

TEMA 1. FUNCIONES REALES. DEFINICIÓN Y LÍMITES

1. Funciones reales de variable real. Dominio de una función
 - 1.1. Dominios de las funciones más habituales
2. Composición de funciones. Propiedades
3. Función inversa
4. Límite de una función. Funciones convergentes
 - 4.1. Límites laterales.
 - 4.2. Propiedades de los límites
5. Distintos tipos de límites
 - 5.1. Límites infinitos cuando x tiende a un número real (asíntota vertical)
 - 5.2. Límites finitos cuando x tiende a infinito (asíntota horizontal)
 - 5.3. Límites infinitos cuando x tiende a infinito
6. Cálculo de límites
 - 6.1. Operaciones con límites de funciones. Indeterminaciones
 - 6.2. Resolución de indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$
 - 6.3. Resolución de indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$
 - 6.4. Resolución de indeterminaciones del tipo $\frac{k}{0}$
 - 6.5. Resolución de indeterminaciones del tipo $\infty \cdot 0$
 - 6.6. Resolución de indeterminaciones del tipo $\infty - \infty$
 - 6.7. Resolución de indeterminaciones del tipo 1^∞

Contexto con la P.A.U.

En los exámenes de la PAU por lo general hay un problema (3 puntos) en cada una de las dos opciones del bloque de análisis y una o dos cuestiones (1 punto cada una) en cada opción. De esta forma el bloque de análisis es de los tres el más importante.

Este tema es básico para el conocimiento y dominio de las funciones que en los temas siguientes abordaremos con detenimiento. Por lo general en el examen de la PAU no hay problemas ni cuestiones relativas específicamente relacionadas con este tema, si bien el no dominar los conceptos que se plantean en la unidad hará dificultoso, por no decir imposible, realizar los ejercicios del examen relacionados con este Bloque I.

Nótese que con bastante asiduidad en el examen de la PAU hay una o dos cuestiones relacionadas con el cálculo de límites de funciones, si bien por lo general se resuelven a partir del teorema de L'Hopital que veremos en el tema 4. Si bien en alguna ocasión estos límites se resuelven mediante los métodos de resolución que veremos en este tema, en especial los límites relacionados con el número e , y los límites de funciones racionales.

1. Funciones reales de variable real. Dominio de una función

Las funciones se utilizan en numerosos de campos, tanto de las ciencias (física, biología, química) como en otros campos como la economía entre otros. Definamos funciones reales de variable real:

Definición: Una función real de variable real es una aplicación o correspondencia entre un subconjunto de \mathbb{R} , llamado dominio de la función ($Dom(f)$), y otro subconjunto de \mathbb{R} llamado conjunto imagen o recorrido de la función ($Im(f)$), tal que a cada elemento de $Dom(f)$ le corresponda un **único elemento** de $Im(f)$. Una forma habitual de expresar las funciones es:

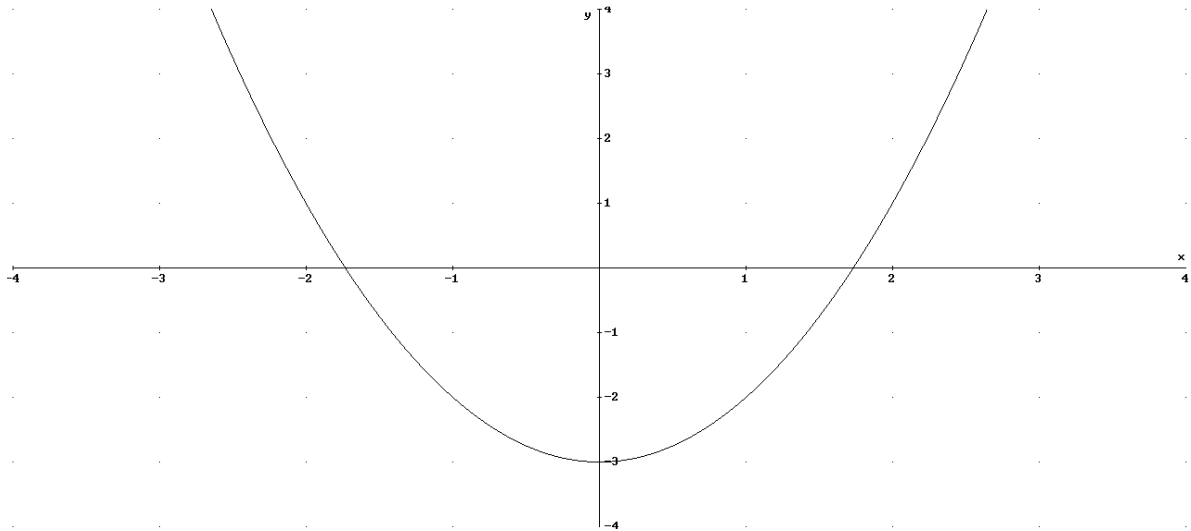
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow y = f(x) \end{aligned}$$

Ejemplos de funciones:

a) $y=f(x)=x^2-3$

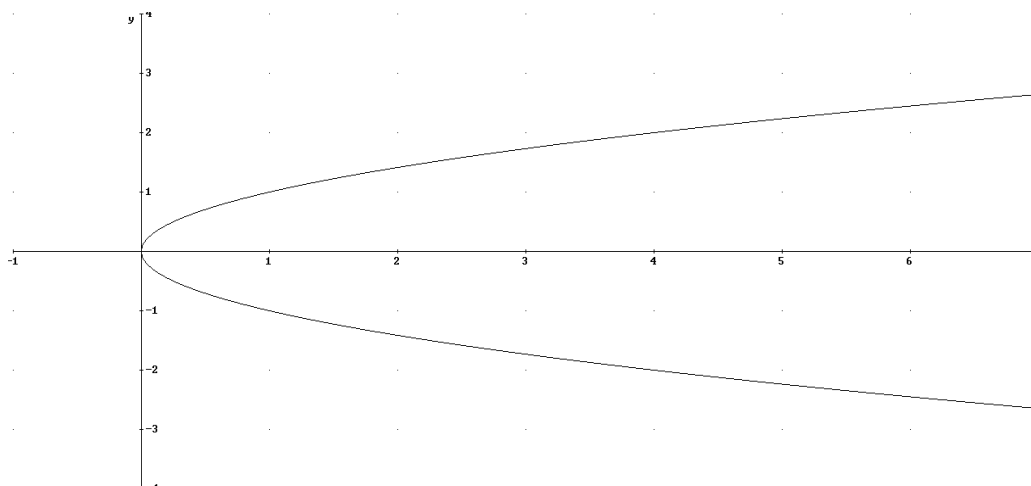
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow y = f(x) = x^2 - 3 \end{aligned}$$

Gráfica



Como puedes ver en la gráfica de la función a cada valor del conjunto dominio (eje OX) le corresponde un único valor del conjunto imagen (eje OY)

b) Veamos la siguiente gráfica que representa las soluciones de la expresión $y^2=x$:



En este caso la gráfica no representa una función, pues para cada elemento del dominio (eje x) le corresponden dos valores. Por ejemplo, la solución a $x^2=4$ es $y=2$ e $y=-2$, que no es un valor único como deberían de ser las funciones. En este caso tendremos que las solución de la ecuación de segundo grado vienen dadas por dos funciones: $y=\sqrt{x}$ (rama encima del eje OX), $y=-\sqrt{x}$ (rama por debajo del eje OX).

1.1 Dominio de las funciones más usuales

En este apartado vamos a ver el estudio del dominio de las funciones reales de variable real más usuales e utilizadas:

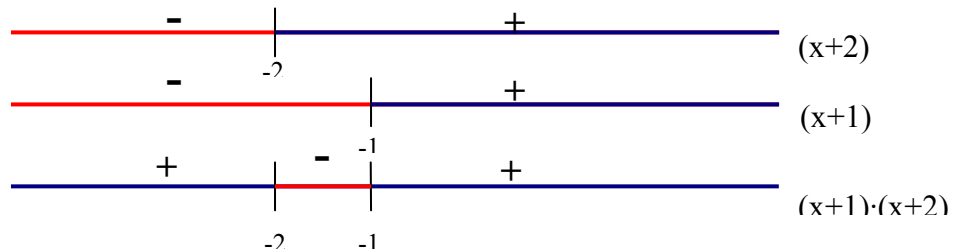
- **Funciones polinómicas:** son funciones del tipo $y=f(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$, es decir $f(x)$ es un polinomio. El dominio de estas funciones es todo número real, ya que para cualquier valor de x , por ejemplo $x=2$, la función tiene sentido siendo su imagen $y= a_0+a_12+\dots+a_n2^n$. Luego en estas funciones **$Dom(f)=\mathbb{R}$**
- **Funciones racionales fraccionarias:** son del tipo $y=f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios. El dominio de la función serán todos los número reales excepto aquellos en que anulan el denominador (soluciones de $Q(x)=0$) ya que no se puede dividir entre cero. Así en estas funciones **$Dom(f)=\mathbb{R}-\{x:Q(x)=0\}$**

Ejemplo: $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x^3 - x} \rightarrow Dom(f)=\mathbb{R}-\{0,1,-1\}$

- **Funciones irracionales:** son del tipo $f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$, dos casos:
 - si n es impar el dominio de $f(x)$ es el mismo que el de $g(x)$, pues las raíces impares de números negativos son valores reales. Así tenemos que **$Dom(f(x))=Dom(g(x))$**
 - si n es par entonces el dominio de $f(x)$ es el conjunto de números del domino de $g(x)$ tales que $g(x)\geq 0$, ya que las raíces de números negativos no son números reales. Así **$Dom(f(x))=\{x\in Dom(g(x)): g(x)\geq 0\}$**

Ejemplo: $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2} \rightarrow \text{Dom}(f) = \{x: x^2 + 3x + 2 \geq 0\}$

$$x^2 + 3x + 2 = (x+2) \cdot (x+1) \geq 0$$

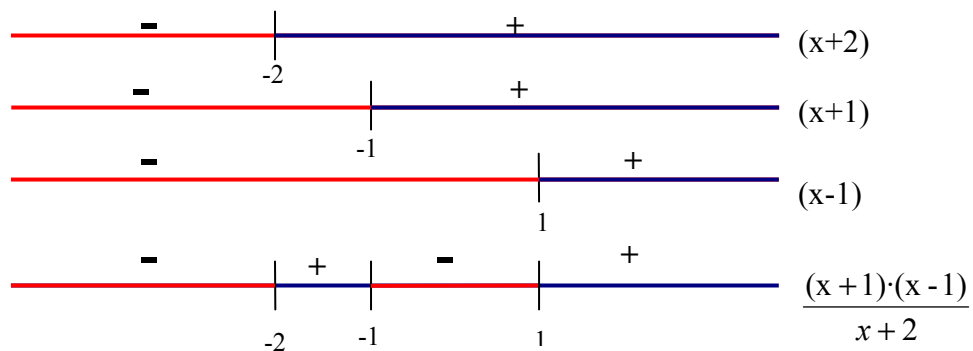


$$\text{Dom}(f) = (-\infty, -2] \cup [-1, \infty)$$

- **Funciones exponenciales:** $y = a^{g(x)}$ su dominio es el mismo que el dominio del exponente $g(x)$. Así en estas funciones $\text{Dom}(g(x)) = \text{Dom}(f(x))$
- **Funciones logarítmicas:** $f(x) = \log_a(g(x))$ el dominio es el conjunto de puntos del dominio de $g(x)$ en los que se cumple $g(x) > 0$, pues no existe solución en los reales el logaritmo con argumento negativo ni cero. Así en estas funciones $\text{Dom}(g(x)) = \{x \in \text{Dom}(f(x)) : f(x) > 0\}$

Ejemplo: $y = f(x) = \log\left(\frac{x^2 - 1}{x + 2}\right)$ el dominio de $g(x)$ es $\mathbb{R} - \{2\}$, veamos el

$$\text{dominio de } f(x) \rightarrow \frac{x^2 - 1}{x + 2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+2} > 0:$$

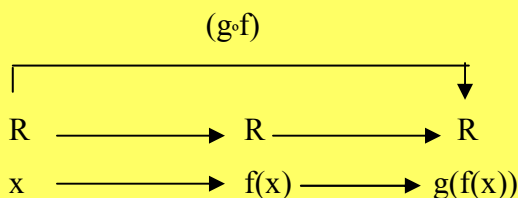


$$\text{Dom}(f(x)) = (1, \infty) \cup (-2, -1)$$

2. Composición de funciones. Propiedades

Definición: dadas dos funciones f y g tales que $\text{Im}(f) \subseteq \text{Dom}(g)$ se llama *función compuesta* de f con g y se denota $(g \circ f)(x)$ a la función definida de la siguiente forma:

$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$, es decir la imagen en $(g \circ f)$ de x es la imagen del punto $f(x)$ en g :



Ejemplos:

$$f(x) = x^2 \quad g(x) = \text{sen}(x) \rightarrow (g \circ f)(x) = \text{sen}(x^2) ; (f \circ g)(x) = \text{sen}^2(x)$$

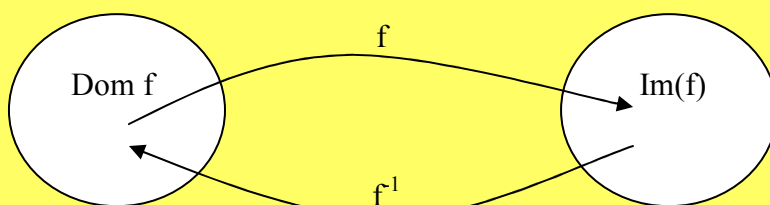
Propiedades:

- 1.) *Asociativa:* $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
- 2.) *No conmutativa:* en general la composición de funciones no es conmutativa $(g \circ f) \neq (f \circ g)$, ver ejemplo anterior $\rightarrow \text{sen}(x^2) \neq \text{sen}^2(x)$

3. Función Inversa

Definición: la *función inversa* de una función $f(x)$ inyectiva (no existen dos valores x_1 y $x_2 \in \text{Dom}(f)$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$) es otra función, que se denota por $f^{-1}(x)$, tal que se cumple:

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = \text{id}(x) = x \quad \forall x \in \text{Dom}(f(x))$$



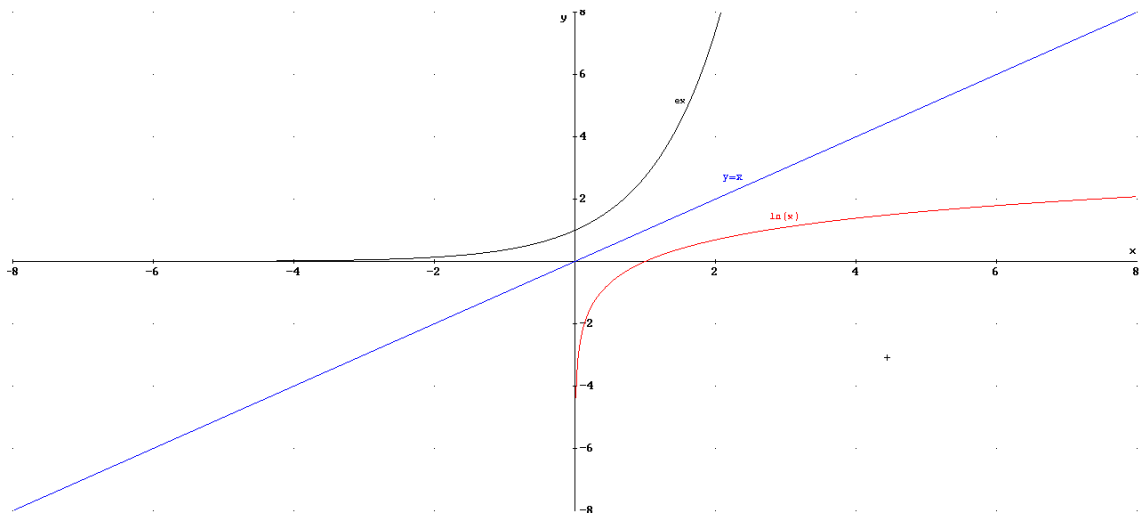
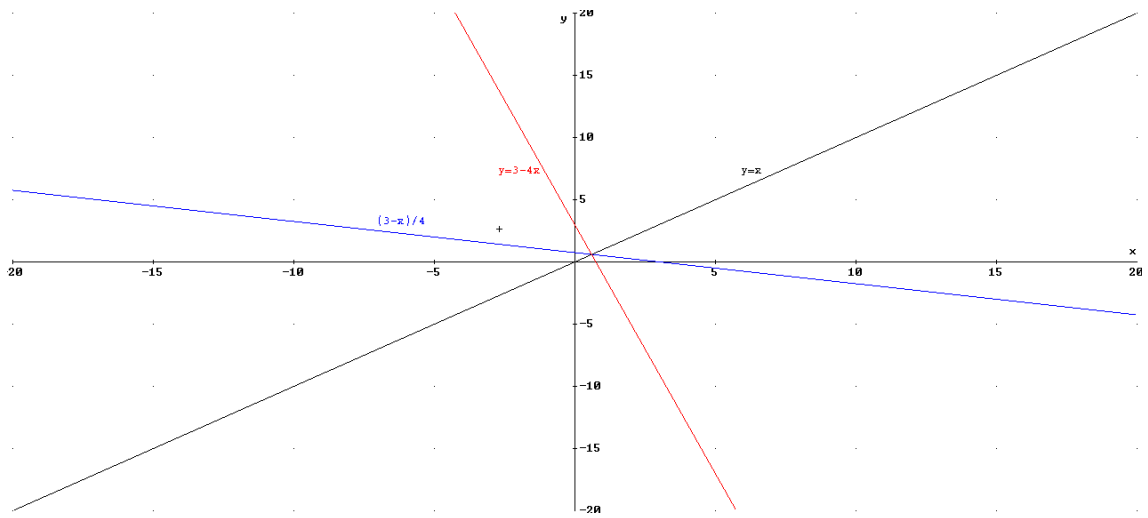
Ejemplos:

a) $y = f(x) = 3 - 4x \rightarrow x = (3 - y) / 4 \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3 - x}{4} . (f \circ f^{-1})(x) = 3 - 4 \left(\frac{3 - x}{4} \right) = x$

b) $y = \ln(x) \rightarrow y = e^x$

Representación gráfica de las función inversa: la propiedad más importante de las funciones inversas es que la gráfica de $f(x)$ es simétrica a $f^{-1}(x)$ respecto a la bisectriz del primer cuadrante, $y = x$.

Ejemplos:



Ejercicio 1. Sean las siguientes funciones $f(x)=1$, $g(x)=x^2+1$, $h(x)=\frac{1}{x^2+1}$ realizar las siguientes composiciones: a) $(g \circ f \circ h)$, b) $(f \circ g \circ h)$, c) $(h \circ g \circ f)$

$$a) (g \circ f \circ h) = g \circ (f \circ h) = g \circ \left(f\left(\frac{1}{x^2+1}\right) \right) = g(1) = 2$$

$$b) (f \circ g \circ h) = f \circ (g \circ h) = f \circ \left(g\left(\frac{1}{x^2+1}\right) \right) = f \left(\left(\frac{1}{x^2+1} \right)^2 + 1 \right) = 1$$

$$c) (h \circ g \circ f) = h \circ (g \circ f) = h \circ (g(1)) = h(1^2 + 1) = h(2) = 1/5$$

4. Límites de una función. Funciones convergentes

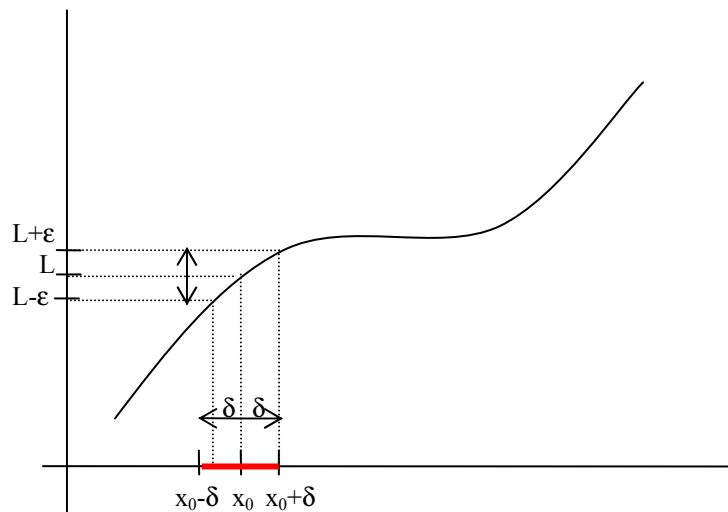
La idea intuitiva de límite de una función en un punto es el número hacia el que tiende o se aproxima los valores que toma la función cuando la variable independiente, x , tiende o se aproxima a dicho punto.

Ejemplo: sea $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ el límite de la función cuando x tiende a 1 es infinito, ya que cuanto x se aproxime más a 1 entonces $(x-1)^2$ más próximo a cero (positivo), y por tanto la función se hace más grande ($1/0.00000001=100000000$).

Definición: matemáticamente una función f tiene límite L cuando x tiende a un valor x_0 , y se denota $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ si se cumple:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

El significado de la definición es que sea cual sea el entorno de L existe un entorno de x_0 tal que en este entorno la función dentro del entorno de L . Veámoslo gráficamente:



Vamos a considerar dos casos diferentes:

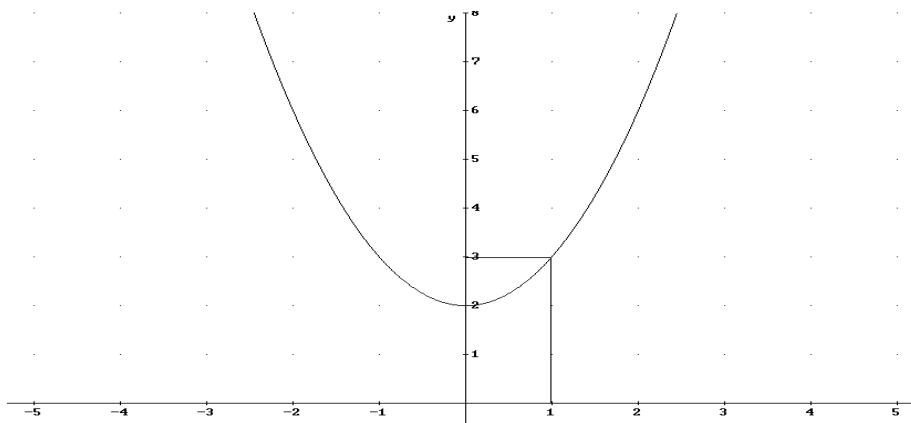
a) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ y $f(x_0) = L$

b) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ pero $f(x_0) \neq L$

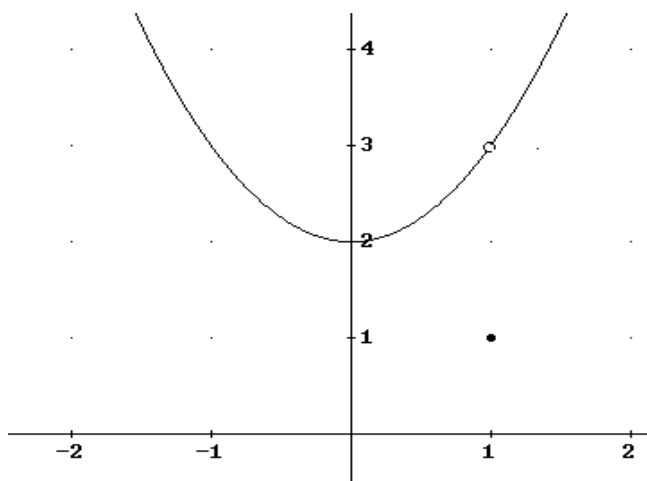
Ejemplo:

a) $f(x) = x^2 + 2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3 = f(1)$

Veamos la gráfica de la función:



$$b) g(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3 \quad g(1) = 1$$



Definición: una función $f(x)$ se dice que es convergente en x_0 si existe el límite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

Para que $f(x)$ sea convergente en x_0 no es necesario que x_0 pertenezca al dominio, por ejemplo

$$g(x) = x^2 + 1 \text{ si } x \neq 1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3, \quad 1 \notin \text{Dom}(g(x))$$

4.1 Límites laterales

Existen funciones definidas a trozos, que están definidas de diferente manera a la izquierda y derecha de un punto. En estas funciones cuando queremos estudiar el límite en los puntos donde cambia la expresión analítica es necesario calcular los límites laterales, que estudia la tendencia de la función a ambos lados del punto.

Definición: una función f tiene límite L cuando x tiende a un valor x_0 por la izquierda, y se denota $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$ si se cumple:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0 : x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Consiste en estudiar el comportamiento de la función en el entorno a la izquierda de x_0 .

Definición: una función f tiene límite L cuando x tiende a un valor x_0 por la derecha, y se denota $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ si se cumple:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0 : x_0 + \delta > x > x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Consiste en estudiar el comportamiento de la función en todo entorno a la derecha de x_0 .

Teorema: El límite de una función $f(x)$ en x_0 existe si y sólo si existen los límites laterales y estos coinciden:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

Este teorema será muy importante en los ejercicios de la PAU donde se nos pide estudiar la continuidad de funciones definidas a trozos

4.2. Propiedades de los límites:

1. Si una función es convergente en un punto esta función acotada en un entorno del punto.

2. Sea $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones convergentes en x_0 tal que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L'$ se cumple:

a) $(f+g)(x)$ es convergente en x_0 tal que $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = L + L'$

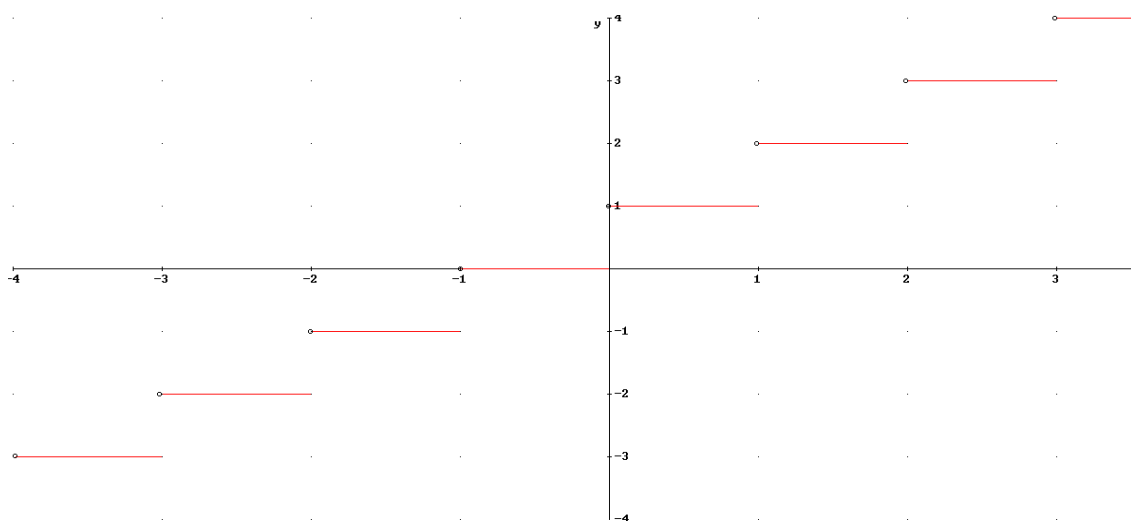
b) $(f-g)(x)$ es convergente en x_0 tal que $\lim_{x \rightarrow x_0} (f - g)(x) = L - L'$

c) $(f \cdot g)(x)$ es convergente en x_0 tal que $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = L \cdot L'$

d) $(f/g)(x)$ es convergente en x_0 si $L' \neq 0$ tal que $\lim_{x \rightarrow x_0} (f / g)(x) = L / L'$

Ejercicio:

1) Dada la función f(x) con la siguiente gráfica, calcular los límites:



- a) $\lim_{x \rightarrow n^+} f(x)$ con $n \in \mathbb{Z} \rightarrow \lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = n+1$
- b) $\lim_{x \rightarrow n^-} f(x)$ con $n \in \mathbb{Z} \rightarrow \lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = n$
- c) $\lim_{x \rightarrow n} f(x)$ con $n \in \mathbb{Z} \rightarrow \lim_{x \rightarrow n} f(x)$ no existe pues $\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow n^+} f(x)$

2) Hallar el límite, si existe de $f(x)=|x|-1$ cuando x tiende a cero

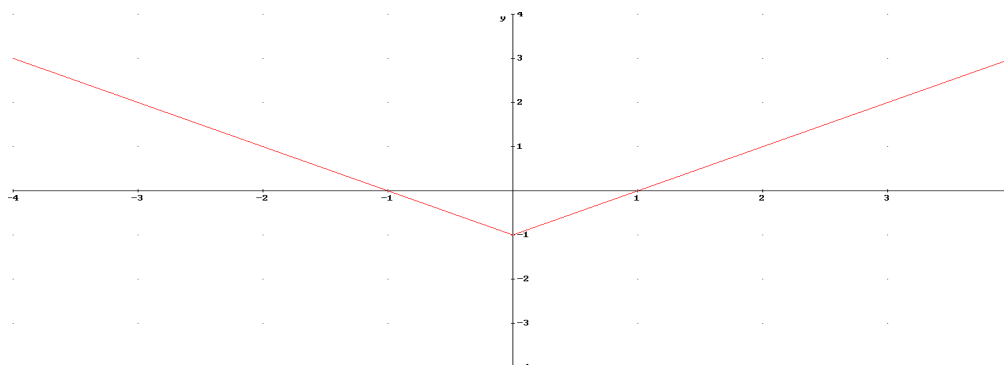
Siempre que tengamos una función con valor absoluto, la redefiniremos como una función definida a trozos, de tal forma que si lo que está dentro del valor absoluto es negativo cambia de signo, y si es positivo no cambia de signo.

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x > 0 \\ -x-1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Nota: el igual se puede poner en cualquiera de los dos trozos de la función (pero sólo en uno)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 - 1 = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -0 - 1 = -1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$$

Veamos la gráfica de la función:



3) Hallar el límite, si existe de $f(x)=|(x^2-1)|$ cuando x tiende a 1 y a -1

Definamos la función como una función a trozos. En este caso x^2-1 es negativo en el intervalo $(-1,1)$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1^2 - 1 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1^2 + 1 = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = (-1)^2 - 1 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -(-1)^2 + 1 = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$$

5. Distintos tipos de límites

5.1 Límites infinitos cuando x tiende a un número real (asíntota vertical)

En este apartado vamos a estudiar el caso de funciones que cuanto más se aproxima x a un valor x_0 bien por la izquierda, por la derecha o por los dos, la función se hace infinitamente grande (tiende a $+\infty$) o pequeña (tiende a $-\infty$). Cuando esto ocurre se dice que la función $f(x)$ tiene asíntota vertical en $x=x_0$. Veamos los siguientes casos:

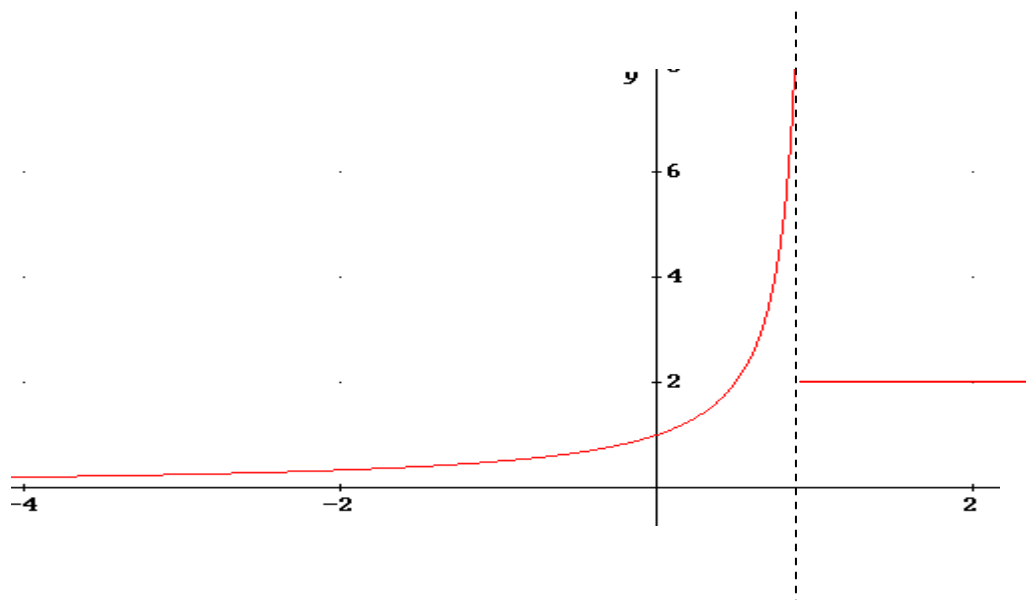
Definición: Una función $f(x)$ tiene límite $+\infty$ cuando x tiende a x_0 por la izquierda si cuando para todo valor K existe un entorno a la izquierda de x_0 tal que la función en este entorno mayor que K . Matemáticamente

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall K > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \rightarrow f(x) > K$$

$$\text{Ejemplo: } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ ya que cuanto más se aproxime x a 1 por la izquierda entonces $x-1$ más pequeño y positivo y por tanto $f(x)$ más grande. Es decir, cuando $x \rightarrow 1^-$ entonces la función $f(x) \rightarrow -\infty$

Veamos la gráfica:



Definición: Una función $f(x)$ tiene límite $+\infty$ cuando x tiende a x_0 por la derecha si cuando para todo valor K existe un entorno a la derecha de x_0 tal que la función en este entorno mayor que K . Matemáticamente

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall K > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \rightarrow f(x) > K$$

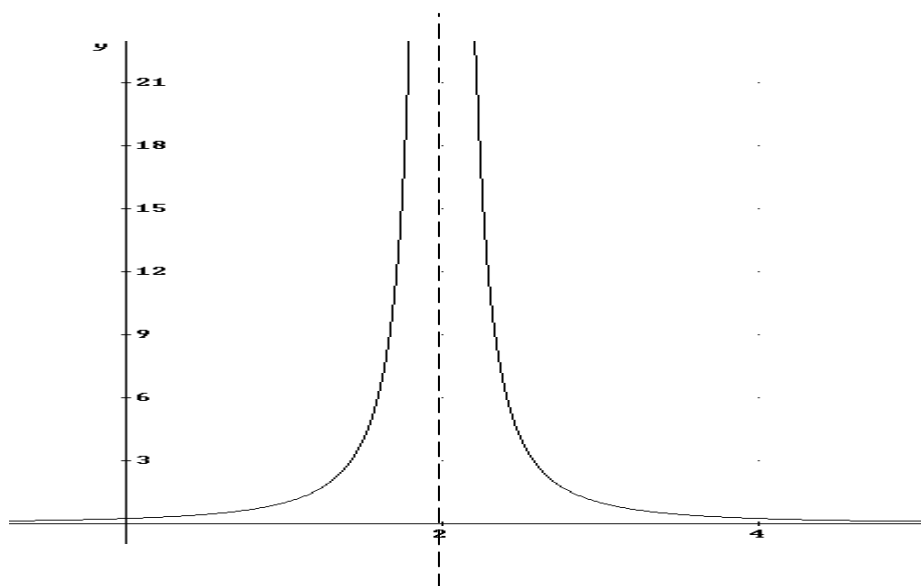
Definición: Una función $f(x)$ tiene límite $+\infty$ cuando x tiende a x_0 cuando para todo valor K existe un entorno de x_0 tal que la función en este entorno mayor que K . Es decir tiende a $+\infty$ por la izquierda y la derecha. Matemáticamente

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall K > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow f(x) > K$$

Ejemplo: $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty \end{cases} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty$$

Veamos la gráfica de la función y así podremos interpretar el significado del límite:



De igual forma que hemos estudiado el límite a $+\infty$, el límite a $-\infty$ es equivalente, sólo hay que cambiar K por $-K$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall -K < 0 \exists \delta > 0: \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \rightarrow f(x) < -K$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall -K < 0 \exists \delta > 0: \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \rightarrow f(x) < -K$$

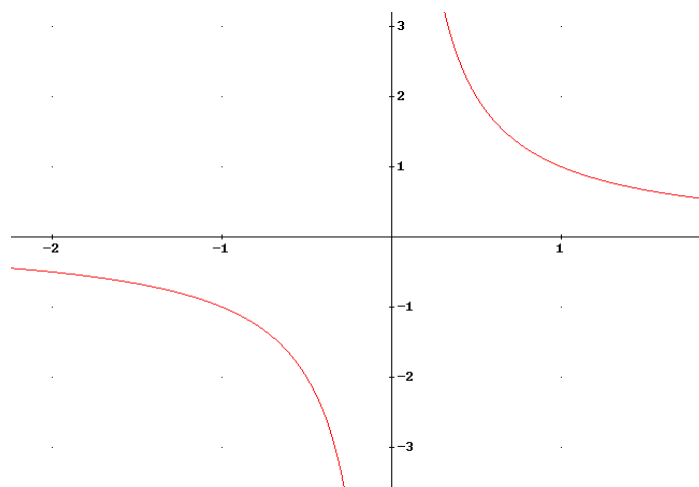
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall -K < 0 \exists \delta > 0: \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow f(x) < -K$$

Muchas veces las funciones $f(x)$ tienden a $+\infty$ por un lado de x_0 y a $-\infty$ por el otro lado de x_0 , cuando esto ocurre el $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ no existe, ya que para existir debe coincidir los límites laterales.

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \text{no existe}$$

Veamos la gráfica:



Definición: La función $f(x)$ tiene asíntota vertical en x_0 cuando existe alguno de estos 6 límites:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

5.2 Límites finitos cuando x tiende a infinito (asíntota horizontal)

En este apartado el comportamiento de algunas funciones que cuando la x toma valores muy grandes o muy pequeños la función se aproxima cada vez más a un valor L . Cuando esto ocurre se dice que $f(x)$ tiende a L cuando x tiende a $+\infty$ o a $-\infty$. Veamos la definición:

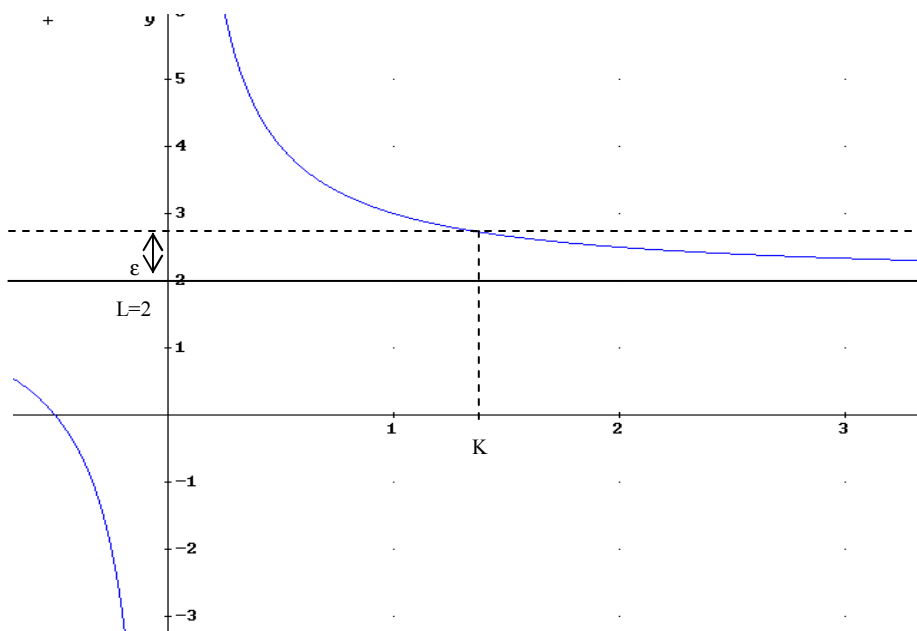
Definición: una función f tiene por límite un número real L cuando x tiende a $+\infty$, si se cumple:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists K > 0 : \forall x > K \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Interpretación gráfica definición: Cogemos un entorno en y próximo al límite L , entonces encontramos un valor de $x=K$ tal que para valores de x mayores que K la función (y) dentro del entorno de L , por tanto tiene una asíntota horizontal $y=L$

Ejemplo:

$$y = (2x+1)/x$$



Definición: una función $f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y=y_0$ si se cumple una de las siguientes condiciones (o las 2):

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y_0$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$

5.3 Límites infinitos cuando x tiende a infinito

En este último apartado estudiaremos 4 casos:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$

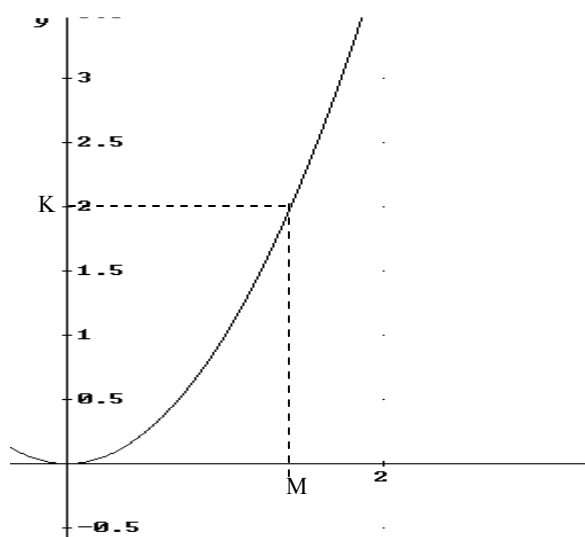
b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

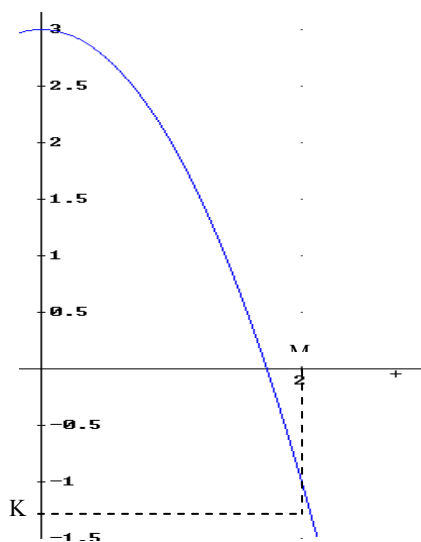
a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall K > 0, \exists M \in \mathbb{R} : \forall x > M \Rightarrow f(x) > K$

Ejemplo: $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = +\infty$



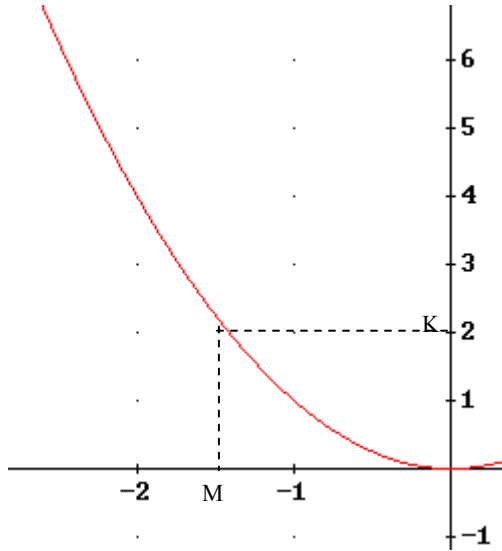
b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall K < 0, \exists M \in \mathbb{R} : \forall x > M \Rightarrow f(x) < K$

Ejemplo: $y = -x^2 \lim_{x \rightarrow \infty} -x^2 = -\infty$



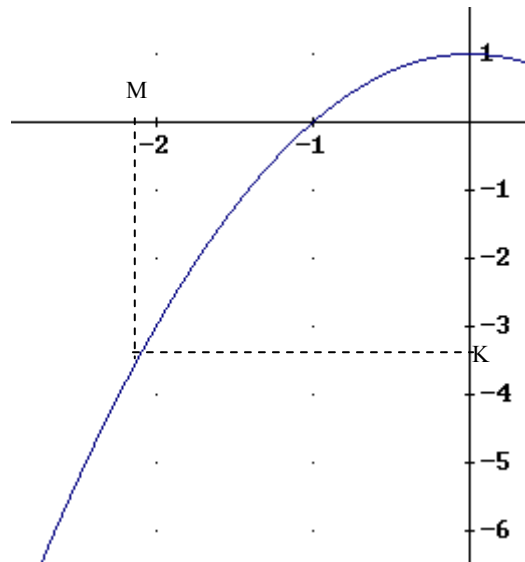
c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall K > 0, \exists M \in \mathbb{R} : \forall x < M \Rightarrow f(x) > K$

Ejemplo: $y=f(x)=x^2, \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$



d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall K < 0, \exists M \in \mathbb{R} : \forall x < M \Rightarrow f(x) < K$

Ejemplo: $y=f(x)=-x^2+1, \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2+1 = -\infty$



6. Cálculo de límites

6.1 Operaciones con límites. Indeterminaciones

En el apartado 4.2 vimos las propiedades de los límites, y como se relacionan los límites de dos funciones cuando estas funciones están sumando, multiplicando y dividiendo. Al haber límites cuyo valor es ∞ y $-\infty$, tendremos que ver como se suman, y multiplican los números con $\pm\infty$. Veámoslo:

Suma y diferencia:

$$1) \forall k \in \mathbb{R} \quad k \pm \infty = \pm \infty$$

$$2) \infty + \infty = \infty$$

$$3) -\infty - \infty = -\infty$$

Producto:

$$1) \forall k \in \mathbb{R}^+ (k > 0) \quad k \cdot \infty = \infty \rightarrow \text{ejemplo } \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty$$

$$2) \forall -k \in \mathbb{R}^- (-k < 0) \quad k \cdot \infty = -\infty \rightarrow \text{ejemplo } \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x = -\infty$$

$$3) \forall k \in \mathbb{R}^+ (k > 0) \quad k \cdot (-\infty) = -\infty \rightarrow \text{ejemplo } \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x = -\infty$$

$$4) \forall -k \in \mathbb{R}^- (-k < 0) \quad -k \cdot (-\infty) = \infty \rightarrow \text{ejemplo } \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x = +\infty$$

Cociente:

$$1) \forall k \in \mathbb{R} \quad \frac{k}{\pm \infty} = 0 \rightarrow \text{ejemplo } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$$

$$2) \forall k \in \mathbb{R}^+ \quad \frac{\pm \infty}{k} = \pm \infty \rightarrow \text{ejemplo } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{4} = -\infty$$

$$3) \forall -k \in \mathbb{R}^- \quad \frac{\pm \infty}{-k} = \mp \infty \rightarrow \text{ejemplo } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{-4} = -\infty$$

Exponente:

$$1) \forall k \in \mathbb{R} \quad k > 1 \quad k^{+\infty} = +\infty \rightarrow \text{ejemplo } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty$$

$$2) \forall k \in \mathbb{R} \quad 0 < k < 1 \quad k^{+\infty} = 0 \rightarrow \text{ejemplo } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$$

$$3) \forall k \in \mathbb{R} \quad k > 1 \quad k^{-\infty} = 0 \rightarrow \text{ejemplo } \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$$

$$4) \forall k \in \mathbb{R} \quad 0 < k < 1 \quad k^{-\infty} = +\infty \rightarrow \text{ejemplo } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = +\infty$$

Indeterminaciones:

- 1) $\infty - \infty$, $-\infty + \infty$ → ejemplo $\lim_{x \rightarrow \infty} x - x^2$
- 2) $0 \cdot (\pm\infty)$ → ejemplo $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-2} (x^2 + 3x)$
- 3) $\frac{k}{0}$ → ejemplo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$
- 4) $\frac{\pm\infty}{0}$ → ejemplo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x}$
- 5) $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ → ejemplo $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{x}$
- 6) $\frac{0}{0}$ → ejemplo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x}{x}$
- 7) 1^∞ → ejemplo: $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

6.2 Resolución de indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Las situaciones más simples en las que aparece es al calcular los límites infinitos de fracciones polinómicas. Estas indeterminaciones se resuelven dividiendo el numerador y el denominador por la máxima potencia de x del denominador

Ejemplos:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 3x + 2}{x^3 + 3x - 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{5x^2 - 3x + 2}{x^3}}{\frac{x^3 + 3x - 5}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{5}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{1 + \frac{3}{x^2} - \frac{5}{x^3}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3 + 3x + 2}{-x^2 + 3x - 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-x^3 + 3x + 2}{x^2}}{\frac{-x^2 + 3x - 5}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{-1 + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2}} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2 + 3x + 2}{-2x^2 + 3x - 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-3x^2 + 3x + 2}{x^2}}{\frac{-2x^2 + 3x - 5}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{-2 + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2}} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

Conclusión: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} \dots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0}$

a) $n > m \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} \dots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0} = 0$

b) $m > n \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} \dots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0} = \frac{a_m}{a_n} = \begin{cases} -\infty & \text{si } a_m/a_n < 0 \\ +\infty & \text{si } a_m/a_n > 0 \end{cases}$

c) $m = n \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} \dots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0} = \frac{a_m}{a_n}$

Estos no son los únicos tipos de límites en donde aparece la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$, veamos otros casos diferentes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} \dots + a_0}{k^x} = 0 \quad (k > 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k^x}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0} = +\infty \quad (k > 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} \dots + a_0}{\log_k x} = +\infty \quad (k > 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_k x}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0} = 0 \quad (k > 1)$$

6.3. Resolución de indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$

Aparece este tipo de límites principalmente en 2 casos diferentes:

1) *Cociente de funciones polinómicas:* se resuelven descomponiendo factorialmente numerador y denominador

Ejemplos:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - 7x^2 + 14x - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x^2 - 5x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+3)}{(x^2 - 5x + 4)} = \frac{5}{-2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^3 - 3x - 2} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 + 2x + 1)}{(x+1)(x^2 - x - 2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 + 2x + 1)}{x^2 - x - 2} = \frac{0}{0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)}{(x-2)} = \frac{0}{-3} = 0 \end{aligned}$$

- 2) *Cociente con funciones racionales*: se resuelven multiplicando numerador y denominador por la expresión conjugada de la que lleva raíz:

Ejemplos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x+4} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - x)(\sqrt{x+4} + 2)}{(\sqrt{x+4} - 2)(\sqrt{x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - x)(\sqrt{x+4} + 2)}{x + 4 - 4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - x)(\sqrt{x+4} + 2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1)(\sqrt{x+4} + 2)}{1} = -4 \end{aligned}$$

6.4. Resolución de indeterminaciones del tipo $\frac{k}{0}$

Este límite puede ser $+\infty$, $-\infty$ o no existir por ser los límites laterales diferentes. Se calcula a partir de los límites laterales:

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 1}{x - 3} = \frac{k}{0} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 1}{x - 3} = \frac{k}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 1}{x - 3} = \frac{k}{0^-} = -\infty \end{cases} \text{ no existe el límite}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 1}{(x - 3)^2} = \frac{k}{0} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 1}{(x - 3)^2} = \frac{k}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 1}{(x - 3)^2} = \frac{k}{0^+} = +\infty \end{cases} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 1}{(x - 3)^2} = +\infty$$

6.5. Resolución de indeterminaciones del tipo $0 \cdot \infty$

Se resuelven transformándolas en indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{x^4 - 2}} (2x - 3) = 0 \cdot \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3(2x - 3)}{\sqrt{x^4 - 2}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x - 9}{\sqrt{\frac{x^4}{x^4} - 2}} = 0$$

6.6. Resolución de indeterminaciones del tipo $\infty - \infty$

Las indeterminaciones de este tipo con funciones irracionales se resuelven multiplicando y dividiendo la función por el conjugado:

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 5x} - (x + 3) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 5x} - (x + 3))(\sqrt{x^2 + 5x} + (x + 3))}{\sqrt{x^2 + 5x} + (x + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5x - (x^2 + 6x + 9)}{\sqrt{x^2 + 5x} + (x + 3)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x - 9}{\sqrt{x^2 + 5x} + (x + 3)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1 - \frac{9}{x}}{\sqrt{1 + \frac{5}{x}} + 1 + \frac{3}{x}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

6.7. Resolución de indeterminaciones del tipo 1^∞

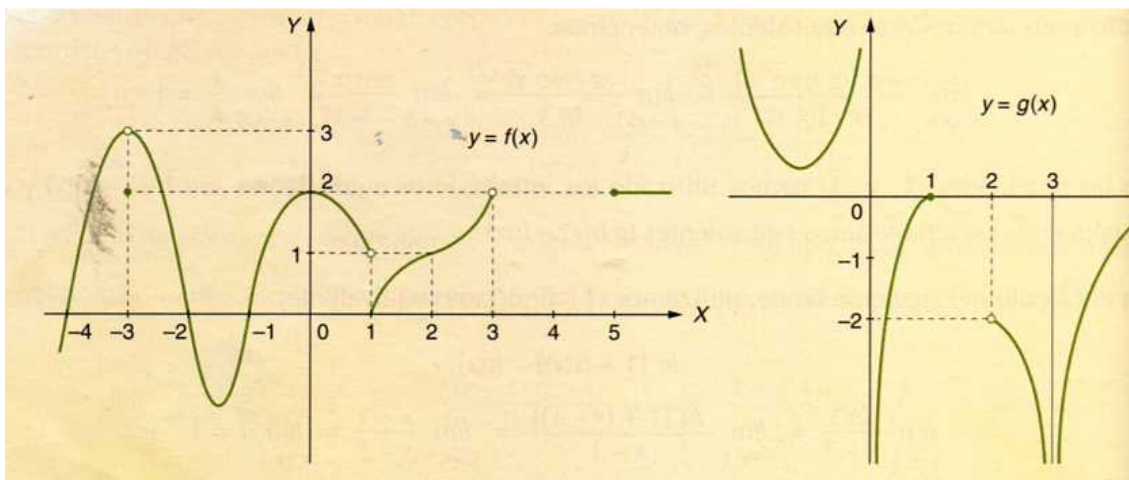
Estas indeterminaciones están relacionadas con el número e. Se calculan de la siguiente forma:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \cdot (f(x)-1)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \cdot (f(x)-1)}$$

Ejemplo: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 3x}{x^2 + 4} \right)^{x^2} = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x^2 \left(\frac{x^2 - 3x}{x^2 + 4} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \frac{-3x - 4}{x^2 + 4}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^3 - 4x^2}{x^2 + 4}} = e^{-\infty} = 0$

Ejercicios

4) Calcula en las siguientes funciones representadas los siguientes datos:



- a) $f(-3)=2$, $f(-2)=0$, $f(0)=2$, $f(4) \notin \text{Dom}(f(x))$
- b) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \text{no existe}$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \text{no existe}$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \text{no existe}$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$
- c) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = -2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \text{no existe}$, $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \text{no existe}$

5) Calcular el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 2} e^{\frac{1}{x-2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2}} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = e^{-\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = e^{\infty} = \infty \end{cases} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} e^{\frac{1}{x-2}} = \text{no existe}$$

6) Calcula cuánto debe valer a para que la siguiente función tenga límite cuando x tiende a 1:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3-ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 - a$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$, el límite $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ existe siempre que $a=1$.

7) Siendo $f(x) = \sqrt{2x+3}$ calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{x - 3} = \frac{\sqrt{11} - 3}{1} = \sqrt{11} - 3$$

8) Calcular los siguientes límites

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-4} = 0$, **b)** $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^4 = \infty$, **c)** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^3} = \frac{3}{0}$ (ind) $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{x^3} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{x^3} = -\infty \end{array} \right.$ no existe

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{-2}}{5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{5x^2} = \frac{1}{0}$ (ind) $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{5x^2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{5x^2} = +\infty \end{array} \right.$ **e)** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5}{3} = 0$, **f)** $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^5} = 0$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{x^2+1} + \frac{3}{x+2} \right] = 0 + 0 = 0$, **h)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^{-x} = 3^{-\infty} = 0$ **i)** $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{-x} = 3^{\infty} = \infty$

j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^x = \left(\frac{2}{3} \right)^{\infty} = 0$ **k)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{\sqrt{x^2-2}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-2}}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}} = \frac{\infty}{1} = \infty$

l) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - 3x - 1}{x^3 + 3} = -\infty$ **m)** $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = 0$ **n)** $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x + 6}{x^2 + 3x + 2} = -\infty$

o) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{2}{3}$ **p)** $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 6}{x^3 + 3x^2 + 2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-3)}{x(x+1)(x+2)} = \frac{-5}{2}$

q) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 4} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-2)(x-2)} = \frac{-1}{0} \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{x-2} = \frac{-1}{0^-} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-3}{x-2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \end{array} \right.$ no existe

r) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)} = 2$

s) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 - \sqrt{4-x})(2 + \sqrt{4-x})}{x(2 + \sqrt{4-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - 4 + x}{x(2 + \sqrt{4-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 + \sqrt{4-x}} = \frac{1}{4}$

$$t) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{1+x - (1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{2} = 1$$

$$u) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 6x - 9}{x - 3} = \frac{18}{0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 + 6x - 9}{x - 3} = \frac{18}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + 6x - 9}{x - 3} = \frac{18}{0^-} = -\infty \end{cases} \text{ no existe}$$

$$v) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 6x - 3}{2x^2 - 5x} = \frac{-3}{0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 + 6x - 3}{2x^2 - 5x} = \frac{-3}{(0^+)^2 - 0^+} = \frac{-3}{(0^+)^2 + 0^-} = \frac{-3}{0^-} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2 + 6x - 3}{2x^2 - 5x} = \frac{-3}{0^+} = -\infty \end{cases} \text{ no existe}$$

$$w) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2 - (x-2)}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2})} = \frac{4}{\infty} = 0$$

$$x) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+1}{5x-1} \right)^{3x+2} = 1^\infty = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (3x+2) \left(\frac{5x+1}{5x-1} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x+4}{5x-1} \right)} = e^{\frac{6}{5}}$$

$$y) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{3}{x-1}} = 1^\infty = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{x-1} \right) \left(\frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{x-1} \right) \left(\frac{x^2(x-1)}{x^2 + 1} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2}{x^2 + 1}} = e^{\frac{3}{2}}$$

$$z) \lim_{x \rightarrow 2} (x-1)^{\frac{3}{x-2}} = 1^\infty = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x-2} (x-2)} = e^3 \quad \text{aa) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}} = 1$$

$$\text{ab) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 - 5} - (2x - 3)) = \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 5 - (4x^2 - 12x + 9)}{(\sqrt{4x^2 - 5} + (2x - 3))} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x - 14}{(\sqrt{4x^2 - 5} + (2x - 3))} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12 - \frac{14}{x}}{\sqrt{4 - \frac{5}{x^2}} + (2 - \frac{3}{x})} = \frac{12}{4} = 3$$

$$\text{ac) } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{2x-4}}{x-2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{2}\sqrt{x-2}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}} = \frac{\sqrt{2}}{0^+} = +\infty$$

Ejercicios PAU

Septiembre 2004. Prueba B. C-4. Determinése el valor del parámetro a para que se verifique $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + ax + 1} - x) = 2$. (1 punto)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + ax + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + ax + 1 - x^2)}{(\sqrt{x^2 + ax + 1} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(ax + 1)}{(\sqrt{x^2 + ax + 1} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{\sqrt{1 + 1}} = 2$$

$a=4$

