vec{n}_{\pi_2}}{|\vec{n}_{\pi_1}||\vec{n}_{\pi_2}|}\right)$$

Nota: los dos planos forman dos ángulos que suman 180º (son suplementarios). El ángulo que forma que se da es el menor de ellos, es decir el que es menor o igual que 90º. De esta forma si $\alpha=180-\cos^{-1}\left(\frac{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|}\right)$ es un ángulo mayor que 90º el ángulo de la recta es el suplementario (180º-α)



Casos:

a) planos perpendiculares: $(\pi_1 \perp \pi_2) \rightarrow \vec{n}_{\pi_1} \perp \vec{n}_{\pi_2} \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2} = 0$

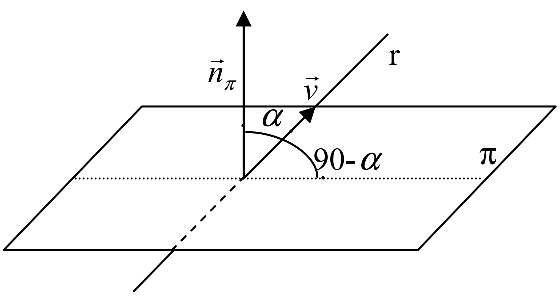
b) planos paralelos: $(\pi_1 \parallel \pi_2) \rightarrow \vec{n}_{\pi_1} \parallel \vec{n}_{\pi_2} \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2} = |\vec{n}_{\pi_1}| \cdot |\vec{n}_{\pi_2}|,\ \vec{n}_{\pi_1} = \lambda \cdot \vec{n}_{\pi_2}$

4.2.3 Ángulos entre una recta y un plano.

Sea una recta r con vector director $\vec{v}$ y un plano π con vector normal $\vec{n}_\pi$. Si llamamos α el ángulo que forman $\vec{v}$ y $\vec{n}_\pi$, el ángulo que forman la recta y el plano será 90º-α:

$$\angle(\pi, r) = 90º - \angle(\vec{n}_\pi, \vec{v}) = 90º - \cos^{-1}\left(\frac{\vec{n}_\pi \cdot \vec{v}}{|\vec{n}_\pi| |\vec{v}|}\right)$$

Nota: la recta y el plano forman dos ángulos que suman 180º (son suplementarios). El ángulo que forman que se da es el menor de ellos, es decir el que es menor o igual que 90º. De esta forma si $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1| |\vec{v}_2|}\right)$ es un ángulo mayor que 90º el ángulo que restamos a 90º en la fórmula es el suplementario (180º-α)



Ejercicio7.- Calcular el ángulo que forman las rectas r y s

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{-1} \quad \vec{v}_r = (2,-2,-1)$$

$$s: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-2} \quad \vec{v}_s = (-1,3,-2)$$

$$\angle(r,s) = \angle(\vec{v}_r,\vec{v}_s) = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s}{|\vec{v}_r||\vec{v}_s|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-6}{|3||\sqrt{14}|}\right) = 122^{o}\ 18'\ 41{,}5''$$

El ángulo que se suele dar es el menor de los dos que forman $\angle(r,s)$ =180º-122º18'41,5''=57º 41'18,5''

Ejercicio 8.- Calcular el ángulo que forman plano π:x-y+z=0 y la recta r:$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{3}$

π: x-y+z=0 → $\vec{n}_\pi = (1,-1,1)$

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{3} \quad \vec{v}_r = (2,-1,3)$$

$$\angle(r,\pi) = 90^{o} - \angle(\vec{v}_r,\vec{n}_\pi) = 90^{o} - \cos^{-1}\left(\frac{\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi}{|\vec{v}_r||\vec{n}_\pi|}\right) = 90^{o} - \cos^{-1}\left(\frac{6}{\sqrt{3}\sqrt{14}}\right) = 67^{o}\ 47'\ 32{,}44''$$

Ejercicio 9.- Calcular el ángulo que forman los planos π_1:x+y-2z=3 y π_2:-x+y+2z=2

π_1: x+y-2z=3 → $\vec{n}_{\pi 1} = (1,1,-2)$

π_2: -x+y+2z=2 → $\vec{n}_{\pi 1} = (-1,1,2)$

$$\angle(\pi_1,\pi_2) = 180^{o} - \angle(\vec{n}_{\pi 1},\vec{n}_{\pi 2}) = 180^{o} - \cos^{-1}\left(\frac{\vec{n}_{\pi 1} \cdot \vec{n}_{\pi 2}}{|\vec{n}_{\pi 1}||\vec{n}_{\pi 2}|}\right) = 180^{o} - \cos^{-1}\left(\frac{-4}{\sqrt{6}\sqrt{6}}\right) = 48^{o}\ 12'\ 12{,}9''$$

4.3.Distancia entre los elementos del espacio

En este apartado estudiamos las distancias entre los elementos del espacio, puntos, rectas y planos entre si.

4.3.1. Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos P(x_1,y_1,z_1) y Q(x_2,y_2,z_2) del espacio es igual al módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$, es decir:

$$d(P,Q)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

4.3.2. Distancia entre un punto y una recta

La distancia de un punto P(x_1,y_1,z_1) y una recta r (con vector director $\vec{v}_r=(v_x,v_y,v_z)$ y siendo Q(x_2,y_2,z_2) un punto de la misma) es la mínima distancia entre P y la recta.

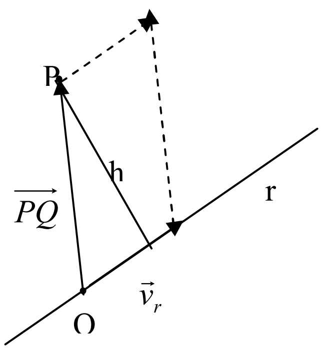
Hay dos formas de obtener la distancia entre r y P

a) $d(P,r)=\dfrac{|\vec{v}_r\times\overrightarrow{PQ}|}{|\vec{v}_r|}$

b) $d(P,r)=\sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2-(proy_{\vec{v}_r}(\overrightarrow{PQ}))^2}=\sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2-\left|\dfrac{\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}_r}{|\vec{v}_r|}\right|^2}$

Demostración:

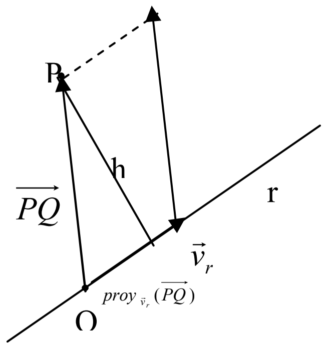
(a)



$a_{paralelogramo}$=base·h=$|\vec{v}_r|\cdot d(P,r)=|\vec{v}_r\times\overrightarrow{PQ}|$

despejando: $d(P,r)=\dfrac{|\vec{v}_r\times\overrightarrow{PQ}|}{|\vec{v}_r|}$

(b)



Por el teorema de Pitágoras:

$d(P,r)=h=\sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2-(proy_{\vec{v}_r}(\overrightarrow{PQ}))^2}$

4.3.3. Distancia entre un punto y un plano

La distancia entre un punto P(x_0,y_0,z_0) y un plano π (con vector normal $\vec{n}_\pi=(A,B,C)$ y que contiene a un punto Q(x_1,y_1,z_1)), es la menor distancia que existe entre P y el plano.

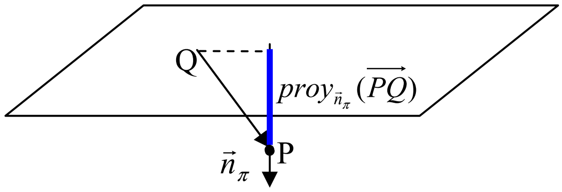
Su valor numérico es:

$$d(P,\pi)=proy_{\vec{n}_\pi}(\overline{PQ})=\frac{\left|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}_\pi\right|}{|\vec{n}_\pi|}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Demostración

$\left|\overline{PQ}\cdot\vec{n}_\pi\right| =$ |A(x₁-x₀)+B(y₁-y₀)+C(z₁-z₀)|=|Ax₁+By₁+Cz₁-Ax₀-By₀-Cz₀|=|-D-Ax₀-By₀-Cz₀|

ya que $Ax_1+By_1+Cz_1=-D$ al pertenecer P al plano.



4.3.4. Distancia entre una recta y un plano

Para calcular la distancia entre una recta r (con vector director $\vec{v}_r=(v_x,v_y,v_z)$ y conteniendo a un punto $P(x_0,y_0,z_0)$) y un plano (con vector normal $\vec{n}_\pi=(A,B,C)$ y punto $Q(x_1,y_1,z_1)$), lo primero tenemos que hacer es comprobar la posición relativa entre ambos. Así según sea esta:

a) Se cortan → d(r,π)=0

b) Recta contenida en el plano → d(r,π)=0

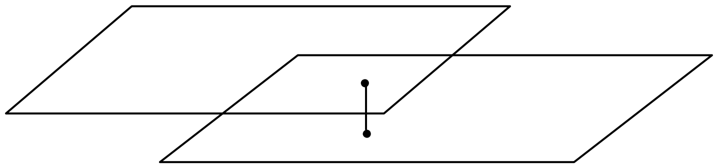
c) Son paralelas→ d(r,π)= $d(P,\pi)=proy_{\vec{n}_\pi}(\overline{PQ})=\dfrac{\left|\overline{PQ}\cdot\vec{n}_\pi\right|}{|\vec{n}_\pi|}=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

4.3.5 Distancia entre dos planos

Para estudiar la distancia entre dos planos π y π', primero se tiene que estudiar la posición relativa de ambas. Así distinguimos:

A) Si los planos se cortan o son el mismo d(π,π')=0

B) Si son paralelos d(π,π')=d(P,π')=d(Q,π) donde P es un punto de π y Q de π'



4.3.6. Distancia entre rectas

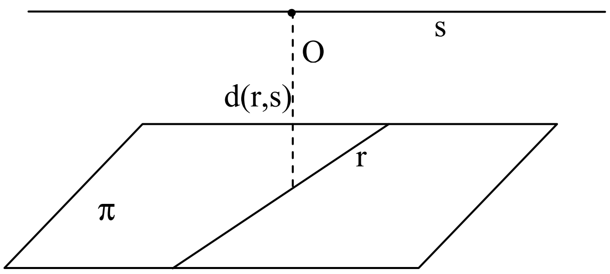
Para estudiar la distancia entre dos rectas r ($\vec{v}_r, P$) y s ($\vec{v}_s, Q$), primero se tiene que estudiar la posición relativa de ambas. Así distinguimos:

A) Rectas que se cortan → d(r,s)=0

B) Rectas paralelas d(r,s)=d(P,s)=d(r,Q), donde P es un punto de r y Q de s.

C) Rectas que se cruzan, el procedimiento a seguir es el siguiente: hallamos el plano π que contiene a la recta r y es paralela a s. La distancia entre las dos rectas es la misma que la distancia de s al plano π, es decir la distancia entre un punto de la recta s y el plano.

$$d(r,s) = d(s,\pi) = d(Q,\pi) = \frac{|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}_\pi|}{|\vec{n}_\pi|} = \frac{|(\vec{v}_r \times \vec{v}_s)\cdot\overrightarrow{PQ}|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{\left|[\overrightarrow{PQ}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]\right|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|}$$



Ejercicio 10. Calcular la distancia entre el punto P(-2,4,3) y la recta r: $\begin{cases} x = 2z + 1/2 \\ y = 4 - 2z/3 \end{cases}$

d(P,r)= $\sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2 - \left|\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}_r}{|\vec{v}_r|}\right|^2}$, tenemos que hallar un punto y un vector director de la recta.

Pasamos la recta a paramétricas: r: $\begin{cases} x = 2\cdot\lambda + 1/2 \\ y = 4 - 2\cdot\lambda/3 \\ z = \lambda \end{cases}$ → Q(1/2,4,0), $\vec{v} = (2,-2/3,1)$

$\overrightarrow{PQ} = (5/2, 0, -3)$ → $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{\frac{25}{4} + 9} = \sqrt{\frac{61}{4}} = \frac{\sqrt{61}}{2}$

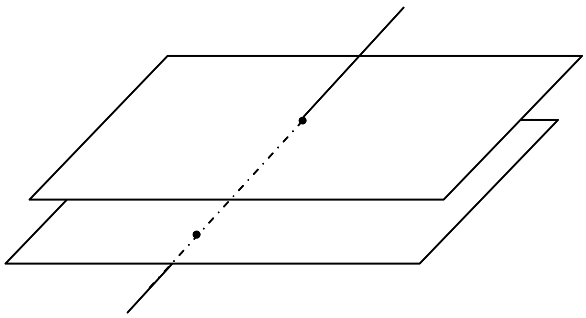
$|\vec{v}| = \sqrt{4 + \frac{4}{9} + 1} = \sqrt{\frac{49}{9}} = \frac{7}{3}$

$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v} = 5 - 3 = 2$

d(P,r)= $\sqrt{\frac{61}{4} - \frac{4}{49/9}} = \sqrt{\frac{61}{4} - \frac{36}{49}} = \sqrt{\frac{61\cdot49 - 36\cdot4}{49\cdot4}} = \frac{\sqrt{2845}}{14} \approx 3.81$

Ejercicio 11. Hallar la ecuación del plano paralelo a π:3x+2y-6z+3=0 y que dista 4 unidades de la recta r: $\begin{cases} x = 2-3t \\ y = -t \\ z = -3 \end{cases}$

Si estudiamos la posición relativa del plano y la recta, veamos que se cortan, luego cualquier otro plano paralelo a π cortará también a la recta dada, y por lo tanto, no puede distar 4 unidades de la misma.



Ejercicio 12. Hallar la distancia del punto A(1,2,3) a cada uno de los ejes coordenados

El eje OX tiene vector director $\vec{v}_{0x}=(1,0,0)$ y un punto Q(0,0,0)

d(A,r)= $\sqrt{|\overrightarrow{AQ}|^2-\left|\frac{\overrightarrow{AQ}\cdot\vec{v}_r}{|\vec{v}_r|}\right|^2}$

$\overrightarrow{AQ}=(-1,-2,-3)$ $|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$

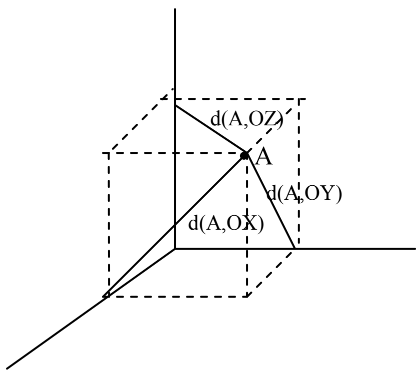
$\overrightarrow{AQ}\cdot\vec{v}_{ox}=-1$

d(A,OX)= $\sqrt{14-\left|\frac{-1}{1}\right|^2}=\sqrt{13}=\sqrt{2^2+3^2}\ u(Pitagoras)$

Haciendo lo mismo en los otros dos ejes:

d(A,OY)= $\sqrt{10}=\sqrt{1^2+3^2}$ u

d(A,OZ)= $\sqrt{5}=\sqrt{1^2+2^2}$ u



Ejercicio 13. Hallar la distancia entre las rectas r: $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-2}$ y s:$\begin{cases} x+y+z=1 \\ -x+y+2z=1 \end{cases}$

Veamos la posición relativa entre las dos rectas:

r: $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-2}$ → P(2,0,-1), $\vec{v}_r=(3,2,-2)$

s: $\begin{cases} x+y+z=1 & (1) \\ -x+y+2z=1 & (2) \end{cases}$ (2)+(1) → 2y+3z=2 → y=1-3z/2 ; x=1-1+3z/2-z=z/2

s: $\begin{cases} x=\lambda/2 \\ y=1-3\lambda/2 \\ z=\lambda \end{cases}$ → Q(0,1,0) , $\vec{v}_s=(1,-3,2)$

$\left.\begin{array}{l} \text{rang}(\vec{v}_r,\vec{v}_s)=2 \\ \text{rang}(\vec{v}_r,\vec{v}_s,\overrightarrow{PQ})=3 \end{array}\right\}$ Se cruzan.

$$d(r,s)=d(s,\pi)=d(Q,\pi)=\frac{|\vec{n}_\pi\cdot\overrightarrow{PQ}|}{|\vec{n}_\pi|}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{PQ},\vec{v}_r,\vec{v}_s\right]\right|}{|\vec{v}_r\times\vec{v}_s|}=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{|(-2,-8,-11)|}=\frac{15}{\sqrt{189}}\approx 1{,}09\ u$$

Ejercicio 14. Hallar la distancia entre la recta que pasan por los puntos A(1,0,0) y B(0,1,1) y el eje OY

La recta que pasa por A y B → r: $\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ y el eje OY: $\begin{cases} x=0 \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases}$.

$\vec{v}_r=(-1,1,1)$ y $\vec{v}_s=(0,1,0)$ $\overrightarrow{PQ}=(1,0,0)$

$\left.\begin{array}{l} \text{rang}(\vec{v}_r,\vec{v}_s)=2 \\ \text{rang}(\vec{v}_r,\vec{v}_s,\overrightarrow{PQ})=3 \end{array}\right\}$ Se cruzan

$$d(r,s)=d(s,\pi)=d(Q,\pi)=\frac{|\vec{n}_\pi\cdot\overrightarrow{PQ}|}{|\vec{n}_\pi|}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{PQ},\vec{v}_r,\vec{v}_s\right]\right|}{|\vec{v}_r\times\vec{v}_s|}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|(1,0,1)|}=\frac{|1|}{\sqrt{2}}\approx 0{,}7071\ u$$

Ejercicio 15. Calcular la distancia entre el punto P(1,-1,3) y la recta r: $\begin{cases} x - z = 0 \\ y + 4 = 0 \end{cases}$

La recta en paramétricas puede expresarse como r: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -4 \\ z = \lambda \end{cases}$, Q=(0,-4,0) y $\vec{v}_r = (1,0,1)$

$\overrightarrow{PQ} = (1,3,3)$ $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{19}$ $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}_r = 4$ $|\vec{v}_r| = \sqrt{2}$

d(P,r)= $\sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2 - \left|\dfrac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}_r}{|\vec{v}_r|}\right|^2} = \sqrt{19 - \left|\dfrac{4}{\sqrt{2}}\right|^2} = \sqrt{19 - \dfrac{16}{2}} = \sqrt{11}$ u

Ejercicio16. Hallar la distancia entre las rectas r: $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ y s: $\begin{cases} x - z = 0 \\ y + 4 = 0 \end{cases}$

Las rectas se cruzan:

$$d(r,s) = d(s,\pi) = d(Q,\pi) = \frac{|\vec{n}_\pi \cdot \overrightarrow{PQ}|}{|\vec{n}_\pi|} = \frac{\left|[\overrightarrow{PQ}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]\right|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ u}$$

Ejercicio17. Calcular la distancia entre el plano π: 2x+3y-z+3=0 y π': -4x-6y+2z+6=0

Veamos primero la posición relativa entre los dos planos:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'} \rightarrow \frac{2}{-4'} = \frac{3}{-6'} = \frac{-1}{2} \neq \frac{3}{6} \rightarrow son \ \ paralelos$$

$\pi \rightarrow \vec{n}_\pi = (2,3,-1)$ $P(0,0,3)$

$\pi' \rightarrow \vec{n}_{\pi'} = (-4,-6,2)$ $Q(0,0,-3)$

$\overrightarrow{PQ} = (0,0,-6)$, $\left|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}_\pi\right| = |6| = 6$, $|\vec{n}_\pi| = \sqrt{14}$

d(π,π')=d(P,π')= $proy_{\vec{n}_\pi}(\overrightarrow{PQ}) = \dfrac{\left|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}_\pi\right|}{|\vec{n}_\pi|} = \dfrac{6}{\sqrt{14}} = \dfrac{6\sqrt{14}}{14} = \dfrac{3\sqrt{14}}{7} u$

4.4Proyecciones

Las proyecciones de un punto P sobre en un plano o una recta son los puntos situados en éstos y que distan la menor distancia de P. Para proyectar una recta se proyectan dos puntos de la misma.

4.4.1. Proyección de un punto sobre un plano

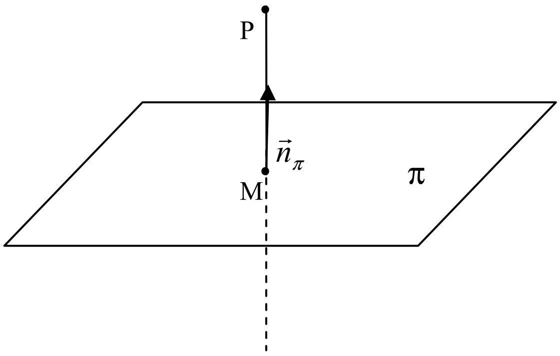
La proyección de un punto P sobre un plano π, es el punto M situado en el plano a la menor distancia de P. Calculando este punto podremos determinar la distancia entre el plano y el punto como la distancia entre P y su proyección M.

El punto M es tal que la recta que pasa por P y M es perpendicular al plano. Así obtendremos M, como intersección del plano π con la recta normal a π que pasa por P.

Pasos para obtener M:

1. Calculamos la recta perpendicular a π (vector director $\vec{v}=\vec{n}_\pi=(A,B,C)$) y que pasa por P

2. Calculamos la intersección del plano π con la recta obtenida en 1.



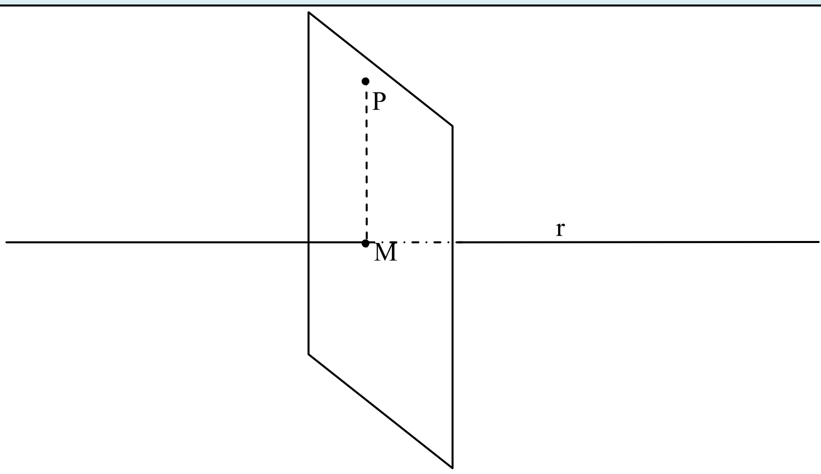
4.4.2. Proyección de un punto sobre una recta

La proyección de un punto P sobre una recta, es el punto M situado en la recta a la menor distancia de P. Calculando este punto podremos conocer la distancia entre la recta y el punto como la distancia entre P y su proyección M.

Pasos para obtener M:

1. Calculamos el plano perpendicular a r (vector normal $\vec{n}_\pi=\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$) y que pasa por P

2. Calculamos la intersección de la recta r y el plano obtenido en 1.



4.4.3. Proyección de una recta en un plano

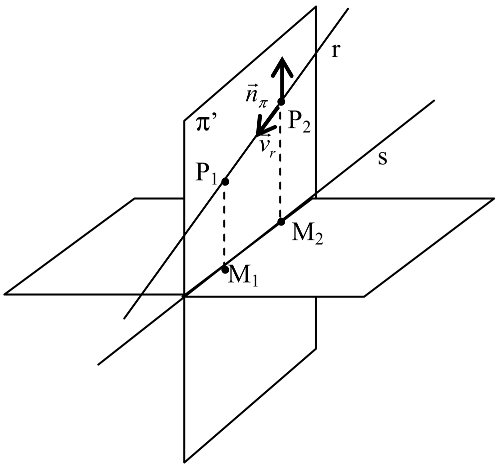
La proyección de una recta r (vector director $\vec{v}_r$ y punto P) sobre un plano π (vector normal $\vec{n}_\pi$ y punto Q), es otra recta s situada en el plano y tal que la proyección de cualquier punto de r sobre π se encuentra en s. Dos formas de obtener la proyección:

a) Dos pasos:

1. Obtenemos la proyección de dos puntos de r, P_1 y P_2, sobre π (M_1 y M_2)
2. Calculamos la recta que pasa por M_1 y M_2.

b) Dos pasos:

1. Hallamos el plano π' que pasa por r y es perpendicular a π. Dos vectores directores del plano son, $\vec{v}_r=(v_x,v_y,v_z)$, y el vector normal del plano π, $\vec{n}_\pi=(A,B,C)$. Un punto del plano es el punto P de la recta
2. La proyección s es la recta intersección entre los dos plano π y π'



Ejercicio 18. Calcular las siguientes proyecciones

a) Proyección del punto P(4,-2,1) en el plano π: 3x-2y-2z=-2

Paso 1: Calculemos la recta r que pasa por P y perpendicular a π: r: $\begin{cases} x=4+3\cdot\lambda \\ y=-2-2\lambda \\ z=1-2\lambda \end{cases}$

Paso 2: Intersección r y π: 3(4+3λ)-2(-2-2λ)-2(1-2λ)=-2→λ=-16/17→ M $\left(\frac{20}{17},\frac{-2}{17},\frac{49}{17}\right)$

b) Proyección del punto P(4,-2,1) sobre a la recta $r:\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-7}{-1}$

Paso 1: Calculemos el plano π que pasa por P y perpendicular a r:

π:3x+5y-z+D=0. Pasa por P → 12-10-1+D=0 D=-1. Luego π:3x+5y-z-1=0

Paso 2: intersección r:(x,y,z)=(1+3λ,1+5λ,7-λ) → 3·(1+3λ)+5·(1+5λ)-(7-λ)-1=0 →λ=0 → M(1,1,7)

c) La recta r: $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}$ en el plano π:x+2y+z=1

Lo haremos por el segundo método:

Paso 1: Calculamos el plano que contiene a r (es decir pasa por P(2,0,-1) y el vector director $\vec{v}$=(3,1,-1)) y perpendicular a π (es decir el otro vector director $\vec{w}=\vec{n}_{\pi}$ =(1,2,1)) → π: $\begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=3x-4y+5z-1=0$

Paso 2: La recta s es la intersección de π y π':

s: $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 3x-4y+5z=1 \end{cases}$

4.5. Elementos simétricos

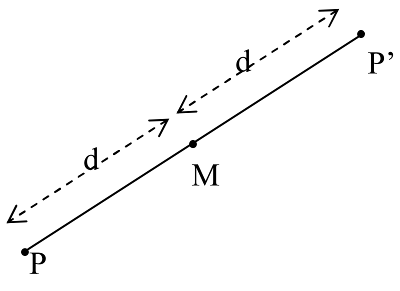
En este apartado veremos los siguientes elementos simétricos:

- Punto respecto a otro
- Punto respecto a un plano
- Punto respecto a una recta
- Recta respecto un plano

4.5.1. Simétrico de un punto respecto a otro punto.

El simétrico de un punto P(P_x,P_y,P_z) respecto a un punto M(M_x,M_y,M_z) es otro punto P'(x,y,z), tal que M es el punto medio del segmento PP'. Se cumple entonces:

$$\frac{P_x+x}{2}=M_x,\ \frac{P_y+y}{2}=M_y,\ \frac{P_z+z}{2}=M_z \rightarrow P'=(2M_x-P_x, 2M_y-P_y, 2M_z-P_z)$$

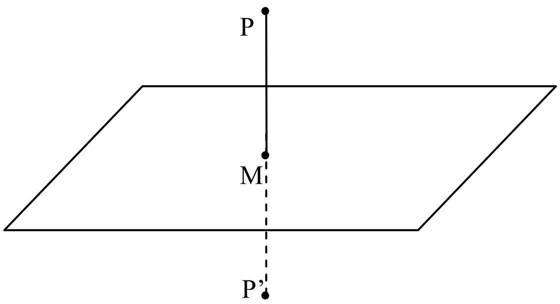


4.5.2. Simétrico de un punto respecto a un plano.

El simétrico de un punto P respecto de un plano π, es otro punto P', tal que se cumple que los dos puntos equidistan del plano, y la recta que pasa por P y P' es perpendicular a π. Para calcular P' dos pasos:

Paso 1: Calculamos M, la proyección de P sobre π.

Paso 2: El simétrico P' es el punto simétrico de P respecto M.

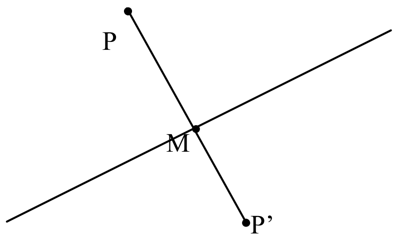


4.5.3. Simétrico de un punto respecto a una recta.

El simétrico de un punto P respecto de una recta r, es otro punto P', tal que se cumple que los dos puntos equidistan de la recta, y la recta que pasa por P y P' corta y es perpendicular a r. Para calcular P' dos pasos:

Paso 1: Calculamos M, la proyección de P sobre r.

Paso 2: El simétrico P' es el punto simétrico de P respecto a M.

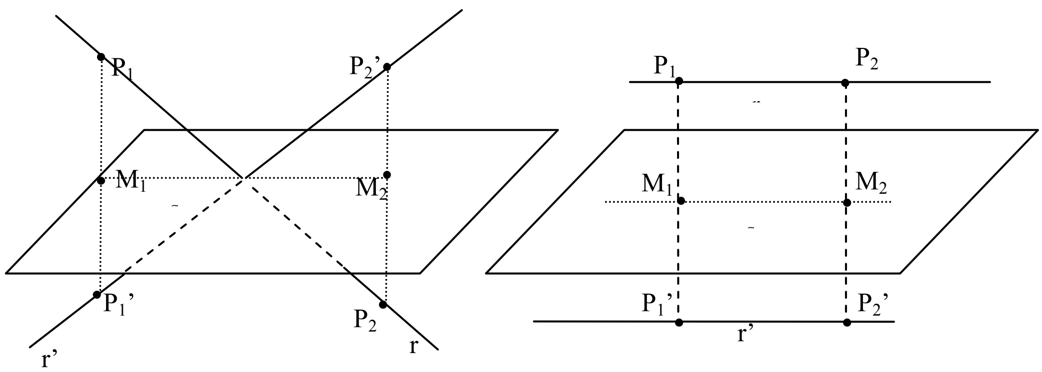


4.5.4. Simétrico de una recta respecto a un plano.

Sea una recta r y un plano π, el simétrico de la recta r sobre el plano π es otra recta r', que es la que se vería reflejada en el plano si este fuera un espejo. Para obtenerla dos pasos.

Paso 1: Tomamos dos puntos de r, P_1 y P_2 y calculamos sus simétricos respecto π, P_1' y P_2'. Si uno de los puntos que tomamos es el punto de intersección de la recta y el plano (siempre que se corten), su simétrico es el mismo.

Paso 2: La recta buscada es la que contiene a P_1' y P_2'



Ejercicio 19. Hallar el simétrico del origen respecto al plano π: x+y+z=1

Simétrico de P(0,0,0) respecto el plano π:x+y+z=1.

Paso 1: Calculamos M, proyección de P respecto a π. Para ello vemos la intersección de π con una recta que pasa por P y es perpendicular a π.

a) Recta perpendicular a π por P: un vector director de la recta es el vector normal del plano π→ $\vec{v}_r = \vec{n}_\pi$=(1,1,1). De esta forma r:(x,y,z)=(0+λ,0+λ,0+λ).

b) La proyección M: λ+λ+λ=1 → λ=1/3 → M($\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}$). De esta forma P' se calcula como el simétrico de P respecto M:

Paso2 : Simétrico de P respecto de M.

P'=($2M_x - P_x, 2M_y - P_y, 2M_z - P_z$) → P($\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}$)

Ejercicio 20. Hallar el simétrico de P(2,0,1) res pecto a la recta r:$\frac{x}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{1}$

Paso 1: Calculemos la proyección M de P sobre la recta r.

a) Primero calculemos el plano π, perpendicular a r que pasa por P. Su vector normal es $\vec{n}_\pi = (2,-1,1)$ y el punto P(2,0,1), luego π:2x-y+z+D=0. Para calcular D obliguemos que P pase por π→4+1+D=0 →D=-5. Así π:2x-y+z-5=0

b) Para hallar la intersección de π con r expresamos la recta en paramétricas r:(x,y,z)=(2λ,3-λ,2+λ). Así M será 2·(2λ)-(3-λ)+(2+λ)-5=0 → λ=1→ M(2,2,3).

Paso 2: Simétrico de P respecto de M.

Las coordenadas de P' son entonces: P'=($2M_x - P_x, 2M_y - P_y, 2M_z - P_z$) → P(2,4,5)

Ejercicio 21. Dado el plano π:x-y+z=0 hallar el simétrico de r:$x - 1 = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{3}$

Paso 1: Calculemos el simétrico del punto P_1(1,0,1) sobre π. Calcularemos la intersección de π y r, P_2, cuyo simétrico es el mismo punto:

a) simétrico de P_1→ calculamos la recta t que pase por P_1 y perpendicular a π ($\overrightarrow{n_\pi} = \vec{v} = (1,-1,1)$). La intersección de π y t será M_1 proyección de P_1 en π: t:(x,y,z)=(1+λ,-λ,1+λ). La intersección será (1+λ)-(-λ)+(1+λ)=0, λ=-2/3 → M_1=($\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}$).

Simétrico P_1'=($2M_{1x} - P_{1x}, 2M_{1y} - P_{1y}, 2M_{1z} - P_{1z}$)=($\frac{-1}{3},\frac{4}{3},\frac{-1}{3}$)

b) Intersección de π y r será P_2 cuyo simétrico es el mismo P_2'=P_2. r:(x,y,z)=(1+λ,3λ,1+3λ). De esta forma la intersección con π: 1+λ-(3λ)+1+3λ=0 λ=-2 → P_2=P_2'(-1,-6,-5)

Paso2: La recta r' buscada pasa entonces por los puntos P_2'(-1,-6,-5) y P_1'($\frac{-1}{3},\frac{4}{3},\frac{-1}{3}$). El vector director de la recta es $\overrightarrow{P_2'P_1'} = (\frac{2}{3},\frac{22}{3},\frac{14}{3})$. Podemos usar un vector proporcional $\vec{v}_{r'} = (2,22,14)$ → r': $\frac{x+1}{2} = \frac{y+6}{22} = \frac{z+5}{14}$

4.6. Rectas que se apoyan en otras rectas.

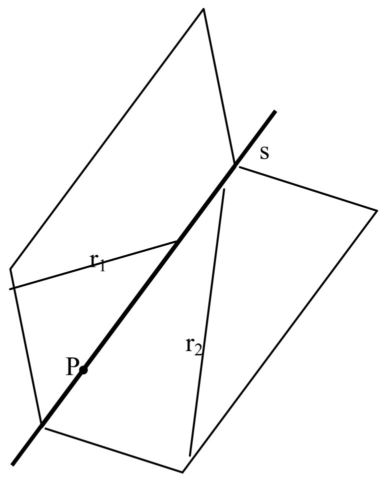
4.6.1. Se apoya en las dos rectas y pasa por otro punto

Dadas dos rectas r_1 y r_2 y un punto P, buscamos otra recta s que corte a estas dos rectas (se apoye) y que pase por el punto P. Para obtener la recta s tenemos que utilizar el siguiente procedimiento analítico en 3 pasos:

Paso 1: Hallamos el plano π_1 que contiene a r_1 y a P

Paso 2: Hallamos el plano π_2 que contiene a r_2 y a P

Paso 3: La recta buscada es la intersección de π_1 y π_2.



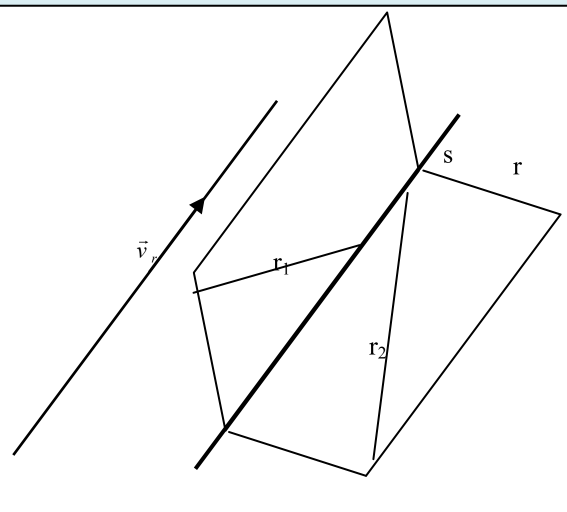
4.6.2. Se apoya en las dos rectas y es paralela a otra dada

Buscamos una recta s tal que corte otras dos dadas, r_1 y r_2, y que sea paralela a otra r, con vector director $\vec{v}_r$. Para obtenerla usaremos el siguiente procedimiento geométrico con 3 pasos:

Paso 1: Hallamos el plano π_1 que contiene a la recta r_1 y un vector director $\vec{v}_r$.

Paso 2: Hallamos el plano π_2 que contiene a la recta r_2 y un vector director $\vec{v}_r$.

Paso 3: La recta s buscada es la intersección de π_1 y π_2



Ejercicio 22. Determinar la ecuación de la recta que se apoya en las rectas:

$r_1 = \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$ y $r_2 = \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{3}$ y pasa por P(1,-1,2)

Paso 1: Cálculo del plano π_1 que se apoya en r_1 y pasa por P: el vector $\vec{v}_{r1} = (-2,1,3)$ es director del plano, además pasa por los puntos P(1,-1,2) y por cualquiera de la recta, en concreto por $Q_1(1,0,-1)$. Con estos dos puntos formamos otro vector director del plano $\overrightarrow{PQ_1} = (0,1,-3)$. Tomando Q como punto del plano; la ecuación del plano en expresión general es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -2 & 0 \\ y & 1 & -1 \\ z+1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_1 : 3x+3y+z-2=0$$

Paso 2: calculo del plano π_2 que se apoya en r_1 y pasa por P: pasa por los puntos P(1,-1,2) y por cualquiera de la recta, por ejemplo $Q_2(0,2,2)$, además tiene un vector director $\vec{v}_{r2} = (2,-1,3)$.El otro vector director será $\overrightarrow{Q_2P} = (1,-3,0)$. La ecuación de π_2 es:

$$\begin{vmatrix} x-0 & 2 & 1 \\ y-2 & -1 & -3 \\ z-2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_2 : 9x+3y-5z+4=0$$

Paso 3: s es la intersección de π_1 y π_2

$$s: \begin{cases} 3x+3y+z-2=0 \\ 9x+3y-5z+4=0 \end{cases}$$

4.7. Cálculo de áreas y volúmenes

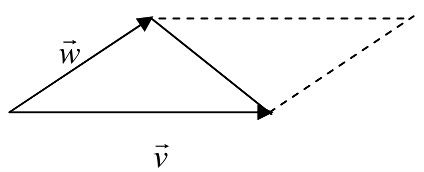
4.7.1. Áreas del triángulo y del paralelogramo

El área de un paralelogramo de lados no paralelos, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ viene definido como ya vimos en el producto vectorial:

$$A_{\text{paralelogramo}} = |\vec{v} \times \vec{w}|$$

El área de un triángulo, cuyos dos lados contiguos están definidos por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$, será igual a la mitad del área del paralelogramo cuyos lados no paralelos están definidos por los mismos vectores.

$$A_{\text{triángulo}} = \left|\frac{\vec{v} \times \vec{w}}{2}\right|$$



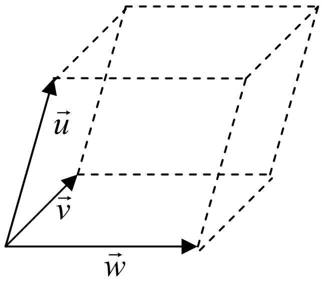
4.7.2. Volumen del paralelepípedo y del tetraedro.

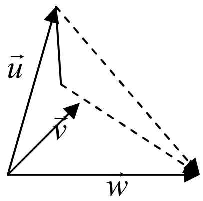
Como vimos en la interpretación del producto mixto de 3 vectores, el volumen de un paralelepípedo de aristas concurrentes en un mismo vértice $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ es:

$$V_{\text{paralelpípedo}}=[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$$

Un paralelepípedo puede descomponerse en 6 tetraedros (pirámides de base triangular) iguales, así que el volumen de un tetraedro de aristas concurrente en un mismo vértice $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ es:

$$V_{\text{tetraedro}}=\frac{1}{6}[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$$





Ejercicio 23. Dada la recta $r:\begin{cases} x-y=0 \\ x+y=z \end{cases}$ y el punto Q(1,2,-1)

a) Hallar la ecuación del plano π que pasa por Q y es perpendicular a r,

$$r: \begin{cases} x-y=0 \\ x+y=z \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=2\cdot\lambda \end{cases} \quad \vec{v}_r=(1,1,2),\ Q(0,0,0)$$

Como el plano π es perpendicular a r entonces $\vec{n}_\pi=\vec{v}_r=(1,1,2)$ y pasa por P(1,2,-1). El plano π tiene de ecuación general:

π: x+y+2z+D=0 → 1+1·2+2(-1)+D=0 → D=-1, luego π: x+y+2z-1=0.

b) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los cortes de π con los ejes de coordenadas;

Corte de π con los ejes coordenados:

Con eje OX: y=z=0 → x=1 → A(1,0,0)

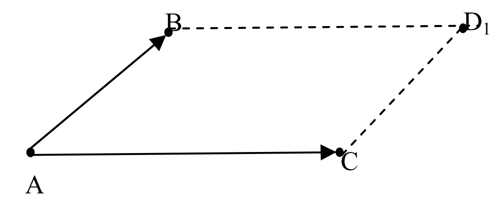
Con eje OY: x=z=0 → y=1 → B(0, 1,0)

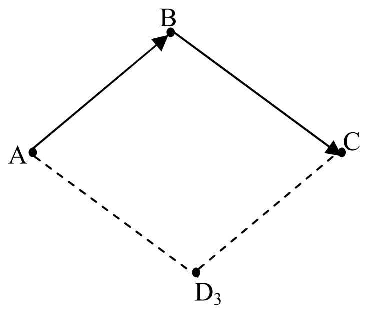
Con eje OZ: x=y=0 → z=½ → C(0,0, ½)

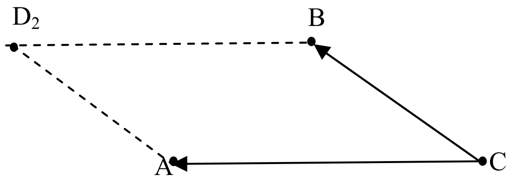
$$a=\frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & ½ \end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\cdot|½\vec{i}-½\vec{j}+\vec{k}|=\frac{1}{2}\sqrt{(½)^2+(½)^2+1^2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3/2}\approx 0{,}612\ u^2$$

Ejercicio 24. Se conocen 3 vértices de un paralelogramo A(1,0,1), B(-1,1,1), C(2,-1,2). Calcular el que falta, ¿cuántas soluciones hay?

Tenemos 3 casos:







$D_1 \rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD_1}$ (1,-1,1)=(x+1,y-1,z-1) $\rightarrow$ D_1=(0,0,2)

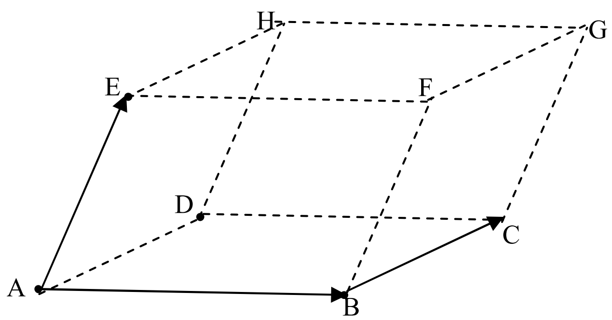
$D_2 \rightarrow \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BD_2}$ (-1,1,-1)=(x+1,y-1,z-1)$\rightarrow D_2$=(-2,2,0)

$D_3 \rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{D_3C}$ (-2,1,0)=(2-x,-1-y,2-z) $\rightarrow D_3$=(4,-2,2)

b) El área del paralelogramo es igualen los tres (probar)

$a_1=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=a_2=|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CA}|=a_3=|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}|=\sqrt{6}\ u^2$

Ejercicio 25. Halla el volumen del paralelepípedo de bases ABCD y EFGH, sabiendo que A(8,0,0), B(0,8,0), C(0,0,8) y E(8,8,8). Obtener las coordenadas del resto de vértices.



D $\rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ $\rightarrow$ (0,-8,8)=(x-8,y-0,z-0) $\rightarrow$ D(8,-8,8)

H $\rightarrow \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DH}$ $\rightarrow$ (0,8,8)=(x-8,y+8,z-8) $\rightarrow$ H(8,0,16)

G $\rightarrow \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}$ $\rightarrow$ (0,8,8)=(x-0,y-0,z-8) $\rightarrow$ G(0,8,0)

F $\rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$ $\rightarrow$ (-8,8,0)=(x-8,y-8,z-8) $\rightarrow$ F(0,16,8)

$V=[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}]=1024u^3$

Ejercicios de la P.A.U.

Junio 2004. Prueba A

PR-2. Sea la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+1=0 \\ 2x-z+3=0 \end{cases}$. **a)** Escríbase la recta en forma paramétrica.

b) Para cada punto P de *r*, determínese la ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente al eje OZ

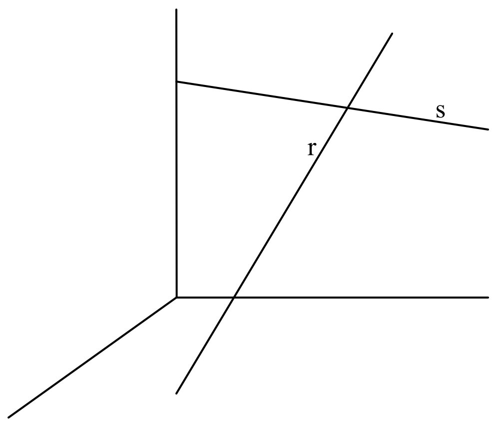
a) Paramétricas → z=3+2x, y=-1-x. Llamando x=λ → $r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=-1-\lambda \\ z=3+2\lambda \end{cases}$

b) Cada punto P de r cumple P=(x,y,z)=(λ,-1-λ,3+2λ) ∀λ∈R. Si es perpendicular al eje OZ la recta está situada en el plano perpendicular a OZ, y por tanto su vector normal es $\vec{n}_\pi=(0,0,1)$. Conocido entonces el vector normal y P, el plano es para cada λ:

$\pi \equiv z+D=0 \; como \; P\in\pi \to 3+2\lambda+D=0 \to D=-3-2\lambda \; \to \pi \equiv z-3-2\lambda=0$.

La recta será la que pase por P y la intersección (Q) de π con eje OZ (x=0,y=0) z=3+2λ. Luego Q(0,0,3+2λ)

Para cada λ la recta pasa por P(λ,-1-λ,3+2λ) y Q(0,0, 3+2λ), con vector director $\vec{v}_s=\overrightarrow{PQ}=(-\lambda,1+\lambda,0)$. Así la ecuación en forma continua es $s\equiv\frac{x}{-\lambda}=\frac{y}{1+\lambda}, z=3+2\lambda$



C-4 Determínese si el plano π:2x+3y-4=0 corta o no al segmento de extremos A(2,1,3) y B(3,2,1) .

La ecuación de la recta que pasa por A y B en paramétricas es ($\vec{v}_r=\overrightarrow{AB}=(1,1,-2)$)

r: $\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=3-2\lambda \end{cases}$.

Los puntos de la recta que están entre A y B son los de la recta siempre que λ∈[0,1], ya que si λ=0 el punto de r es A(2,1,3) y si λ=1 es B(3,2,1)

Veamos la intersección de r con π → 2·(2+λ)+3·(1+λ)-4=0 → 5λ=-3 → λ=-3/5. El punto no pertenece a la recta ya que -3/5∉[0,1].

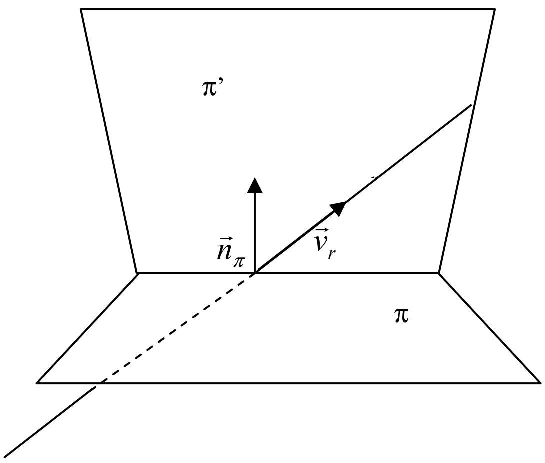
Junio 2004. Prueba B

C-3. Hállese la ecuación del plano que contiene a la recta *r: x =y=z* y es perpendicular al plano π: x+y-z-1=0

Llamemos π' al plano que buscamos

La recta r tiene como vector director $\vec{v}_r = (1,1,1)$ y pasa por el punto P(0,0,0). Este vector será director del plano. Si el plano π es perpendicular al plano π' entonces el vector normal de π ($\vec{n}_\pi = (1,1,-1)$) es otro vector director del plano buscado. Luego el plano en paramétricas es:

$$\pi': \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = \lambda + \mu \\ z = \lambda - \mu \end{cases}$$



Septiembre 2004. Prueba A

PR-1. Sea *m* un número real y sean *r* y π la recta y el plano dados respectivamente por

$$r \equiv \begin{cases} 2x - my + z = 2 - m \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \qquad \pi \equiv 3x + 2z = 2 - m.$$

a) Estúdiese la posición relativa de *r* y π en función del valor de *m*.

b) Para el valor *m*=1, hállese la ecuación del plano que pasa por el punto de corte de *r* y π y es perpendicular a la recta *t: x=y=z*.

a) Posición relativa de $r \equiv \begin{cases} 2x - my + z = 2 - m \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ π:3x+2z=2-m

Tenemos que ver el rango de la siguiente matriz: $M = \begin{pmatrix} 2 & -m & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} 2 & -m & 1 & 2-m \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 2-m \end{pmatrix}$

<u>Rango de M:</u>

|M|=-m+2≠0 →

$\forall m \in R-\{2\}$ rang(M)=3.

Si m=2 rang(M)=2

<u>Rango de M'</u>:

$\forall m \neq 2$ → rang(M')=3,

m=2 → $M' = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ rang(M'(m=2))=2.

	m=2	m=R-{2}
rang(M)	2	3
rang(M')	2	3
Posición relativa	r contenida en π	Se cortan

b) m=1 → r y π se cortan en el punto solución del sistema $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 2z = 1 \end{cases}$.

Resolviendo el sistema el punto buscado es M(1,0,-1)

Si es perpendicular a t≡ $x = y = z$, entonces se cumple que el vector normal al plano buscado es igual al vector normal de la recta t → $\vec{n}_\pi = \vec{v}_r = (1,1,1)$, luego el plano es π'=x+y+z+D=0, y al pasar por M, entonces 1-1+D=0 → D=0 → π'=x+y+z=0

C-2: Calcúlese la distancia entre las rectas *r* y *s* de ecuaciones

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 0 \\ z = -\lambda \end{cases} \quad , \quad s \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{-1}$$

Para calcular la distancias entre dos rectas:

1) primero tenemos que ver la posición relativa de las dos:
   $\vec{v}_r = (2,0,-1), P(1,0,0) \quad \vec{v}_s = (-1,1-1), Q(0,3,2)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{rang}(\vec{v}_r, \vec{v}_s)=2 \\ \\ \text{rang}(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{PQ})=3 \end{array}\right\} \text{Se cruzan}$$

$$d(r,s) = d(s,\pi) = d(Q,\pi) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{n}_\pi|} = \frac{|(\vec{v}_r \times \vec{v}_s) \cdot \overrightarrow{PQ}|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{\left|[\overrightarrow{PQ}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]\right|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|}$$

$$\left[\overrightarrow{PQ},\vec{v}_r,\vec{v}_s\right]=\begin{vmatrix}2 & 0 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & 3 & 2\end{vmatrix}=12$$

$$\vec{v}_r\times\vec{v}_s=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 0 & -1\\ -1 & 1 & -1\end{vmatrix}=\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k} \rightarrow |\vec{v}_r\times\vec{v}_s|=\sqrt{1+9+4}=\sqrt{14}$$

$$d(r,s)=\frac{12}{\sqrt{14}}=\frac{12\sqrt{14}}{14}=\frac{6\sqrt{14}}{7}\ u$$

Septiembre 2004. Prueba B

C-2: Hállese la ecuación general del plano que pasa por los puntos A(2,2,-1), B(4,0,2) y es perpendicular al plano $\pi\equiv x-5y+2z-6=0$.

Si pasa por estos dos puntos y es perpendicular al plano, tenemos dos vectores directores del plano buscado: $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(2,-2,3)$ y $\vec{v}=\vec{n}_\pi=(1,-5,2)$.

El plano π' en paramétricas es π': $\begin{cases}x=2+2\lambda+\mu\\ y=2-2\lambda-5\mu\\ z=-1+3\lambda+2\mu\end{cases}$ →General : $\begin{vmatrix}x-2 & y-2 & z+1\\ 2 & -2 & 3\\ 1 & -5 & 2\end{vmatrix}=0$

π: 11x-y-8z-28=0

Septiembre de 2005. Prueba A.

PR-1: a) Calcúlense los valores de *a* para los cuales las rectas

$r\equiv\begin{cases}3x+ay-6az+1=0\\ -x+y+3z-3=0\end{cases}$ y $s\equiv\begin{cases}x=-1-\lambda\\ y=3+\lambda\\ z=1+a\lambda\end{cases}$ son perpendiculares.

b) Para a=1, calcúlese la recta que pasa por (1,1,1) y se apoya en *r* y *s*.

a) Son perpendiculares si sus vectores directores lo son. Para calcular el vector director de r tenemos que expresar ésta en forma paramétrica:

Operando: (1)+3(2) → (a+3)y+(9-6a)z-8=0 → $y=\frac{6a-9}{a+3}z+\frac{8}{a+3}$ → sustituyendo en (2) x=$\frac{6a-9}{a+3}z+\frac{8}{a+3}$+3z-3= $\frac{9a}{a+3}z+\frac{-3a-1}{a+3}$.

De esta forma:

$$r:\begin{cases} x=\dfrac{9a}{a+3}\lambda-\dfrac{3a+1}{a+3} \\ y=\dfrac{6a-9}{a+3}\lambda+\dfrac{8}{a+3} \\ z=\lambda \end{cases} \rightarrow \quad \vec{v}_r=\left(\frac{9a}{a+3},\frac{6a-9}{a+3},1\right)$$

El vector director de la recta s es $\vec{v}_s=(-1,1,a)$

$$r\perp s \rightarrow \vec{v}_r\perp\vec{v}_s \rightarrow \vec{v}_r\cdot\vec{v}_s=-\frac{9a}{a+3}+\frac{6a-9}{a+3}+a=0 \rightarrow \frac{-9a+6a-9+a^2+3a}{a+3}=0\rightarrow$$

$$\frac{a^2-9}{a+3}=a-3=0 \rightarrow \text{a=3}$$

b) a=1 → $r:\begin{cases} x=\dfrac{9}{4}\lambda-1 \\ y=-\dfrac{3}{4}\lambda+2 \\ z=\lambda \end{cases}$ $\vec{v}_r=(9,-3,4)$, $P_r(-1,2,0)$

→ $s:\begin{cases} x=-1-\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}$ $\vec{v}_s=(-1,1,1)$, $P_s(-1,3,1)$

<u>Paso 1</u>: plano π_1 que pasa por r y Q(1,1,1) →

Dos vectores directores del plano: $\vec{v}_r=(9,-3,4)$ y $\overrightarrow{P_rQ}$=(2,-1,1) y pasa por Q(1,1,1):

$$\pi_1:\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 9 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0 \rightarrow \pi_1: x-y-3z+3=0$$

<u>Paso 2</u>: Plano π_2 que pasa por s y Q(1,1,1) →

Dos vectores directores del plano $\vec{v}_s=(-1,1,1)$ y $\overrightarrow{P_sQ}$=(2,-2,0)

$$\pi_2:\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}=0 \rightarrow \pi_1: 2x+2y-4=0$$

<u>Paso 3</u>: La recta es la intersección de π_1 y π_2 → t: $\begin{cases} x-y-3z+3=0 \\ 2x+2y-4=0 \end{cases}$:

C-3.- Calcúlese el simétrico de $P(1,1,1)$ respecto del plano π: $x+y+z=0$.

Paso 1: Calculamos el punto M proyección de P sobre π:

1) Calculamos la recta r perpendicular a π y que pasa por P(1,1,1) : $\vec{v}_r = \vec{n}_\pi = (1,1,1)$

r:(x,y,z)=(1+λ,1+λ,1+λ)

2) Intersección de π con r→ (1+λ)+(1+λ)+(1+λ)=0 → λ=-1 → M(0,0,0)

Paso 2: El simétrico P' de P respecto π es también el simétrico de P respecto de M, siendo M el punto medio de P y P' $0=\frac{x+1}{2}$, $0=\frac{y+1}{2}$, $0=\frac{z+1}{2}$ → P'(-1,-1-1).

Septiembre de 2005. Prueba B.

C-4: Calcúlese el volumen del tetraedro de vértices *A(1,1,1), B(1,2,3), C(2,3,1), D(3,1,2)*

Para calcular el volumen del tetraedro calculamos los 3 vectores directores que salen del mismo vértice: $\overrightarrow{AB} = (0,1,2)$, $\overrightarrow{AC} = (1,2,0)$, $\overrightarrow{AD} = (2,0,1)$

$$V_{\text{tetraedro}} = \left| \frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{1}{3} \cdot (-8-1) \right| = 3 \text{ u}^3$$

Junio de 2005. Prueba A.

C-2: Calcúlese la distancia del origen al plano π que pasa por $A(1,2,0)$ y contiene a la recta $r \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{3} = z$.

El plano π pasa por A(1,2,0) y contiene a la recta $r \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{3} = z \quad \vec{v}_r = (2,3,1) \quad P(-2,1,0)$

Luego el plano pasa por A(1,2,0), y dos vectores directores del mismo son $\vec{u} = \vec{v}_r = (2,3,1)$ y $\vec{w} = \overrightarrow{AP} = (-3,-1,0)$. El plano en forma continua es:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = x - 3y + 7z + 5 = 0$$

La distancia entre P(0,0,0) y π es

$$d(P,\pi) = proy_{\vec{n}_\pi}(\overline{PQ}) = \frac{\left|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}_\pi\right|}{|\vec{n}_\pi|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{1+9+49}} = \frac{5}{\sqrt{59}} = \frac{5\sqrt{59}}{59} u$$

Junio de 2005. Prueba B.

PR-1: a) Determínese el punto simétrico de $A(-3,1,-7)$ respecto de la recta $r \equiv x+1=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{2}$.

b) Hállese la distancia entre A y r.

a) Pasos para obtener el simétrico:

Paso 1: Obtenemos M, la proyección de A sobre r. Para ello dos pasos:

1) Plano π que contiene a P y perpendicular a r, de esta forma $\vec{n}_\pi=\vec{v}_r=(1,2,2)$, con lo que la ecuación de π:x+2y+2z+D=0→A∈π→-3+2-14+D=0→D=15→π:x+2y+2z+15=0

2) La intersección de r con π es M; la mejor forma de obtener M es poner r en forma paramétrica (x,y,z)=(-1+λ,3+2λ,-1+2λ) y sustituir en π→-1+λ+2(3+2λ)+2(-1+2λ)+15=0

λ=-2 → M(-3,-1,-5)

Paso 2: A' es el simétrico de A respecto de M: $-3=\frac{x-3}{2}$, $-1=\frac{y+1}{2}$, $-5=\frac{z-7}{2}$ →

A'(-3,-3,-3)

b) d(A,r)=d(A,M) siendo M es la proyección de A en r:

$$d(A,r)=d(A,M)=\sqrt{(-3+3)^2+(-1-1)^2+(-5+7)^2}=\sqrt{8}\,u$$

C-2: Dados el punto *A(3,5,-1)* y la recta $r\equiv\frac{x-1}{2}=y+2=\frac{z+1}{4}$, hállese el punto *B* perteneciente a *r* tal que el vector de extremos *A* y *B* es paralelo al plano π de ecuación π: *3x-2y+z+5=0*.

Pongamos r en paramétricas :

$$r:\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=-2+\lambda \\ z=-1+4\lambda \end{cases},$$

El punto B∈r, es por lo tanto, en función de λ: B=(1+2λ,-2+λ,-1+4λ). El vector $\overrightarrow{AB}=(-2+2\lambda,-7+\lambda,4\lambda)$. Si es paralelo al plano π, entonces es perpendicular al vector normal de π ($\vec{n}_\pi=(3,-2,1)$), y por lo tanto $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}_\pi=0$→

3·(-2+2λ)-2·(-7+λ)+1·(4λ)=8λ+8=0 → λ=-1→ B(-1,-3,-5)

Junio de 2006. Prueba A.

PR-1: Sean *r* y *s* las rectas dadas por $r \equiv \begin{cases} 2x - y = m \\ z + 2y = 3 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2z = 3 \end{cases}$.

a) Hállese el valor de *m* para que ambas rectas se corten.

b) Para m=1, hállese la ecuación del plano que contiene a *r* y *s*.

a) M=$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, M'=$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & m \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ → rang(M)=3

Para que se crucen se debe cumplir que |M'|≠0, calculemos el determinante haciendo ceros la 3ª columna:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & m \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & m \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & m \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix} = -(5-5m) \neq 0 \rightarrow m\neq 1$$

Luego, siempre que m≠1, se cruzan

b) Si m=1 entonces rang(M)=rang(M')=3 y las rectas se cortan en un punto.

Para obtener las ecuaciones del plano es necesario conocer un punto y dos vectores directores del mismo. Podemos tomar cualquier punto de las dos rectas y los vectores directores de r y s. Para esto tenemos que poner las rectas en paramétricas:

1) recta r → y=2x-1, z=3-2y=3-2(2x-1)=5-4x

r: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\cdot\lambda - 1 \\ z = -4\cdot\lambda + 5 \end{cases}$ $\vec{v}_r = (1,2,-4)$, $P_r(0,-1,5)$

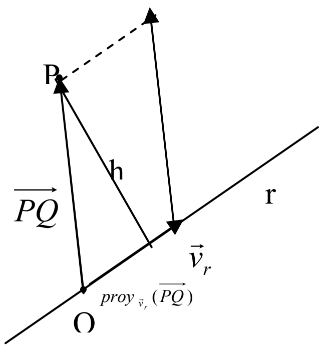
2) recta s → y=2-x, z=3/2-x/2

s: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda + 2 \\ z = -\frac{1}{2}\lambda + \frac{3}{2} \end{cases}$ $\vec{v}_r = (1,-1,-\frac{1}{2})$, $P_r(0,2,\frac{3}{2})$

π: $\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = -1 + 2\lambda - \mu \\ z = 5 - 4\lambda - \frac{1}{2}\mu \end{cases}$

C-2.- Calcúlese la distancia del punto *P(1,1,1)* a la recta $r \equiv \begin{cases} x = -2 + 2\lambda \\ y = 0 \\ z = -\lambda \end{cases}$

Para calcular la distancia de una recta a un punto utilizamos la interpretación del producto escalar (proyección de un vector sobre otro), o del producto vectorial (área del triángulo). Vamos a hacerlo a partir del producto escalar:



Por el teorema de Pitágoras:

d(P,r)=h=$\sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2 - (proy_{\vec{v}_r}(\overrightarrow{PQ}))^2}$

De la recta dada obtenemos Q(-2,0,0) y el vector director $\vec{v}_r = (2,0,-1)$ .De esta forma:

$\overrightarrow{PQ} = (-3,-1,-1)$ → $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}$

$$proy_{\vec{v}_r}(\overrightarrow{PQ}) = \frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}_r}{|\vec{v}_r|} = \frac{-5}{\sqrt{3}}$$

d(P,r)=h=$\sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2 - (proy_{\vec{v}_r}(\overrightarrow{PQ}))^2} = \sqrt{11 - \frac{25}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}}\ u$

Septiembre de 2006. Prueba A.

PR-1. a) Hállese el valor del parámetro a para que la recta r$\equiv \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + y - 5z = 2 \end{cases}$ y el plano π: *ax-y+z+1=0* sean paralelos.

b) Para a=2 calcúlese la ecuación del plano que contiene a r y es perpendicular a π, y hállese la distancia entre r y π

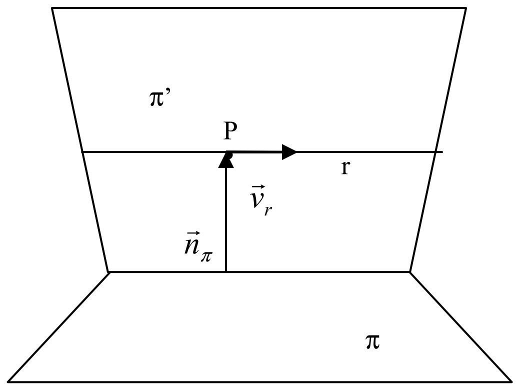
a) Si son paralelos, el vector normal del plano $\vec{n}_\pi = (a,-1,1)$ y el vector director de la recta $\vec{v}_r = (1,-1,2) \times (2,1,-5)$ son perpendiculares, y por lo tanto $\vec{n}_\pi \cdot \vec{v}_r$=0:

$$\vec{n}_\pi \cdot \vec{v}_r = (a,-1,1) \cdot [(1,-1,2) \times (2,1,-5)] = [(a,-1,1), (1,-1,2), (2,1,-5)] = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 3a - 6 = 0$$

(se puede ver la misma condición estudiando la posición relativa de un plano y una recta). Luego para a=2 plano y recta son paralelos.

b) para a=2 el plano $\pi \equiv 2x-y+z+1=0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x-y+2z=1 \\ 2x+y-5z=2 \end{cases}$ Son paralelos.

Si el plano buscado, π', contiene a r, entonces $\vec{v}_r$ es un vector director de π y el punto P de la recta también está del plano π'. Por otro lado, al ser π' perpendicular a π, $\vec{n}_\pi$=(2,-1,1) es el otro vector director de π'.



Tenemos que obtener P y $\vec{v}_r$, para esto pasamos la ecuación de la recta a paramétricas, sumando las dos ecuaciones (1)+(2)→ 3x-3z=3 → x=1+z, sustituyendo en (1)→ y=3z. Con lo que r en paramétricas es

$$r: \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 3\cdot\lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \text{ P(1,0,0)}, \ \vec{v}_r=(1,3,1)$$

La ecuación del plano π' buscado es: $\pi' = \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ → π':4x+y-7z-4=0

La distancia entre r y π, al ser paralelas, viene dada por:

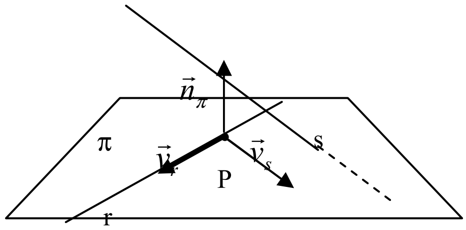
$$d(r,\pi)=d(P,\pi)= proy_{\vec{n}_\pi} \overline{PQ} = \frac{|\overrightarrow{PQ}\vec{n}_\pi|}{|\vec{n}_\pi|} = \frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|2\cdot 1-1\cdot 0+7\cdot 0+1|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}u$$

C-2. Hállense las ecuaciones de la recta *r* que pasa por *P*(2,1,–1) , está contenida en el plano π: x+2y+3z-1=0 y perpendicular a $s \equiv \begin{cases} x = 2z-3 \\ y = z+4 \end{cases}$

Si está contenida en π es necesario que todos los puntos de la recta estén contenidos en el plano, en concreto P. Comprobémoslo: (2+2-3-1=0).

Si r está contenida en π entonces $\vec{v}_r$ es perpendicular a $\vec{n}_\pi$, pero también es perpendicular a s, luego $\vec{v}_r$ es perpendicular a $\vec{v}_s$. Podemos obtener el vector $\vec{v}_r$ a partir del producto vectorial de $\vec{n}_\pi$ y $\vec{v}_s$: $\vec{v}_r = \vec{v}_s \times \vec{n}_\pi$ =(2,1,1)×(1,2,3)=(1,-5,3)

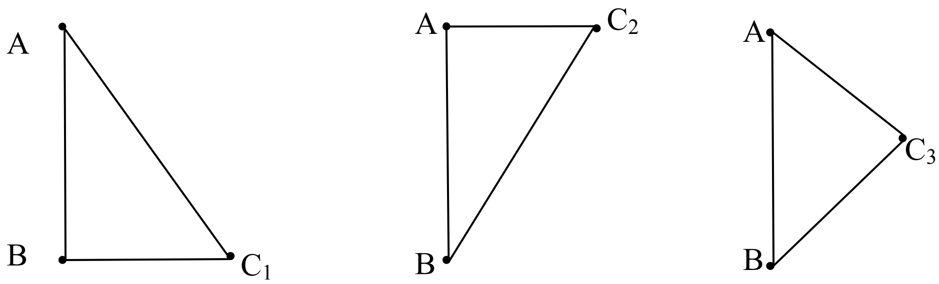
r=(x,y,z)=(2,1,-1)+λ(1,-5,3)



Septiembre de 2006. Prueba B.

C-4. El triángulo *ABC* es rectángulo en *A*, siendo $A(3,0,-1)$, $B(6,-4,5)$, $C(5,3,\ z)$. Calcúlese el valor de *z* y hállese el área del triángulo.

Si es rectángulo, hay tres posibilidades:



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0$ $\quad$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC_2}=0$ $\quad$ $\overrightarrow{AC_3}\cdot\overrightarrow{BC_3}=0$

Como nos dicen en el problema que el ángulo rectángulo es A, el triángulo buscado es el segundo triángulo: $\begin{matrix}\overline{AB}=(3,-4,6)\\ \overline{AC}=(2,3,z+1)\end{matrix}$ → $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\rightarrow 6-12+6z+6=0$ → $z=\frac{0}{6}=0$

$A_{\text{triángulo}}=\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AC}=\frac{1}{2}|\overline{AB}|\cdot|\overline{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{9+16+36}\cdot\sqrt{4+9+1}=\frac{1}{2}\sqrt{61\cdot 14}=\frac{1}{2}\sqrt{854}\ u^2$

Junio de 2007. Prueba A

PR1.- Sea el plano *π: x+y-2z-5=0*, y la recta *r :x=y=z* se pide

a) Calcular la distancia de la recta al plano

b) Hallar un plano que contenga a r y sea perpendicular a π

c) Hallar el punto simétrico de P(-1,3,3) respecto a π

a) Tenemos que ver la posición relativa de ambas

$$\begin{matrix}\pi: x+y-2z=5\\ r:\begin{cases}x-y=0\\ x-z=0\end{cases}\end{matrix} \rightarrow M=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\quad M^*=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 5\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

Veamos la posición relativa:

|M|=0→ rang(M)=2

$\begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ →rang(M*)=3

Luego son paralelos

Pongamos r en paramétricas $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

Un punto de la recta es P(0,0,0) y $\overline{v_r} = (1,1,1)$

Un punto del plano x=0, z=0 →y=5→Q(0,5,0).

Vector normal del plano $\vec{n}_\pi$=(1,1,-2)

$$d(r,\pi) = d(P,\pi) = proy_{\vec{n}_\pi}(\overline{PQ}) = \frac{|\overline{PQ}\cdot\vec{n}_\pi|}{|\vec{n}_\pi|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|0+0+0-5|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{5}{\sqrt{6}}u$$

b) Si contiene a r, el punto P(0,0,0) es del plano y $\overline{v_r}$ es vector director del plano. De igual forma $\vec{n}_\pi$ es otro vector director del plano buscado (ya que π' perpendicular a π)

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi \equiv -3x + 3y = 0$$

c) Pasos:

1) La proyección de P(-1,3,3) sobre a π:
   a. Recta perpendicular a π por P→r: (x,y,z)=(-1+λ,3+λ,3-2λ)
   b. Intersección (-1+λ)+(3+λ)-2(3-2λ)-5=0 → λ=-3/2→M(-2.5, 1.5, 0)
2) El simétrico P' es el simétrico de P respecto de M:

(-2.5, 1.5, 0)=$\left(\frac{x-1}{2}, \frac{y+3}{2}, \frac{z+3}{2}\right)$ → x=-4, y=0, z=-3 → P'(-4,0,-3)

C-3.- Hallar el área del triángulo cuyos vértices son A(1,1,0) , B(2,−1,0) y C(2, 4,0).

$$area = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left|5\vec{k}\right| = 2.5\ u^2$$

Junio de 2007. Prueba B

C-2.- Dadas las rectas $r:\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+2y=7 \end{cases}$ y $s:\begin{cases} x=2 \\ y=-5 \end{cases}$ hallar un punto de cada una de ellas, de tal forma, que el vector que los una sea perpendicular a ambas.

Pongamos las rectas en paramétricas r: $\begin{cases} x=\lambda \\ y=\frac{7}{2}-\frac{\lambda}{2} \\ z=\frac{7}{2}+\frac{\lambda}{2} \end{cases}$ s: $\begin{cases} x=2 \\ y=-5 \\ z=\mu \end{cases}$

Punto de r → P(λ,3.5- 0.5 λ ,3.5+0.5λ)

Punto de s→ Q(2,-5,μ)

$\overline{PQ}=(2-\lambda,-8.5+0.5\lambda,\mu-3.5-0.5\lambda)$

$\overline{PQ}$ perpendicular a $\vec{v_r}=(2,-1,1)$ → $\overline{PQ}\cdot\vec{v_r}$=0 → 4-2λ+8.5-0.5λ+μ-3.5-0.5λ=0

$\overline{PQ}$ perpendicular a $\vec{v_s}=(0,0,1)$ → $\overline{PQ}\cdot\vec{v_s}=0$ → μ-3.5-0.5λ=0

$\left.\begin{array}{r} 9-3\lambda+\mu=0 \\ -3.5-0.5\lambda+\mu=0 \end{array}\right\}$ → λ=5, μ=6

P(5,1,6)

Q(2,-5,6)

Septiembre de 2007. Prueba A

C-2.- Determinar el punto simétrico de *P*(4,0,3) respecto del plano de ecuación *x*=*y*.

π: x-y=0

Para calcular el simétrico seguiremos dos pasos:

1. Calcular la proyección (M):
   a. Recta perpendicular al plano por P → (x,y,z)=(4+λ,-λ,3)
   b. Intersección π y r→ 4+λ+λ=0 →λ=-2. Luego M(2,2,3)
2. El punto buscado, P' es el simétrico de P respecto M:

(2,2,3)=$\left(\frac{x+4}{2},\frac{y+0}{2},\frac{z+3}{2}\right)$ → x=0, y=4, z=3 → P'(0,4,3)

Septiembre de 2007. Prueba B

PR-1.- De una recta *r* se sabe que está contenida en el plano π: *x -y=0*, que *A*(0,0,0) pertenece a *r* , y que el vector que une *A* y *B(1,0,-1)* es perpendicular a *r*. a) Determinar la recta *r*, y b) calcular la distancia entre *r* y el plano paralelo a π que pasa por *B*.

a) Si está contenida en el plano π, el vector director es perpendicular al vector $\overrightarrow{n_\pi}=(1,-1,0)$ También perpendicular al vector $\overline{AB}=(1,0,-1)$. Al ser prependucular a ambos vectores podemos calcular $\overline{v_r}$ por el producto vectorial de éstos:

$$\overline{v_r}=\overline{n_\pi}\times\overline{AB}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=i+j+k=(1,1,1)$$

$$r:\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$$

b) Calculemos π' paralelo a π:x-y=0 y que pasa por B(1,0,-1):

π':x-y+D=0 como B∈π' 1-0+D=0→ D=-1 → π':x-y-1=0

Como r está contenida en un plano paralelo a π', r es paralelo a π', con lo que la distancia es:

d(r,π')= $d(A,\pi')=proy_{\vec{n}_\pi}(\overline{AB})=\frac{\left|\overline{AB}\cdot\vec{n}_\pi\right|}{|\vec{n}_\pi|}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|0-0-1|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}u$

C-2.- Sea *A* el punto medio del segmento de extremos *P(3,2,1)* y *Q(-1,0,1)*. Calcular el volumen del tetraedro de vértices *A*, *B(2,1,3)*, *C(1,2,3)* y *D(3,4,1)*.

Calculemos A→ $A\left(\frac{3-1}{2},\frac{2+0}{2},\frac{1+1}{2}\right)\to A(1,1,1)$

V$_{\text{tetraedro}}$=$\frac{1}{6}[\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}]=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}|-10|=\frac{5}{3}u^3$

Junio de 2008. Prueba A

PR-1.- Sea el plano π:x+ay+2az=4 y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+2z=2 \\ x+2y-z=3 \end{cases}$

a) Determinar los valores de a para que recta y plano sean paralelos

b) Para a=2 calcula la recta que pasa por P(1,0,-1), es paralela a π y se apoya en r.

a) Para que sea paralela no tienen que tener ningún punto en común, y por tanto

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & a & 2a \end{pmatrix}=2 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & a & 2a \end{vmatrix}=5a+-5=0 \rightarrow a=1$$

b) Para a=2→ π:x+2y+4z=4. La recta buscada la denominaremos *s.*

Si la recta buscada pasa por P(1,0,-1) y es paralela a π, entonces está contenida en el plano paralelo a π por P, que lo denominaremos π':

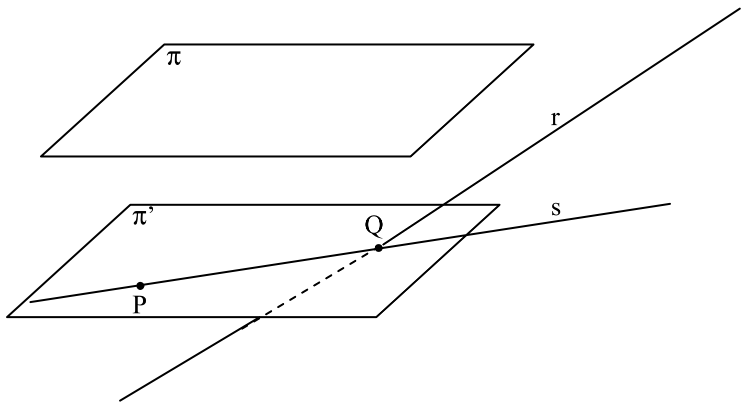
π':x+2y+4z+D=0, calculemos D sabiendo que P(1,0,-1)∈π' → 1-4+D=0→ D=3→ π':x+2y+4z+3=0

La recta buscada se apoya en r, esto quiere decir que la corta, luego podemos calcular el punto de intersección de las dos rectas, como el de corte del plano π' y r.

Q, intersección de $r \equiv \begin{cases} x+y+2z=2 \\ x+2y-z=3 \end{cases}$ y π':x+2y+4z+3=0. Resolviendo el sistema tenemos que Q(7, -13/5, -6/5).

Ya tenemos dos puntos de s, el punto P(1,0,-1) y el punto Q(7,-13/5,-6/5). Con estos dos puntos es fácil calcular s:

$$\overline{PQ}=(6,-13/5,-1/5) \rightarrow \overline{v_s}=(30,-13,-1) \rightarrow s \equiv \frac{x-1}{30}=\frac{y-0}{-13}=\frac{z+1}{-1}$$



C-4.- Sabiendo que tres de los vértices de un paralelogramo son los puntos A(1,1, 2), B(1,1, 4) y C(3,3,6) , hallar el área del mismo.

$$a_{paralelogramo}=\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{matrix}\right\|=\left|-4i+4j\right|=\sqrt{4^2+4^2}=\sqrt{32}\ u^2$$

Junio de 2008. Prueba A

C-4.- Dada la recta r : 2x + y = 2 , calcular el punto P de la recta r tal que la perpendicular a r por P pase por el punto (1,−1) .

Estamos en un problema de 2 dimensiones. La recta r:y=2-2x tiene pendiente m=-2.

Luego la recta perpendicular tiene de pendiente m=1/2=0.5

El punto de la recta buscado es $P(x_0,2-2x_0)$ y por lo tanto la recta será $y-(2-2x_0)=0.5(x-x_0)$. Para hallar el punto obliguemos a que la recta pase por (1,-1)→ $-1-2+2x_0=0.5(1-x_0)$→ $x_0=7/5$. En consecuencia $y_0=2-2\cdot(7/5)=-4/5$, con lo que P(7/5,-4/5)

Septiembre de 2008. Prueba A

C-2.- Hallar la distancia entre el punto A(2,1,4) y la recta $r\equiv\frac{x-1}{2}=y+1=\frac{z}{3}$

De la recta r sabemos su vector director $\overrightarrow{v_r}=(2,1,3)$ y un punto de de r es Q(1,-1,0)

$$d(A,r)=\sqrt{|\overline{AQ}|^2-(proy_{\vec{v}_r}(\overline{AQ}))^2}=\sqrt{|\overline{AQ}|^2-\left|\frac{\overline{AQ}\cdot\vec{v}_r}{|\vec{v}_r|}\right|^2}$$

$\overrightarrow{AQ}=(-1,-2,-4)$ → $|\overrightarrow{AQ}|=\sqrt{1+4+16}=\sqrt{21}$

$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{v_r}$=-2-2-12=-16

$|\overrightarrow{v_r}|=\sqrt{4+1+9}=\sqrt{13}$

$$d(A,r)=\sqrt{|\overline{AQ}|^2-\left|\frac{\overline{AQ}\cdot\vec{v}_r}{|\vec{v}_r|}\right|^2}=\sqrt{21-\left|\frac{-16}{\sqrt{14}}\right|^2}=\sqrt{21-\frac{256}{14}}=\sqrt{\frac{19}{7}}\ u$$

Septiembre de 2008. Prueba B

PR-1.- Se consideran las rectas r y s de ecuaciones respectivas:

$$r\equiv\begin{cases} y=1 \\ z=0 \end{cases}\ y\ s\equiv\begin{cases} x=0 \\ z=2 \end{cases}$$

a) Estudiar la posición relativa de r y s .
b) Determinar la recta que corta perpendicularmente a r y s
c) Calcular las distancias entre r y s

a) Posición relativa de las dos rectas, estudiemos el rango de

$$M=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad M^*=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&1&2\end{pmatrix}$$

rang(M)=3, pues $\begin{vmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{vmatrix}=1\neq 0$ rang(M*)=4, pues $\begin{vmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&1&2\end{vmatrix}=2\neq 0$

Luego se cruzan

b) Llamemos a la recta buscada, t. Para calcular t, recta que corte perpendicular a ambas rectas, se cumple que su vector director es perpendicular a los vectores directores de r y s. Es decir $\overrightarrow{v_t}\cdot\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{v_t}\cdot\overrightarrow{v_s}=0$

Como la recta t corta a r y a s, podemos tomar un punto de r y otro punto de s (donde corta la recta). Para tomar un punto de cada recta pongámoslas en forma paramétricas:

$r\equiv\begin{cases}x=\lambda\\y=1\\z=0\end{cases}$ y $s\equiv\begin{cases}x=0\\y=\mu\\z=1\end{cases}$ → P(λ,1,0) y Q(0,μ,1). Luego el vector director de la recta t es $\overrightarrow{v_t}=\overrightarrow{PQ}=(-\lambda,\mu-1,1)$. Para calcular λ y μ apliquemos que $\overrightarrow{v_t}\cdot\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{v_t}\cdot\overrightarrow{v_s}=0$

$\overrightarrow{v_t}\cdot\overrightarrow{v_r}$=0 → siendo $\overrightarrow{v_r}=(1,0,0)$ → -λ=0

$\overrightarrow{v_t}\cdot\overrightarrow{v_s}$=0 → siendo $\overrightarrow{v_s}=(0,1,0)$ → $\mu-1$=0→ $\mu=1$

Así P(0,1,0) y Q(0,1,1), que son 2 puntos de la recta buscada;

$\overrightarrow{v_t}=\overrightarrow{PQ}=(0,0,1)$ t: $\begin{cases}x=0\\y=1\\z=\lambda\end{cases}$

c) distancia entre dos rectas que se cruzan: $d(r,s)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{PQ},\vec{v}_r,\vec{v}_s\right]\right|}{|\vec{v}_r\times\vec{v}_s|}$, siendo P y Q puntos de r y s: P(0,1,0), Q(0,0,1)→$\overrightarrow{PQ}=(0,-1,1)$, $\overrightarrow{v_r}=(1,0,0)$, $\overrightarrow{v_s}=(0,1,0)$

$$d(r,s)=\frac{\left\|\begin{matrix}0&-1&1\\1&0&0\\0&1&0\end{matrix}\right\|}{\left\|\begin{matrix}i&j&k\\1&0&0\\0&1&0\end{matrix}\right\|}=\frac{1}{|k|}=1u$$

C-2.- Hallar el seno del ángulo formado por la recta r y el plano π con ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} x = z \\ 2y + z = 3 \end{cases} \quad y \quad \pi \equiv x + y = z$$

Para calcular el ángulo entre r y π necesitamos $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{n_\pi}$. Pongamos r en paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \dfrac{3-\lambda}{2} \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{v_r} = (1, -0.5, 1) \text{o podemos usar uno proporcional} \overrightarrow{v_r} = (2, -1, 2)$$

Por otro lado π:x+y-z=0 → $\overrightarrow{n_\pi}$=(1,1,-1)

$$\angle(\pi, r) = 90^o - \angle(\vec{n}_\pi, \vec{v}) = 90^o - \cos^{-1}\left(\frac{\vec{n}_\pi \cdot \vec{v}}{|\vec{n}_\pi||\vec{v}|}\right) = 90^o - \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3} \cdot 3}\right) = 90^o - 101{,}1^o = -10.1^o \equiv 10{,}1^o$$

sen(10,1º)≈0,19