TEMA 9. DETERMINANTES.

Contexto con la P.A.U.

El cálculo de determinantes es muy importante, ya que se utilizará en el tema siguiente en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, problema que generalmente sale en una de las opciones del examen de P.A.U.

Además de la importancia relativa a su utilización en los problemas del siguiente tema, también es frecuente que en los exámenes de selectividad haya cuestiones relacionadas directamente con esta unidad, tales como:

- Cálculo de determinantes aplicando propiedades.
- Cálculo de determinantes 4x4
- Calculo de inversas
- Determinar si una matriz inversible

1. Conceptos previos. Permutaciones

Antes de estudiar el determinante veamos primero lo que significa la permutación, que nos va a servir para luego definir el determinante.

Definición: dado n elementos diferentes, ***permutaciones*** son las distintas posibles ordenaciones de estos elementos. El conjunto de todas la permutaciones se denota como S_n y el número total de permutaciones es de $n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1$

Ejemplos: El conjunto de permutaciones de tres elementos, S_3, vienen definidas por las siguientes $3!=6$ permutaciones:

σ_{123}=id, σ_{132}, σ_{231}, σ_{213}, σ_{312}, σ_{321}.

Definición: el ***índice*** de una permutación es el mínimo número de modificaciones que debemos realizar a sus elementos para llegar a la permutación identidad, donde todos los elementos están ordenados de menor a mayor (ejemplo σ_{123}=id en S_3). Se denota como $i(\sigma)$ donde σ es la permutación

Ejemplos:

$\sigma_{123} \rightarrow i(\sigma_{123})=0$

$\sigma_{132} \rightarrow i(\sigma_{132})=1$ permutando el 3 y el 2 obtenemos la permutación identidad

$\sigma_{312} \rightarrow i(\sigma_{312})=2$ permutando el 3 y el 2, y luego el 2 y el 1 obtenemos la permutación identidad

2. Definición general de determinante

Definición: Sea $A=a_{ij}$ una matriz cuadrada de orden n ($A\in M_{nxn}(R)$) definimos como ***determinante*** de A y se denota como |A| o det(A) al siguiente número real:

$$\det(A)=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{i(\sigma)}a_{1\sigma(1)}\ldots a_{n\sigma(n)} \quad \text{(la suma tiene n! términos)}$$

3. Determinante de Matrices de orden 2 y 3

En este apartado vamos a ver a partir de la definición del apartado anterior el valor del determinante de las matrices 2x2 y 3x3

3.1 Determinante de matrices cuadras de orden 2.

Sea la matriz $A\in M_{2x2}$ definida de forma genérica como $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, calculemos el determinante a partir de la definición:

$$\det(A)=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\sum_{\sigma\in S_2}(-1)^{i(\sigma)}a_{1\sigma(1)}\cdot a_{2\sigma(2)}=(-1)^{i(\sigma_{12})}a_{11}\cdot a_{22}+(-1)^{i(\sigma_{21})}a_{12}\cdot a_{21}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$$

Ejemplos:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 9 & -1\end{pmatrix}\rightarrow |A|=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 9 & -1\end{vmatrix}=3\cdot(-1)-(1\cdot 9)=-12$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\rightarrow |B|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=1\cdot 4-(3\cdot 2)=-2$$

3.2. Determinante de matrices cuadradas de orden 3.

De la misma forma que en el apartado anterior veamos como calcular el determinante de las matrices cuadradas de orden 3. En este caso el número de sumas será 3!=6. Veremos una regla nemotécnica, regla de Sarros, para recordar como calcularlo.

Sea $A\in M_{3x3}(R)$ definido de forma genérica como $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$. Antes de aplicar la definición de determinante veamos las permutaciones y sus índices:

$\sigma_{123}\rightarrow i(\sigma_{123})=0$ par

$\sigma_{132}\rightarrow i(\sigma_{132})=1$ impar

$\sigma_{231}\rightarrow i(\sigma_{231})=2$ par

$\sigma_{213}\rightarrow i(\sigma_{213})=1$ impar

$\sigma_{312}\rightarrow i(\sigma_{312})=2$ par

$\sigma_{321}\rightarrow i(\sigma_{321})=1$ par

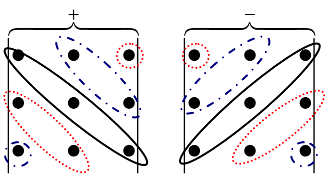
De esta forma:

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=(-1)^0 a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+(-1)^1 a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}+(-1)^2 a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+$$

$$+(-1)^1 a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}+(-1)^2 a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}+(-1)^1 a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}=$$

$$=(a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32})-(a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}+a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}+a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31})$$

Regla de Sarrus :



Ejemplos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (1\cdot 5\cdot 9 + 4\cdot 8\cdot 3 + 2\cdot 6\cdot 7) - (3\cdot 5\cdot 7 + 8\cdot 6\cdot 1 + 4\cdot 2\cdot 9) = (45+84+96) - (105+48+72) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ -4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = [1\cdot(-1)\cdot 4 + 1\cdot(-2)\cdot 0 + 2\cdot 3\cdot(-4)] - [0\cdot(-1)\cdot(-4) + 1\cdot 2\cdot 4 + (-2)\cdot 3\cdot 1] = (-4+0-24) - (0+8-6) = -30$$

Ejercicio 1. Calcular los siguientes determinantes

a) $\begin{vmatrix} a & -5 \\ 5 & a \end{vmatrix} = a^2 - (-25) = a^2 + 25$

b) $\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 15 - (-8) = 23$

c) $\begin{vmatrix} 1-a^2 & a-1 \\ a+1 & 1 \end{vmatrix} = (1-a^2) - (a-1)\cdot(a+1) = 1 - a^2 - (a^2 - 1) = 2(1-a^2)$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = [1\cdot 0\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 0 + 1\cdot 1\cdot 0] - [0\cdot 0\cdot 0 + 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 1] = -2$

e) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = [1\cdot 3\cdot 5 + 0\cdot 1\cdot 3 + (-2)\cdot 4\cdot(-4)] - [(-4)\cdot 3\cdot 3 + 1\cdot 4\cdot 1 + 0\cdot(-2)\cdot 5] = 79$

f) $\begin{vmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & m \end{vmatrix} = [m\cdot(-1)\cdot m + 1\cdot(-3)\cdot 3 + 1\cdot(-1)\cdot 5] - [3\cdot(-1)\cdot 5 + (-3)\cdot(-1)\cdot m + 1\cdot 1\cdot m] = -m^2 - 4m + 1$

4. Determinante de algunas matrices especiales

En este apartado calcularemos de forma sencilla el valor de los determinantes de algunas matrices cuadradas especiales.

1. Determinante de la matriz nula

La matriz cuadrada nula es aquella en la que todos los coeficientes son cero, se denota como 0.

A=0 → $a_{ij}=0\ \forall i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$ → $|0| = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{i(\sigma)} a_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)} = 0$

2. Determinante de la matriz identidad

Recordemos que la matriz identidad es aquella donde todos los elementos fuera de la diagonal son nulos y los de la diagonal vale 1.

$$Id=\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & ... \\ 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Es fácil comprobar que el valor del determinante identidad es la unidad, veámoslo a partir de la definición de determinante:

$$|Id|=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{i(\sigma)}a_{1\sigma(1)}\cdot...\cdot a_{n\sigma(n)}=(-1)^0 a_{11}\cdot a_{22}\cdot...\cdot a_{nn}+0=1\cdot 1\cdot...\cdot 1=1$$

3. Determinante de la matriz diagonal

Matrices diagonales son aquellas donde los elementos fuera de la diagonal son nulos, pudiendo valer cualquier valor los elementos de la misma.

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Es fácil de ver que el valor del determinante de la matriz diagonal es igual al producto de los elementos de la diagonal. Es fácil demostrarlo a partir de la definición de determinante.

$$|D|=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{i(\sigma)}a_{1\sigma(1)}\cdot...\cdot a_{n\sigma(n)}=(-1)^0 a_{11}\cdot a_{22}\cdot...\cdot a_{nn}+0=a_{11}\cdot a_{22}\cdot...\cdot a_{nn}$$

4. Determinante de la matriz triangular

Recordemos la definición de matriz triangular superior e inferior:

$$T_s=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad T_i=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

El valor del determinante de las matrices triangulares, tanto superior como inferior, es igual al producto de los elementos de la diagonal. La demostración es más complicada que las anteriores.

$|T_s|=a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}$ $\qquad$ $|T_i|=a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}$

5. Propiedades de los determinantes

En este apartado veremos las propiedades más importantes de los determinantes, a partir de las cuales será fácil calcular el valor de los determinantes de algunas matrices. Para este apartado usaremos la siguiente notación:

$A \in M_{nxn}(R)$ → formado por n filas $A=(F_1,\ldots,F_n)$ con F_i fila i-ésima

→ formado por n columnas $A=(C_1,\ldots,C_n)$ con C_i la columna i-ésima.

***Ejemplo*:**

$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$ $A=(F_1,F_2,F_3)$; $A=(C_1,C_2,C_3)$ donde $F_1=\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}$, $F_2=\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}$, $F_3=\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}$

y $C_1=(1\ 2\ 3)$, $C_2=(4\ 5\ 6)$ y $C_3=(7\ 8\ 9)$

Propiedad 1: el determinante de una matriz es igual al determinante de de la matriz transpuesta:

$$\boxed{\det(A)=\det(A^t)}$$

Importante: a partir de esta propiedad todas las propiedades de los determinantes que relacionen columnas seran ciertas también para las filas y al revés.

Propiedad 2: si los elementos de una fila (o columna) de una matriz se le multiplican por un número el determinante de la nueva matriz queda multiplicado por dicho número:

$$\boxed{\begin{array}{l}\det(F_1,F_2,\ldots,kF_i,\ldots,F_n)=k\cdot\det(F_1,F_2,\ldots,F_i,\ldots,F_n)\\ \det(C_1,C_2,\ldots,CF_i,\ldots,C_n)=k\cdot\det(C_1,C_2,\ldots,C_i,\ldots,C_n)\end{array}}$$

***Ejemplo**:*

$$A=\begin{pmatrix}1&-3&5\\2&3&6\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}1&-3&10\\2&3&12\\0&1&2\end{pmatrix} \rightarrow |B|=2\cdot|A|$$

$$C=\begin{pmatrix}1&-3&5\\-2&-3&-6\\0&1&1\end{pmatrix} \rightarrow |C|=-1\cdot|A|$$

Propiedad 3: Si a una matriz $A \in M_{nxn}(R)$ la multiplicamos por un número k ($B=k \cdot A$), el determinante de la nueva matriz, B, es k^n veces el determinante de A:

$$\boxed{\mathbf{det(k \cdot A)=k^n \cdot det(A)}}$$

Demostración: a partir de la propiedad 2 es fácil de ver esta propiedad:

$det(k \cdot A)=det(k \cdot C_1,k \cdot C_2,\ldots,k \cdot C_n)=k \cdot det(C_1,k \cdot C_2,\ldots,k \cdot C_n)= \quad k^2 \cdot det(C_1,C_2,\ldots,k \cdot C_n)=\ldots= =k^n \cdot det(C_1,C_2,\ldots,C_n)$

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B=2 \cdot A=\begin{pmatrix} 2 & -6 & 10 \\ 4 & 6 & 12 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow |B|=2^3|A|$$

Propiedad 4: Si los elementos de la columna i-esima (o una fila) de una matriz cuadrada se puede descomponer como suma de columnas (o filas), su determinante será igual a la suma de los determinantes de las matrices que tienen las demás columnas (filas) iguales y la i-ésima de cada uno de ellas una de las columnas de la suma

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{det(F_1,F_2,\ldots,F_i+F_i',\ldots,F_n)= det(F_1,F_2,\ldots,F_i,\ldots,F_n)+ det(F_1,F_2,\ldots,F_i',\ldots,F_n)} \\ \mathbf{det(C_1,C_2,\ldots,C_i+C_i',\ldots,C_n)= det(C_1,C_2,\ldots,C_i,\ldots,C_n)+ det(C_1,C_2,\ldots,C_i',\ldots, C_n)} \end{array}}$$

Ejemplos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5+2 & 3 \\ 4 & 0+7 & -1 \\ 0 & 3+6 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & -1 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}=-61+73=12$$

$$\begin{vmatrix} 1+0 & 5+2 & 2+1 \\ 4 & 7 & -1 \\ 0 & 9 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & -1 \\ 0 & 9 & 5 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & -1 \\ 0 & 9 & 5 \end{vmatrix}=16-4=12$$

$det(C_1,C_2+C_2',C_3)= det(C_1,C_2,C_3)+ det(C_1,C_2',C_3)$

Propiedad 5: El determinante del producto de matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de ambas matrices.

$$\boxed{\mathbf{det(A \cdot B)=det(A) \cdot det(B)}}$$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 11 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}\begin{vmatrix}1 & 2\\0 & 2\end{vmatrix}=2\\ \\ \begin{vmatrix}3 & 1\\-1 & 5\end{vmatrix}=16\end{array}\right\}\rightarrow\begin{vmatrix}1 & 11\\-2 & 10\end{vmatrix}=2\cdot 16=32$$

Propiedad 6: Si una matriz permuta dos columnas (filas), su determinante cambia de signo.

det(F_1,F_2,…,F_i, …, F_j,…,F_n)= -det(F_1,F_2,…,F_j,…, F_i,…,F_n)
det(C_1,C_2,…,C_i, …, C_j,…,C_n)= -det(C_1,C_2,…,C_j,…, C_i,…,C_n)

Ejemplos:

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\0 & 1 & 0\\-1 & 2 & 0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3 & 1 & 4\\1 & 0 & 0\\2 & -1 & 0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}4 & 3 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 2 & -1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & 4 & 3\\0 & 0 & 1\\-1 & 0 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & 1 & 3\\0 & 0 & 1\\0 & -1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 4 & 1\\1 & 0 & 0\\2 & 0 & -1\end{vmatrix}$$

Propiedad 7 : Si una matriz tiene una fila o una columna formada por ceros su determinante es cero.

det(F_1, F_2,…, 0, …, F_n)=0
det(C_1, C_2,…, 0, …, C_n)=0

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 0\\6 & 7 & 8 & 9 & 0\\11 & 12 & 13 & 14 & 0\\15 & 16 & 17 & 18 & 0\\19 & 20 & 21 & 22 & 0\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 0 & 0\\4 & 5 & 6\end{vmatrix}=0$$

Propiedad 8: Si en una matriz dos filas o columnas son iguales o proporcionales su determinante es cero:

det(F_1,…, F_i,…,$k\cdot F_i$,…,F_n)=0
det(C_1,…, C_i,…,$k\cdot C_i$,…,C_n)=0

Ejemplos :

det(F_1,F_2,F_1)=0 ; det(F_1,4F_3,F_3)=0 ; det(C_1,C_2,C_2)=0; det(-2C_3,C_2,C_3)=0

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 5 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

Propiedad 9: Sea una matriz cuadrada donde los elementos de una fila (columna) son combinación lineal de las restantes filas (columnas) entonces su determinante es cero:

$$\mathbf{det(F_1, F_2,\ldots, \underbrace{\lambda_1\cdot F_1+\lambda_2\cdot F_2+\ldots+\lambda_{i-1}\cdot F_{i-1}+\lambda_{i+1}\cdot F_{i+1}+\ldots+\lambda_n\cdot F_n}_{\text{Fila i}}, \ldots, F_n)=0}$$

$$\mathbf{det(C_1, C_2,\ldots, \underbrace{\lambda_1\cdot C_1+\lambda_2\cdot C_2+\ldots+\lambda_{i-1}\cdot C_{i-1}+\lambda_{i+1}\cdot C_{i+1}+\ldots+\lambda_n\cdot C_n}_{\text{Columna i}}, \ldots, C_n)=0}$$

Ejemplos:

$det(F_1,2F_3+3F_1-F_4,F_3,F_4)=det(F_1,2F_3,F_3,F_4)+ det(F_1,3F_1,F_3,F_4)+ det(F_1,-F_4,F_3,F_4)=0$

$det(C_1,2C_4+3C_1-C_3,C_3,C_4)=det(C_1,2C_4,C_3,C_4)+det(C_1,3C_1,C_3,C_4)+det(C_1,-C_3,C_3,C_4)=0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \underset{-F_1+2F_2}{9} \end{vmatrix} = 0$$

Propiedad 10: si en una matriz su determinante es cero, entonces una fila (columna) es combinación lineal del resto de filas (columnas).

$$\mathbf{det(A)=0 \rightarrow F_i = \lambda_1\cdot F_1+\lambda_2\cdot F_2+\ldots+\lambda_{i-1}\cdot F_{i-1}+\lambda_{i+1}\cdot F_{i+1}+\ldots+\lambda_n\cdot F_n}$$
$$\mathbf{C_i=\lambda_1\cdot C_1+\lambda_2\cdot C_2+\ldots+\lambda_{i-1}\cdot C_{i-1}+\lambda_{i+1}\cdot C_{i+1}+\ldots+\lambda_n\cdot C_n}$$

Conclusión*:* de la propiedad 9 y 10 $|A|=0 \leftrightarrow$ una fila (columna) es combinación lineal del resto

Propiedad 11: El determinante de la matriz A^{-1} es $1/|A|$

$$\mathbf{det(A^{-1})}=\frac{1}{\det(A)}$$

Se puede demostrar fácilmente a partir de la propiedad 5:

$A\cdot A^{-1}=Id \rightarrow det(A\cdot A^{-1})=det(A)\cdot det(A^{-1})=det(Id)=1 \rightarrow det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det(A)}$

Propiedad 12: Si a los elementos de una fila (columna) se les suma una combinación lineal de otras filas (columnas), su determinante no varía.

$$\mathbf{det(F_1,F_2,\ldots,F_i,\ldots,F_n)=det(F_1,F_2,\ldots,\lambda_1\cdot F_1+\lambda_2\cdot F_2+\ldots+\lambda_{i-1}\cdot F_{i-1}+F_i+ +\lambda_{i+1}\cdot F_{i+1}+\ldots+\lambda_n\cdot F_n, \ldots, F_n)}$$

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

P_1: $\det(A)=\det(A^t)$

P_2 : $\det(F_1,F_2,\ldots,kF_i,\ldots,F_n)= k\cdot\det(F_1,F_2,\ldots,F_i,\ldots,F_n)$

$\det(C_1,C_2,\ldots,kC_i,\ldots,C_n)= k\cdot\det(C_1,C_2,\ldots,C_i,\ldots,C_n)$

P_3 : $\det(k\cdot A)=k^n\cdot\det(A)$ con $A\in M_{nxn}$

P_4 : $\det(F_1,F_2,\ldots,F_i+F_i',\ldots,F_n)= \det(F_1,F_2,\ldots,F_i,\ldots,F_n)+ \det(F_1,F_2,\ldots,F_i',\ldots,F_n)$

$\det(C_1,C_2,\ldots,C_i+C_i',\ldots,C_n)= \det(C_1,C_2,\ldots,C_i,\ldots,C_n)+ \det(C_1,C_2,\ldots,C_i',\ldots,C_n)$

P_5 : $\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B)$

P_6: $\det(F_1,F_2,\ldots,F_i, \ldots, F_j,\ldots,F_n)= -\det(F_1,F_2,\ldots,F_j,\ldots, F_i,\ldots,F_n)$

P_7: $\det(F_1, F_2,\ldots, 0, \ldots, F_n)=0$

$\det(C_1, C_2,\ldots, 0, \ldots, C_n)=0$

P_8: $\det(F_1,\ldots, F_i,\ldots,k\cdot F_i,\ldots,F_n)=0$

$\det(C_1,\ldots, C_i,\ldots,k\cdot C_i,\ldots,C_n)=0$

P_9 : $\det(F_1, F_2,\ldots, \underbrace{\lambda_1\cdot F_1+\lambda_2\cdot F_2+\ldots+\lambda_{i-1}\cdot F_{i-1}+\lambda_{i+1}\cdot F_{i+1}+\ldots+\lambda_n\cdot F_n}_{\text{Fila i}}, \ldots, F_n)=0$

$\det(C_1, C_2,\ldots, \underbrace{\lambda_1\cdot C_1+\lambda_2\cdot C_2+\ldots+\lambda_{i-1}\cdot C_{i-1}+\lambda_{i+1}\cdot C_{i+1}+\ldots+\lambda_n\cdot C_n}_{\text{Columna i}}, \ldots, C_n)=0$

P_{10}: $\det(A)=0 \rightarrow F_i = \lambda_1\cdot F_1+\lambda_2\cdot F_2+\ldots+\lambda_{i-1}\cdot F_{i-1}+\lambda_{i+1}\cdot F_{i+1}+\ldots+\lambda_n\cdot F_n$

$C_i=\lambda_1\cdot C_1+\lambda_2\cdot C_2+\ldots+\lambda_{i-1}\cdot C_{i-1}+\lambda_{i+1}\cdot C_{i+1}+\ldots+\lambda_n\cdot C_n$

P_{11} : $\det(A^{-1})=1/\det(A)$

P_{12}: $\det(F_1,F_2,\ldots,F_i,\ldots,F_n)=\det(F_1,F_2,\ldots,\lambda_1\cdot F_1+\lambda_2\cdot F_2+\ldots+\lambda_{i-1}\cdot F_{i-1}+F_i+$

$+\lambda_{i+1}\cdot F_{i+1}+\ldots+\lambda_n\cdot F_n, \ldots, F_n)$

Ejercicios

Ejercicio 2. Calcula el determinante de las siguientes matrices:

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ → |A|=43

b) B=$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 6 & 7 & -4 \\ 9 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ → |B|=-127

c) C =$\begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & a^2 & 0 \end{pmatrix}$ → |C|=-a^3

d) D=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 3 & 0 & 0 \\ 2.1 & 5.3 & 1 & 0 \\ 0.6 & 0.56 & 8 & -7 \end{pmatrix}$ → |D|=1·3·1·(-7)=-21 (triangular)

Ejercicio 3: Calcular el valor de los siguientes determinantes a partir de conocer el determinante de A:

A=$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 8 & -5 \\ -7 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -7 \end{pmatrix}$ → det(A)=|A| =228

a) B=$\begin{pmatrix} 2 & 10 & 8 & -5 \\ -14 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -7 \end{pmatrix}$ → det(B)=$\begin{vmatrix} 2\cdot 1 & 10 & 8 & -5 \\ 2\cdot(-7) & 3 & 1 & -1 \\ 2\cdot 2 & 6 & 0 & 1 \\ 2\cdot 0 & 0 & 8 & -7 \end{vmatrix}=2\cdot|A|=456$

b) C=$\begin{pmatrix} -3 & -30 & -24 & 15 \\ -7 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -7 \end{pmatrix}$ → |C|=$\begin{vmatrix} -3\cdot 1 & -3\cdot 10 & -3\cdot 8 & -3\cdot(-5) \\ -7 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -7 \end{vmatrix}=-3|A|=-684$

c) D=$\begin{pmatrix} 5 & 50 & 40 & -25 \\ -7 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 16 & -14 \end{pmatrix}$ → |D|=$\begin{vmatrix} 5\cdot 1 & 5\cdot 10 & 5\cdot 8 & 5\cdot(-5) \\ -7 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2\cdot 8 & 2\cdot(-7) \end{vmatrix}=5\cdot 2\cdot|A|=2280$

d) E=$\begin{pmatrix} 3 & 30 & 24 & -15 \\ -21 & 9 & 3 & -3 \\ 6 & 18 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 24 & -21 \end{pmatrix}$ → |E|=|3·A|=3^4·|A|=18468

Ejercicio 4. Sea A=(F1, F2, F3, F4), cuyo determinante es det(A)=|A|=-3, calcular el valor del determinantes de las siguientes matrices:

a) B=($2F_1$, F_2, F_3, F_4) → det(B)=2·det(F_1, F_2, F_3, F_4)=2·|A|=-6

b) C=($-F_1$, F_2, F_3, $4F_4$) → det(C)=-det(F_1, F_2, F_3,$4F_4$)=-4· det(F_1, F_2, F_3,F_4) =-4|A|=12

c) D=5·A → |D|=5^4|A|

d) E= ($2F_1$, $3F_2$,-2 F_3, $5F_4$) → det(E)=2·det(F_1, $3F_2$,-2 F_3, $5F_4$)=

=2·3·det(F_1, F_2,-2 F_3, $5F_4$)=2·3·(-2)· det(F_1, F_2, F_3, $5F_4$)=

=2·3·(-2)·5det(F_1, F_2,-2 F_3, $5F_4$)=-60·|A|=180

Ejercicio 5. Resolver los siguientes determinantes

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \underset{P12}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & b+c+a \\ 1 & b & c+a+b \\ 1 & c & \underbrace{a+b+c}_{F_2+F_3} \end{vmatrix} \underset{P2}{=} (a+b+c)\cdot\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} \underset{P8}{=} (a+b+c)\cdot 0 = 0$$

b)

$$\begin{vmatrix} a & c+d & b \\ a & b+d & c \\ a & b+c & d \end{vmatrix} \underset{P2}{=} a\cdot\begin{vmatrix} 1 & c+d & b \\ 1 & b+d & c \\ 1 & b+c & d \end{vmatrix} \underset{P12}{=} a\cdot\begin{vmatrix} 1 & c+d+b & b \\ 1 & b+d+c & c \\ 1 & \underbrace{b+c+d}_{F_2+F_3} & d \end{vmatrix} \underset{P2}{=} a\cdot(b+c+d)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & c \\ 1 & 1 & d \end{vmatrix} \underset{P8}{=} a\cdot(b+c+d)\cdot 0 = 0$$

c)

$$\begin{vmatrix} bc & 2/a & a \\ ac & 2/b & b \\ ab & 2/c & c \end{vmatrix} \underset{P2}{=} \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} bc & 2abc/a & a \\ ac & 2abc/b & b \\ ab & 2abc/c & c \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} bc & 2bc & a \\ ac & 2ac & b \\ ab & 2ab & c \end{vmatrix} \underset{P8}{=} \frac{1}{abc}\cdot 0 = 0$$

Ejercicio 6 Demostrar

a) Si $A^2=A$ entonces $|A|=1$ o $|A|=1$

Si se cumple que $A^2=A$ entonces sus determinantes son iguales: $|A^2|=|A|$. Por la propiedad 5 $\rightarrow |A^2|=|A\cdot A|=|A|\cdot|A|=|A|^2 \rightarrow |A|^2=|A|$, $|A|^2-|A|=0 \rightarrow$ **$|A|=0$ y $|A|=1$**

b) Si $A\cdot A^t=Id$ entonces $|A|=1$ o $|A|=1$

Si se cumple que $A\cdot A^t=Id$ entonces sus determinantes son iguales: $|A\cdot A^t|=|Id|$. Por la propiedades 1 y 5 de los determinantes: $|A\cdot A^t|=|A|\cdot|A^t|=|A|\cdot|A|=|A|^2 \rightarrow |A|^2=|Id| \rightarrow |A|^2=1 \rightarrow$ **$|A|=1$, $|A|=-1$**

Ejercicio 7. Encuentra una respuesta razonada a las siguientes cuestiones:

a) En un determinante realizamos una cierta permutación de filas o columnas ¿qué podemos decir del nuevo determinante?

Si en un determinante el número de permutaciones es par, entonces el determinante no cambia de valor. Si el número de permutaciones es impar, entonces el determinante cambia de signo.

b) Se sabe que $\det(A)=5$ y $A\in M_2$ ¿cuánto vale $\det(3A)$?

Por la propiedad 3 como $A\in M_{2x2}(R)$ entonces $|3\cdot A|=3^2|A|=45$

c) Si A y B son inversas, y $|A|=3$. ¿cuánto vale $|B|$?

Si $B=A^{-1}$ por la propiedad 11 $\rightarrow |B|=1/|A|=1/3$

Ejercicio 8. Se sabe que $|A|=\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=5$. Calcular

a) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = |A| = 5$

b)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3a+3 & 3b & 3c+2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix} \underset{P4}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3a & 3b & 3c \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix} \underset{P8}{=} 0 + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{P8}{=} 0 + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = |A| = 5$$

EXÁMENES DE PAU, RELATIVOS PROPIEDEDES DETERMINANTES

Junio 2004. Prueba A

C-3.- Se tiene una matriz M cuadrada de orden 3 cuyas columnas son respectivamente C_1 , C_2 y C_3 y cuyo determinante vale 2. Se considera la matriz A cuyas columnas son (- C_2 , C_3 + C_2 , $3C_1$). Calcúlese razonadamente el determinante de A^{-1} en caso de que exista esa matriz

$M=(C_1,C_2,C_3) \qquad |M|=2$

$A=(-C_2,C_3+C_2,3C_1)$

$\det(-C_2,C_3+C_2,3C_1)= \det(-C_2,C_3,3C_1)+ \det(-C_2,C_2,3C_1)= -3\det(C_2,C_3,C_1)+0=$

$=3\det(C_1,C_3,C_2)= -3\det(C_1,C_2,C_3)=-6$

$|A^{-1}|=-1/6$

Septiembre 2004. Prueba A

C-1.- Sea A una matriz cuadrada de orden 4 cuyo determinante vale 3, y sea la matriz B=$\sqrt[4]{3}A$. Calcúlese el determinante de la matriz B.

$A\in M_{4x4}(R)$

B=$\sqrt[4]{3}A$ → |B|=$\left(\sqrt[4]{3}\right)^4 |A|=3\cdot|A|=9$

Junio 2005 Prueba A

C-1.- Sea *A* una matriz 2x2 de columnas C_1, C_2 y determinante 4. Sea *B* otra matriz 2x2 de determinante 2. Si *C* es la matriz de columnas C_1+C_2 y $3C_2$, calcúlese el determinante de la matriz $B\cdot C^{-1}$.

$A=(C_1,C_2)$ $|A|=4$

B: $|B|=2$

$C=(C_1+C_2,3C_2)$

$\det(C)=\det(C_1+C_2,3C_2)=\det(C_1,3C_2)+\det(C_2,3C_2)=3\cdot\det(C_1,C_2)+0=3\cdot|A|=12$

$\det(B\cdot C^{-1})=\det((B)\cdot\det(C^{-1})=|B|/|C|=2/12=1/6$

Septiembre 2005. Prueba A

C-1.- Sea la matriz A=$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c\end{pmatrix}$. Calcúlese el determinante de *A* sabiendo que *A^2-2A+Id=0*, donde Id es la matriz identidad y 0 es la matriz nula.

$A^2=\begin{pmatrix} a^2 & bc+ba \\ 0 & c^2\end{pmatrix}$ → $A^2-2\cdot A+Id=\begin{pmatrix} a^2-2a+1 & bc+ba-2b \\ 0 & c^2-2c+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ a^2-2a+1=0\\(2)\ bc+ba-2b=0\\(3)\ c^2-2c+1=0\end{array}\right\}$$ → de (1) a=1 y de (3) c=1, sustituyendo en (2) b+b-2b=0 → cierto ∀ b → $A=\begin{pmatrix}1 & b\\0 & 1\end{pmatrix}$ → |A|=1

Septiembre 2008 Prueba A

C-1.- Sea A una matriz 3x3 de columnas C_1 , C_2 , C_3 (en ese orden). Sea B la matriz de columnas C_1+C_2, $2\cdot C_1+3\cdot C_3$, C_2 (en ese orden). Calcular el determinante de B en función del de A .

$|B|=\det(C_1+C_2,\ 2\cdot C_1+3\cdot C_3,\ C_2)=\det(C_1,\ 2\cdot C_1+3\cdot C_3,\ C_2)+\det(C_2,\ 2\cdot C_1+3\cdot C_3,\ C_2)=$
$2\cdot\det(C_1,C_1,C_2)+3\cdot\det(C_1,C_3,C_2)+2\cdot\det(C_2,C_1,C_2)+3\cdot\det(C_2,C_3,C_2)=0+3\cdot\det(C_1,C_3,C_2)+0$
$+0=-(-1)^2\cdot 3\det(C_1,C_2,C_3)=3\cdot|A|$

6. Métodos de cálculo del determinante. Determinante de orden 4.

Si queremos calcular el valor del determinante de una matriz $A\in M_{4x4}(R)$ por la definición tenemos 4!=24 productos y casi seguro que nos equivocaremos. Tendremos que buscar algún otro método para calcular su valor. Para eso podemos aplicar las propiedades vistas en el apartado anterior.

6.1 Por adjuntos

Para calcular el determinante de una matriz un método es el de los adjuntos. El método consiste en tomar una fila (o columna), y multiplicar cada elemento de la fila (columna) por su adjunto, que es determinante que se obtiene eliminando la fila y columna de dicho coeficiente, multiplicado por -1 si es un elemento impar (fila+columna=nº impar)

Para ver como calcularlo veámoslo con un ejemplo, que desarrollaremos por la primera columna y la segunda fila:

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 3 & -1\\0 & 1 & -2 & 2\\-4 & -1 & 2 & 0\\3 & 6 & -1 & -4\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1 & -2 & 2\\-1 & 2 & 0\\6 & -1 & -4\end{vmatrix}+0\cdot(-1)\begin{vmatrix}0 & 3 & -1\\-1 & 2 & 0\\6 & -1 & -4\end{vmatrix}+(-4)\begin{vmatrix}0 & 3 & -1\\1 & -2 & 2\\6 & -1 & -4\end{vmatrix}+3(-1)\begin{vmatrix}0 & 3 & -1\\1 & -2 & 2\\-1 & 2 & 0\end{vmatrix}$$

=1·(-22)-4·37-4·37-3·(-6)= -152

$$\begin{vmatrix}1&0&3&-1\\0&1&-2&2\\-4&-1&2&0\\3&6&-1&-4\end{vmatrix}=0(-1)\cdot\begin{vmatrix}0&3&-1\\-1&2&0\\6&-1&-4\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}1&3&-1\\-4&2&0\\3&-1&-4\end{vmatrix}+(-2)(-1)\begin{vmatrix}1&0&-1\\-4&-1&0\\3&6&-4\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1&0&3\\-4&-1&2\\3&6&-1\end{vmatrix}$$

$=-54+2\cdot 25+2\cdot(-74)=-152$

6.2 Haciendo ceros una fila o columna

Podemos utilizar la propiedad 12 y hacer que en una fila o una columna todos los elementos menos uno (pivote) sean nulos. Desarrollando los determinantes por adjuntos sólo contribuye el del pivote, ya que el resto quedan multiplicados por 0.

Para matizar esté método veamos un ejemplo, calculando el determinante de la misma matriz del ejemplo del apartado 6.1. Vamos a utilizar como pivote el elemento a_{11}, ya que vale la unidad (que simplifica los cálculos) y haremos cero todos los demás elementos de la primera columna.

$$\begin{vmatrix}1&0&3&-1\\0&1&-2&2\\-4&-1&2&0\\3&6&-1&-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&3&-1\\0&1&-2&2\\0&-1&14&-4\\0&6&-10&-1\end{vmatrix}\begin{matrix}F_1\\F_2\\F_3+4F_1\\F_4-3F_1\end{matrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1&-2&2\\-1&14&-4\\6&-10&-\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&12&-2\\-1&14&-4\\0&74&-25\end{vmatrix}\begin{matrix}F_1+F_2\\F_2\\F_3+6F_2\end{matrix}$$

$$=(-1)(-1)\begin{vmatrix}12&-2\\74&-25\end{vmatrix}=-152$$

Ejercicio 9: calcular |A| por alguno de los dos métodos anteriores $A=\begin{pmatrix}-2&5&-3&-2\\-2&-3&2&-5\\1&3&-2&2\\-1&-6&4&3\end{pmatrix}$

Calculándolo → |A|=-4

6.3. Determinante de Vandermonde

Se llama matriz de Vandermonde a toda matriz de la siguiente forma

$$A=\begin{pmatrix}1&1&\dots&1\\x_1&x_2&\dots&x_n\\\dots&\dots&\dots&\dots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\dots&x_n^{n-1}\end{pmatrix}$$

Para este tipo de matrices se cumple $|A|=(x_n-x_1)\cdot(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})\cdot\dots\cdot(x_2-x_1)$

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\x&y&z\\x^2&y^2&z^2\end{pmatrix}\rightarrow \quad |A|=(z-x)\cdot(z-y)\cdot(y-x)$$

Ejercicio 10: Calcular los siguientes determinantes

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & -15 & 13 & -24 \\ 0 & -1 & 10 & -7 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -15 & 13 & -24 \\ -1 & 10 & -7 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -295$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & x+1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & x+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} x+1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & x+1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & x+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = (x+1)^4$$

c) $$\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix} \underset{P12}{=} \begin{vmatrix} x+a+b+c & b & c \\ a+x+b+c & x+b & c \\ \underbrace{a+b+x+c}_{F_1+F_2+F_3} & b & x+c \end{vmatrix} \underset{P2}{=} (x+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & x+b & c \\ 1 & b & x+c \end{vmatrix}$$

$$=(x+a+b+c)\cdot\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = (x+a+b+c)\cdot\begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{vmatrix} = (x+a+b+c)\cdot x^2$$

d) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2a & 3a \\ a^2 & 4a^2 & 9a^2 \end{vmatrix} \underset{Vandermonde}{=} (3a-2a)\cdot(3a-a)\cdot(2a-a) = 2\cdot a^3$$

e) $$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} \underset{P12}{=} \begin{vmatrix} 3+3x & x & x & x \\ 3+3x & 3 & x & x \\ 3+3x & x & 3 & x \\ 3+3x & x & x & 3 \end{vmatrix} = (3+3x)\cdot\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & 3 & x & x \\ 1 & x & 3 & x \\ 1 & x & x & 3 \end{vmatrix} = (3+3x)\cdot\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & 3-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix}$$

$$=(3+3x)(3-x)^3$$

7. Cálculo de la Matriz Inversa

Mediante la definición de determinante y la matriz adjunta se puede calcular de forma sencilla la matriz inversa, en especial la inversa de la matrices 3x3.

Proposición: Una matriz se dice ***regular***, es decir, tiene inversa si su determinante no es cero. En caso contrario la matriz es ***singular***:

$|A|\neq 0 \rightarrow$ regular $\exists\ A^{-1}$

$|A|=0 \rightarrow$ singular $\nexists\ A^{-1}$

Para calcular de la matriz inversa, usaremos $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ como ejemplo:

1) Calculamos el determinante $\rightarrow$ $|A|=4$

2) Trasponemos A $\rightarrow$ $A^t=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

3) Adjunta de la transpuesta: $(A^t)^{ad}=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$

$$=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 10 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4) Matriz inversa es $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left((A)^t\right)^{ad}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 10 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Veamos un ejemplo de una matriz 2x2 $\rightarrow$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

1) $|A|=2$

2) $A^t=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

3) $\left(A^t\right)^{ad}=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -0 & 1 \end{pmatrix}$

4) $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 11. Calcular la inversa de las siguientes matrices

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1}=\frac{1}{130}\cdot\begin{pmatrix} 10 & 20 & 6 \\ -10 & -20 & 20 \\ 25 & -15 & 2 \end{pmatrix}$

e) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 12. Calcular la x que hace singular la matriz

a) $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x^2+16x-12=0$ → $x^2+8x-6=0$ → $x_1=-4+\sqrt{22}$, $x_2=-4-\sqrt{22}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & x & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & x & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & 0 & 3 \\ 0 & -2-2x & 1 & -3 \\ 0 & 4-3x & 6 & -9 \\ 0 & 1 & x & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2x-2 & 1 & -3 \\ 4-3x & 6 & -9 \\ 1 & x & -4 \end{vmatrix} = -9x^2+6x+73=0$

$x_1=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{74}}{3},\quad x_2=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{74}}{3}$

EXAMENES DE PAU, EJERCICIOS RELATIVOS MATRIZ INVERSA

Septiembre de 2005. Prueba B

C-2.- Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Determínense los valores de m para los cuales $A+mId$ no es invertible (donde Id denota la matriz identidad).

B=A+m·Id=$\begin{pmatrix} 1+m & 2 \\ 2 & 3+m \end{pmatrix}$ $\exists b^{-1} \leftrightarrow |B| \neq 0$ → $|B|=m^2+4m-1=0$ → $m=-2\pm\sqrt{5}$

$\forall m\in R-\{-2+\sqrt{5},-2-\sqrt{5}\}$ matriz regular y por tanto existe B^{-1}

Septiembre de 2006. Prueba B

C-2. Dada la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & a+1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$determinar los valores de a para que exista matriz inversa

$P=\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & a+1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ $\exists P^{-1} \leftrightarrow |P| \neq 0$ → $|P|=-3a^2+10a-15=0$ → No solución, luego

$\forall a\in R$ existe la matriz inversa de A.

Junio 2007 PruebaA

C-1. Hallar para qué valores de a es inversible la matriz $\begin{pmatrix} a & 4+3a \\ 1 & a \end{pmatrix}$ y calcular la inversa para a=0

La matriz será inversible si $|A|\neq 0$. Calculemos para qué valores de a se cumple esta premisa:

$|A|=a^2-3a-4=0$ → a=4, a=-1. Luego $\forall a\in R-\{-1,4\}$ la matriz tiene inversa.

En concreto para a=0 es inversible → $A=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

$|A|=-4$; $A^t=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$; $(A^t)^{ad}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$; $A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

8. Rango de una Matriz

Definición: Menor de orden k de una matriz $A\in M_{mxn}(R)$ es toda submatriz con k filas y k columnas pertenecientes a la matriz A

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \\ 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix}$$

Menor de orden 4 → $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \\ 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix}$

Menor de orden 3 → $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 17 & 18 & 19 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 13 & 15 & 16 \\ 17 & 19 & 20 \end{pmatrix}\ldots$

Menor de orden 2→ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 18 & 20 \end{pmatrix}, \ldots$

Menor de orden 1 →(6), (20),…

Definición de rango de una matriz $A\in M_{mxn}(R)$ es el orden del mayor menor con determinante no nulo de la matriz A.

Cómo obtener el rango de una matriz:

1) Calculamos todos los menor de mayor dimensión (k=min(m,n)) de la matriz A.

1.a. Si algún menor es distinto de cero → rang(A)=k

1.b. Si todos los menores son iguales a cero → rang(A)<k

2) Calculamos los menores de dimensión k-1.

2.a Si algún menor es distinto de cero → rang(A)=k-1

2.b Si todos los menores son nulos →rang(A)<k-1

(…)

Esto termina cuando algún menor es distinto de cero, siendo los calculados antes de mayor dimensión de cero.

Ejemplo: Calcular el rango de A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \\ -3 & -6 & -9 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculamos los menores de orden 3=min(3,4):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -3 & -6 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 9 \\ -3 & -9 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 9 \\ -3 & -6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 9 \\ -6 & -9 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{rang(A)<3}$$

2. Calcularemos los menores de orden 2

$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} \neq 0$ → rang(A)=2

EXAMENES DE PAU, EJERCICIOS RELATIVOS AL RANGO

Septiembre de 2005. Prueba A.

C-2.- Discútase, según el valor de a, el rango de la matriz A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ |A|=$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = -3a-1$

Si a≠-1/3 → |A|≠0 y rang(A)=3

Si a=1/3 → |A|=0, como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ rang(A)=2

Septiembre de 2007. Prueba B

C-1.- Discutir, en función del número real m, el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ 1+m & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ 1+m & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$|A|=8-m-m^2-6+4m+6-2-2m=-m^2+m+6=0$ → x=3, x=-2

Si x∈R-{-2,3} → |A|≠0 y rang(A)=3

Veamos el rango si x=3 → $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$ → rang(A)=2

Veamos el rango si x=-2 → $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ Como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=5\neq 0$ → rang(A)=2

Conclusión: si x=3 o x=-2 el rang(A)=2 y si x∈R-{-2,3} el rang(A)=3.

Junio de 2008. Prueba B

C-2. Calcular el rango de $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}=\begin{array}{c} F_1 \\ F_2+F_1 \\ F_3-2F_1 \\ F_4-3F_1 \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & -4 & -8 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & 7 & 14 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 4 & -4 & -8 \\ -2 & 2 & 4 \\ -7 & 7 & 14 \end{vmatrix}=0$$

Como |A|=0 → rang(A)<4. Veamos uno de los menores de orden 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}=4-18-2+12=-4\neq 0$$

Luego rang(A)=3