UNIDAD 10. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1. Definiciones, tipos de sistemas y distintas formas de expresarlas
   1.1. Definición, sistemas equivalentes
   1.2. Clases de sistemas de ecuaciones.
   1.3. Expresión de sistemas en forma matricial
2. Sistemas de Cramer
3. Teorema de Rouchè-Fröbenius. Discusión soluciones sistema
4. Resolución general de sistemas de ecuaciones lineales por Cramer.
   4.1. Sistemas compatibles determinados
   4.2. Sistemas compatibles indeterminados
5. Resolución de Sistemas homogéneos.
6. Resolución de sistemas por Gauss.

Contexto con la P.A.U.

Por lo general en los exámenes de selectividad, uno de los dos problemas de las dos opciones es relativo al estudio y resolución de sistemas. Suele ser un problema más o menos sencillo y metódico, con los que podremos obtener 3 puntos.

También en algunas ocasiones una cuestión del examen (valorada en 1 punto) está relacionada con la resolución de sistemas, por lo general homogéneo.

Para la resolución de estos problemas es esencial el cálculo de determinantes y rangos de matrices que vimos en el tema anterior.

1. Definiciones, tipos de sistemas y distintas formas de expresarlos

1.1 Definiciones. Sistemas equivalentes.

Definición: se llama sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas al conjunto formado por m ecuaciones con n incógnitas.

$$\left.\begin{array}{ll} a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+\ldots+a_{1n}\cdot x_n=b_1 & (1) \\ a_{21}\cdot x_2+a_{22}\cdot x_2+\ldots+a_{21}\cdot x_n=b_n & (2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}\cdot x_1+a_{m2}\cdot x_2+\ldots+a_{mn}\cdot x_m=b_m & (m) \end{array}\right\}$$

a_{ij} coeficientes del sistema

b_j términos independientes

x_j incógnitas

Ejemplo

$$\left.\begin{array}{ll} 3x-4y+5z=1 & (1) \\ 2x+3y=5 & (2) \\ -x+y-z=-3 & (3) \end{array}\right\} \quad \text{3 ecuaciones y 3 incógnitas}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 2x+3y+z+t=1 & (1) \\ x-t=0 & (2) \end{array}\right\} \quad \text{2 ecuaciones y 4 incógnitas}$$

Resolver un sistema es obtener todas sus posibles soluciones.

S_1= soluciones de (1)

S_2= soluciones de (2)

…

S_m=soluciones de (m)

$\rightarrow$S= soluciones del sistema $=S_1\cap S_2\cap\ldots\cap S_m$ (comunes a todas)

***Definición**:* Dos sistemas son equivalentes si tienen las mismas soluciones. Forma de obtener sistemas equivalentes:

1) Sumar una constante a ambos miembros de la igualdad de una o varias ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x+y=2 \\ 3x+y=-2 \end{array}\right\} S \qquad \left.\begin{array}{l} x+y+3=5 \\ 3x+y=-2 \end{array}\right\} S'$$

S≡S'

2) Multiplicar por una constante, distinta de cero, a ambos lados de la igualdad de una o varias ecuaciones

$$S\left\{\begin{array}{l} x+y=2 \\ 3x+y=-2 \end{array}\right. \qquad S''\left\{\begin{array}{l} 2x+2y=4 \\ 3x+y=-2 \end{array}\right.$$

S≡S''

3) Sustituir una ecuación por una combinación lineal de la misma con las restantes ecuaciones

$$S\left\{\begin{array}{l} (1)\ x+y=2 \\ (2)\ 3x+y=-2 \end{array}\right. \qquad S'''\left\{\begin{array}{l} 3(1)-(2)\ \ 2y=8 \\ (2)\ 3x+y=-2 \end{array}\right.$$

S≡S'''

4) Añadir o quitar ecuaciones que sean combinación lineal de las restantes ecuaciones:

$$S\left\{\begin{array}{l} (1)\ x+y=2 \\ (2)\ 3x+y=-2 \end{array}\right. \qquad S''''\left\{\begin{array}{r} (1)\ x+y=5 \\ (2)\ 3x+y=-2 \\ (1)+2(2)=(3)\ 7x+3y=1 \end{array}\right.$$

S≡S''''

1.2. Clases de sistemas de ecuaciones

Dos criterios para clasificar los sistemas de ecuaciones lineales:

1. **Según el valor de los términos independientes:**
   - Homogéneos: todos los términos independientes son nulos
   - No homogéneos: algún término independiente es diferente de cero

$$\left.\begin{array}{l} 3x+y=0 \\ -5x+y=0 \end{array}\right\} \text{Homogéneo} \qquad \left.\begin{array}{l} 3x+y=2 \\ 3x+y=0 \end{array}\right\} \text{No homogéneo}$$

2. **Según el número de soluciones:**
   - Compatibles: tienen solución
     - Determinados: única solución
     - Indeterminados: infinitas soluciones
   - Incompatibles: sin solución.

Ejemplos:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=2 \\ x-y=0 \end{array}\right\} \rightarrow x=y=1 \qquad \text{Compatible determinado}$$

x+y=1 → y=1-x Compatible indeterminado

$$\left.\begin{array}{l} x+y=2 \\ x+y=0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{ sin solución}\quad \text{Incompatible}$$

1.3. Expresión de sistemas en forma matricial

Una manera más cómoda y útil de trabajar con los sistemas de ecuaciones lineales es de forma matricial. El sistema visto en el apartado 1.1 de forma matricial vendrá definido como:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}}_{B} \longrightarrow A \cdot X = B$$

A=Matriz de coeficientes

$$A^{*}\text{=Matriz ampliada =(A|b)=}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} 2x-y+3z=2 \\ -x-2y+z=0 \\ x+y-z=-1 \end{array}\right\}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad A^{*}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

A·X=B

2. Sistemas de Cramer

Definición**:* un sistema de ecuaciones lineales se dice que es de ***Cramer si cumple las siguientes condiciones:

- Mismo número de ecuaciones que de incógnitas n=m
- El determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero |A|≠0

Los sistemas de Cramer son todos compatibles determinados (una sola solución).

Existen dos métodos de resolución de los sistemas de Cramer.

Método1: a partir de la matriz inversa.

El sistema de Cramer se puede escribir en forma matricial como AX=b, y tal que A tiene inversa al ser una matriz cuadrada con determinante distinto de cero. Así podemos expresar las soluciones como:

$X=A^{-1}\cdot B$

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ x-y=0 \\ x-z=0 \end{array}\right\} \text{ 3 ecuaciones y 3 incógnitas, } |A|=3\neq 0 \rightarrow \text{Sistema de Cramer}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{x=y=z=1}$$

Método2: por desarrollo de columnas

En este método no tendremos que calcular la matriz inversa, sino tantos determinantes como incógnitas suele resultar más sencillo

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}, \ \ldots, \ x_n=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix}}{|A|}$$

Ejemplo: veamos el sistema anterior:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{3}=\frac{3}{3}=1 \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{3}=\frac{3}{3}=1, \ z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{3}=\frac{3}{3}=1$$

Ejercicio 1: Resuelve los siguientes sistemas a partir de Cramer si es posible.

$$\left.\begin{array}{l} x+3y-z=-5 \\ -x-2y+z=4 \\ 5x+4z=8 \end{array}\right\}$$

A= $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ Sistema de Cramer pues tiene 3 ecuaciones y 3 incógnitas y |A|=9≠0

Método1:

$$A^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & -12 & 1 \\ 9 & 9 & 0 \\ 10 & 15 & 1 \end{pmatrix} \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & -12 & 1 \\ 9 & 9 & 0 \\ 10 & 15 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 18 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

x=0, y=-1, z=2

Método 2:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -5 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 8 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{9}=\frac{0}{9}=0 \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -5 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & 8 & 4 \end{vmatrix}}{9}=\frac{-9}{9}=-1,\ z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -1 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 8 \end{vmatrix}}{9}=\frac{18}{9}=2$$

3. Teorema de Rouchè-Fröbenius. Discusión soluciones del Sistema

Teorema: sea un sistema con m ecuaciones lineales con n incógnitas, el sistema es compatible (tiene soluciones) si, y sólo si, el rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada

Sistema compatible ←→ rang(A)=rang(A*)

Según la relación entre el rango y el número de incógnitas tenemos que el sistema será compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible. Veámoslo en la siguiente tabla resumen:

1. rang(A)≠rang(A^*)→ Sistema incompatible (no solución)
2. rang(A)=rang(A^*)=r

   a) si r=n (n=nº incógnitas)→ Compatible determinado

   b)si r<n (n=nº incógnitas)→Compatible indeterminado con n-r parámetros libres

4. Resolución general de sistemas de ecuaciones por Cramer.

En el apartado 2 vimos como resolver sistemas con igual número de incógnitas que de ecuaciones cuando el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero. En este apartado vamos a ser más genéricos, resolviendo por Cramer todo tipo de sistema compatible; es decir sistemas en los que rang(A)=rang(A^*) tanto si son compatibles determinados como indeterminados. Veamos uno a uno los dos casos:

4.1. Compatible determinado

Para que un sistema sea compatible determinado es necesario que el número de ecuaciones m sea mayor o igual que el de incógnitas n (m≥n), y que se cumpa que rang(A)=rang(A^*)=n. De esta forma sólo hay n ecuaciones independientes, tal que si el sistema tiene m ecuaciones, m-n son dispensables y podemos eliminarlas. Es importante comprobar que las n ecuaciones escogidas sean independientes, lo cual se comprueba viendo que el rango del nuevo sistema continúe siendo n. El nuevo sistema será equivalente al anterior (misma solución) y se puede resolver por Cramer.

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=7 \\ 2x-y=-7 \\ 7x-2y=-14 \end{array}\right\} \text{(S)} \quad \text{el sistema no puede ser de Cramer pues } n\neq m$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ rang(A)=2 ya que } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

$$A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & -7 \\ 7 & -2 & -14 \end{pmatrix}, \text{ rang}(A^*)=2 \text{ ya que } |A^*|=0$$

rang(A)=rang(A^*)=2=n (nºincógnitas)→ Compatible determinado.

Como el rango es 2, tenemos sólo 2 ecuaciones linealmente independientes, de forma que podemos eliminar una de las 3 ecuaciones, de manera que el rango del sistema continúe siendo 2.

Vamos a quitar la tercera ecuación pues, cuando calculamos el rango de A comprobamos que, para los coeficientes de las dos primeras ecuaciones, el determinante es distinto de cero.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=7 \\ 2x-y=-7 \end{array}\right\}$$

$$\text{(S')}\rightarrow A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \; |A'|=-3\neq 0 \text{ rang } (A')=2 \rightarrow S\equiv S' \text{ (mismas soluciones)}$$

Solución: (S') es ahora de Cramer

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -7 & -1 \end{vmatrix}}{-3}=0 \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -7 \end{vmatrix}}{-3}=\frac{-21}{-3}=7$$

4.2. Compatible indeterminado

Sea un sistema con m ecuaciones y n incógnitas, tal que rang(A)=rang(A')=r<n, entonces el sistema es compatible indeterminado con n-r parámetros libres.

Tenemos así que buscar un sistema equivalente con r ecuaciones y r incógnitas:

1. Tomamos r ecuaciones independientes (rango del sistema es r)
2. Pasamos n-r incógnitas a la derecha de la igualdad y las tratamos como parte del término independiente (parámetros libres).
3. El sistema se resuelve por Cramer con n-r parámetros libres

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ -x-y+2z=0 \\ x+y+4z=6 \end{array}\right\} (S)$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Si calculamos los rangos se cumple que rang(A)=rang(A^*)=2. Luego el sistema es compatible indeterminado con 3-2=1 parámetro libre.

Tomaremos la z como parámetro libre y las 2 primeras ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=3-z \\ -x-y=-2z \end{array}\right\} (S')$$

$A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ |A'|=0 por lo tanto el rango no será 2, tenemos que o bien coger la otra ecuación o cambiar de parámetro libre. Cambiaremos de parámetro tomando la y:

$$\left.\begin{array}{l} x+z=3-y \\ -x+2z=y \end{array}\right\} (S'')$$

$A''=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ |A''|=3≠0 → rang (A'')=2 → S≡S'' (mismas soluciones)

Tenemos así que S'' se puede resolver por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3-y & 1 \\ y & 2 \end{vmatrix}}{3}=\frac{6-2y-y}{3}=2-y \quad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-y \\ -1 & y \end{vmatrix}}{3}=\frac{y+3-y}{3}=1$$

Es lógico que no pudiéramos tomar la z como parámetro libre, pues tiene un valor fijo z=1, y por tanto, no podemos poner las demás variables en función de la z.

5. Resolución de sistemas homogéneos.

Recordemos que los sistemas homogéneos son los que tienen todos sus términos independientes nulos.

$$\left.\begin{array}{ll} a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+\ldots+a_{1n}\cdot x_n=0 & (1) \\ a_{21}\cdot x_2+a_{22}\cdot x_2+\ldots+a_{21}\cdot x_n=0 & (2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}\cdot x_1+a_{m2}\cdot x_2+\ldots+a_{mn}\cdot x_m=0 & (m) \end{array}\right\}$$

Una de las características más relevantes es que todo sistema homogéneo es compatible, ya que la última columna de la matriz ampliada, A^*, es nula, con lo que siempre rang(A)=rang(A^*).

Además, es fácil ver que todo sistema homogéneo tiene como solución la denominada solución trivial o impropia $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$.

Para discutir y obtener la solución del de un sistema homogéneo tenemos el siguiente esquema →rang(A)=rang(A^*)=r con n incógnitas:

- Si r=n, compatible determinado. La única solución la solución trivial
- Si r<n, compatible indeterminado con n-r parámetros libres y ecuaciones independientes.

***Ejemplo*: C.1 Septiembre del 2006, prueba A.**

Estudiar el número de soluciones del siguiente sistema en función de m, resolver cuando sea posible:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ x+my+mz=0 \\ 2x+(m+1)y+2z=0 \end{array}\right\} \rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 2 & m+1 & 2 \end{pmatrix}$$

Veamos el rango de A en función de m:

$|A|=-m^2+2m-1$

a) Si m=1 |A|=0→ rang (A)=1, sistema compatible indeterminado

b) Si m≠1 |A|≠0→rang(A)=3, sistema compatible determinado, x=y=z=0.

Veamos las soluciones si m=1 (compatible indeterminado):

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ 2x+2y+2z=0 \end{array}\right\} \rightarrow x+y+z=0 \rightarrow \left.\begin{array}{r} x=\lambda \\ y=\mu \\ z=-\lambda-\mu \end{array}\right\}$$

EXÁMENES DE PAU

Junio 2008. Prueba B.

PR-1.- Se considera el sistema $\begin{cases} x-y+z=-1 \\ y+z=2a \\ x+2z=a^2 \end{cases}$ donde a es un parámetro real

a) Discutir el sistema en función del valor de a

b) Resolver el sistema para a=0

c) Resolver el sistema para a=1

Solución

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A^*=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2a \\ 1 & 0 & 2 & a^2 \end{pmatrix}$

Rango de A

|A|= $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=2-1-1=0$ → rang(A)<3; $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$ rang(A)=2

independientemente del valor de a.

Rango de A*: veamos los menores de A* de orden 3

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2a \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix}=a^2-2a+1=(a-1)^2$ → Si a≠1 rang(A)=3

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2a \\ 1 & 2 & a^2 \end{vmatrix}=a^2+2a+1-4a=(a-1)^2$ → Si a≠1 rang(A)=3

$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2a \\ 0 & 2 & a^2 \end{vmatrix}=-a^2-2+4a-a^2=-2(a-1)^2$ → Si a≠1 rang(A)=3

Luego Rang(A*)=3 siempre que a≠1.

Si a=1 $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$ → rang(A*)=2

Conclusión:

	a=1	$a\in R-\{1\}$
rang(A)	2	2
rang(A*)	2	3
	S.C.I.	S.I.

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) con un parámetro libre si a=1. Siempre que a≠1 entonces el sistema será incompatible (sin soluciones)

b) Si a=0 no tiene solcuiones

c) Si a=1 sistema incompatible indeterminado. Tenemos que buscar un sistema equivalente con dos ecuaciones y un parámetro libre. Este sistema tiene que cumplir que rang(A)=rang(A*)=2. Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ tomemos las 2 primeras ecuaciones y con x e y de incógnitas:

$$\left.\begin{array}{r} x-y=-1-z \\ y=2-z \end{array}\right\}$$

En este caso es sencillo resolver el sistema:

y=2-z

x=-1-z+(2-z)=1-2z

Soluciones: $\begin{cases} x=1-2t \\ y=2-t \\ z=t \end{cases}$

Septiembre 2008. Prueba A.

PR-1.- Sea a un parámetro real. Se considera el sistema $\begin{cases} x+ay+z=2+a \\ (1-a)x+y+2z=1 \\ ax-y-z=1-a \end{cases}$

a) Discutir el sistema en función del valor de a .

b) Resolver el sistema para a = 0 .

c) Resolver el sistema para a = 1.

a) A=$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1-a & 1 & 2 \\ a & -1 & -1 \end{pmatrix}$, A*=$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 2+a \\ 1-a & 1 & 2 & 1 \\ a & -1 & -1 & 1-a \end{pmatrix}$

<u>Rango de A:</u>

|A|=a(a+1)

· Si a≠{0,-1} entonces rang(A)=3.

· Si a=0 → A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ → $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ rang(A)=2

· Si a=-1 → A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ → $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ rang(A)=2

<u>Rango de A*</u>

· Si a≠{0,-1} entonces rang(A*)=3.

· Si a=0 A*=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ → $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

rang(A*)=2

· Si a=-1 A*=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ → $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ rang(A*)=3

<u>Conclusión</u>

	a=-1	a=0	a∈R-{-1,0}
rang(A)	2	2	3
Rang(A*)	3	2	3
	S.I.	S.C.I	S.C.D.

b) Si a=0 tenemos que buscar un sistema equivalente con dos ecuaciones y dos incógnitas. Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ podemos coger las dos primeras ecuaciones con x e y como incógnitas:

$\begin{cases} x = 2 - z \\ x + y = 1 - 2z \end{cases}$ → x=2-z; y=1-2z-(2-z)=-1-z

x=2-t, y=-1-t, z=t

c) Si a=-1 sistema incompatible sin soluciones

Septiembre 2006. Prueba B.

P.1.- Discútase, en función del parámetro real k , el siguiente sistema de ecuaciones lineales. Resolver cuando sea posible.

$$\left.\begin{array}{r} kx + 3y = 0 \\ 3x + 2y = k \\ 3x + ky = 0 \end{array}\right\}(S) \quad A = \begin{pmatrix} k & 3 \\ 3 & 2 \\ 3 & k \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} k & 3 & 0 \\ 3 & 2 & k \\ 3 & k & 0 \end{pmatrix}$$

Para estudiar el sistema hay que ver los rangos de las matrices A y A* en función del parámetro libre k.

1. <u>Rango de A:</u> El rango mayor de A puede ser 2
   a. rang(A)=2 → $\begin{vmatrix} k & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \ \ o \ \ \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & k \end{vmatrix} \neq 0 \ \ o \ \ \begin{vmatrix} k & 3 \\ 3 & k \end{vmatrix} \neq 0$

   Las ecuaciones que quedan son las siguientes:

   $$2k - 9 \neq 0 \to k \neq \frac{9}{2}$$
   $$3k - 6 \neq 0 \to k \neq 2$$
   $$k^2 - 9 \neq 0 \to k \neq \pm 3$$

   Para que el rango sea 1 deberían de ser todos los determinantes nulos, y como no existe ningún valor de k que haga todos los determinantes nulos, entonces el rango de A siempre es 2.

   Luego ∀k∈R rang(A)=2

2. <u>Rango de A*</u>: el rango de A* puede ser como máximo 3.
   a. rang(A)=3 → $\begin{vmatrix} k & 3 & 0 \\ 3 & 2 & k \\ 3 & k & 0 \end{vmatrix} = 9k - k^3 \neq 0 \ \to k \neq 0, \pm 3$

   ∀k∈R-{0, 3, -3} rang(A*)=3

   b. rang(A)=2 solo puede ser en k=0, 3 o -3. Veamos lo que ocurre para estos valores:

k=0 → $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$ → rang(A^*)=2

k=3→ $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ → rang(A^*)=2

k=-3→ $A^* = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$ → rang(A^*)=2

Se cumple así que para k=0, 3, -3 el rango de la ampliada es dos.

Conclusión: vamos a apoyarnos en esta tabla para discutir el sistema de ecuaciones:

	k=3	k=-3	k=0	$k \in R-\{0,3,-3\}$
rang(A)	2	2	2	2
rang(A^*)	2	2	2	3
	Comp. Det.	Comp. Det.	Comp. Det.	Incompatible

El número de soluciones según k son:

· Si k=0, 3, -3 Sistema compatible determinado

· Si $k \in R-\{0, 3, -3\}$ Sistema incompatible.

La segunda parte del enunciado dice que lo resolvamos para los valores de k que tenga solución. Podríamos resolverlo independientemente para los tres valores de k, aunque sería muy laborioso. Vamos a resolverlo en función de k. Como el rango de A es 2, tendremos que buscar dos ecuaciones independientes, en los que el rango sea 2.

$$\left.\begin{matrix} kx + 3y = 0 \\ 3x + 2y = k \end{matrix}\right\} (S') \quad A = \begin{pmatrix} k & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} k & 3 & 0 \\ 3 & 2 & k \end{pmatrix}$$

Veamos como dos ecuaciones independientes para los tres valores de k (rango de A es 2):

|A|=2k-9≠0 para k=0, 3 y -3.

Resolvamos el sistema:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}0 & 3\\ k & 2\end{vmatrix}}{2k-9}=\frac{-3k}{2k-9} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}k & 0\\ 3 & k\end{vmatrix}}{2k-9}=\frac{k^2}{2k-9}$$

Si k=0 → x=0, y=0

Si k=3 → x=3, y=-3

Si k=-3→ x=-3/5, y=-3/5

Junio 2006. Prueba B.

P.1.- Se considera el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ (1+a)y+z=4. \\ x+2y+az=4 \end{cases}$

a) Discútase el sistema según el valor del parámetro real a.

b) Resuélvase el sistema para a=2.

Solución:

a)

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=3 \\ (1+a)y+z=4 \\ x+2y+az=4 \end{array}\right\}(S) \quad A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1+a & 1\\ 1 & 2 & a\end{pmatrix} \quad A^*=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 1+a & 1 & 4\\ 1 & 2 & a & 4\end{pmatrix}$$

Veamos el rango de A y de A^*:

1. <u>Rango de A</u>
   a) rang(A)=3→ |A|=a^2-1≠0 → a≠1,-1

      ∀a∈R-{1,-1}, rang(A)=3

   b) Veamos el rango cuando a=1:

      A(a=1)= $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0$ → rang(A(a=1))=2

   c) Veamos ahora cuando a=-1

      A(a=-1)= $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0$ → rang(A(a=-1))=2

2. <u>Rango de A^*</u>

   a) $rang(A^*)=3$ siempre que $a\in R-\{1,-1\}$.

   b) Veamos el rango para a=1 de $A^*=\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&2&1&4\\1&2&1&4\end{pmatrix}$,

$\begin{vmatrix}1&2&3\\0&2&4\\1&2&4\end{vmatrix}=6\neq 0$ → $rang(A^*(a=1))=3$

   c) Veamos el rango para a=-1 de $A^*=\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&0&1&4\\1&2&-1&4\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix}1&2&3\\0&0&4\\1&2&4\end{vmatrix}=0$ $\begin{vmatrix}1&1&3\\0&1&4\\1&2&4\end{vmatrix}=-3\neq 0$ → $rang(A^*(a=-1))=3$

Luego el rango de A^* es 3 independientemente del valor de a.

Veamos la siguiente tabla para discutir el sistema según el valor de a:

	a=-1	a=1	$a\in R-\{1,-1\}$
rang(A)	2	2	3
$Rang(A^*)$	3	3	3
	INC	INC	C.D.

<u>**Conclusión:**</u>

$\forall\ a\in R-\{1,-1\}$ → Sistema Compatible determinado (1 solución)

a=1,-1 → Sistema incompatible (sin soluciones)

----

b) Solución cuando a=2: el sistema es compatible determinado, resolviendo por Cramer tenemos que las soluciones son

x=0, y=1, z=1.

Septiembre 2005. Prueba B.

PR-1.- Sea k un número real. Considérese el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} kx+y+z=1 \\ x+ky+z=k \\ x+y+kz=k^2 \end{cases}.$$

a) Discútase según los valores de k e interprétese geométricamente el resultado.

b) Resuélvase el sistema para k=2.

Solución

a) $\left.\begin{array}{r} kx+y+z=1 \\ x+ky+z=k \\ x+y+kz=k^2 \end{array}\right\}(S)\ A=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}\ A^*=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & k & k^2 \end{pmatrix}$

Veamos un rango de A y de A*:

1. <u>Rango de A</u>
   a) rang(A)=3→ $|A|=k^3-3k+2=(k-1)^2(k+2)\neq 0$ → $k\neq 1,-2$

      $\forall k\in R-\{1,-2\}$, rang(A)=3

   b) Cuando k=1:

      A(k=1)= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0$ → rang(A(k=1))=1

   c) Cuando k=-2

      A(k=-2)= $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=3\neq 0$ → rang(A(k=-2))=2

2. <u>Rango de A*</u>
   a) rang(A*)=3 siempre que $k\in R-\{1,-2\}$.

   b) Para k=1 de A*= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

      $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0$ → rang(A*(k=1))=1

   c) Para k=-2 de A*= $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \rightarrow \text{rang}(A^*(k=-2))=3$$

Estudiemos la siguiente tabla para discutir el sistema según el valor de k:

	k=-2	k=1	k∈R-{1,-2}
rang(A)	2	1	3
Rang(A^*)	3	1	3
	INC	C. IND	C.D.

<u>Conclusión:</u>

∀ k∈R-{1,-2}→ Sistema Compatible determinado (1 solución)

k=-2 → Sistema incompatible (sin soluciones)

k=1 → Sistema compatible indeterminado con dos parámetros libres

b) Solución cuando k=2: el sistema es compatible determinado, resolviendo por Cramer tenemos que la solución es

x=-3/4, y=1/4, z=9/4.

Junio 2005. Prueba A.

PR-1.- a) Discútase el sistema $\begin{cases} x + ay - z = 2 \\ 2x + y + az = 0 \\ 3x + (a+1)y - z = a - 1 \end{cases}$, en función del valor de *a*.

b) Para el valor a=1, hállese, si procede, la solución del sistema.

Solución:

a)

$$\left.\begin{array}{r} x + ay - z = 2 \\ 2x + y + az = 0 \\ 3x + (a+1)y - z = a-1 \end{array}\right\} (S) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \\ 3 & a+1 & -1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & 1 & a & 0 \\ 3 & a+1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$$

Veamos un rango de A y de A^*:

1. <u>Rango de A</u>

   a) rang(A)=3→ |A|=$2a^2$-a≠0 → a≠0,1/2

   ∀a∈R-{0,1/2}, rang(A)=3

b) Rango cuando a=0:

A(a=0)= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ → rang(A(a=0))=2

c) Rango cuando a=1/2

A(a=1/2)= $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 2 & 1 & 1/2 \\ 3 & 3/2 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{5}{2} \neq 0$ → rang(A(a=1/2))=2

2. <u>Rango de A^*</u>

a) rang(A^*)=3 siempre que a∈R-{0,1/2}.

b) Rango para a=0 de A^*= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$,

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ → rang(A^*(a=0))=3

c) Rango para a=1/2 de A^*= $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1/2 & 0 \\ 3 & 3/2 & -1 & -1/2 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1/2 \\ 3 & -1/2 & -1 \end{vmatrix} = 33/4 \neq 0$ → rang(A^*(a=1/2))=3

Estudiemos la siguiente tabla para discutir el sistema según el valor de a:

	a=0	a=1/2	a∈R-{0,1/2}
rang(A)	2	2	3
Rang(A^*)	3	3	3
	INC	INC	C.D.

<u>Conclusión:</u>

∀ a∈R-{0,1/2}→ Sistema Compatible determinado (1 solución)

a=0, 1/2 → Sistema incompatible (sin soluciones)

----

b) Solución cuando a=1: el sistema es compatible determinado, resolviendo por Cramer tenemos que las soluciones son

x=-6, y=10, z=2

Septiembre 2004. Prueba B.

PR-1.- Se considera el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x+ay+3z=2 \\ 2x+(2+a)y+6z=3 \end{cases}$.

a) ¿Existe algún valor del parámetro *a* para el cual el sistema sea incompatible?

b) ¿Existe algún valor del parámetro *a* para el cual el sistema sea compatible determinado?

c) Resuélvase el sistema para *a*=0.

Solución:

a) $\left.\begin{array}{r} x+2y+3z=1 \\ x+ay+3z=2 \\ 2x+(2+a)y+6z=3 \end{array}\right\}(S)\ A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & a & 3 \\ 2 & 2+a & 6 \end{pmatrix}\ A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & a & 3 & 2 \\ 2 & 2+a & 6 & 3 \end{pmatrix}$

Calculemos los rangos de A y A^*

1. Rango de A

   a) rang(A)=3→ |A|=0 → no hay ningún valor de a que haga el determinante distinto de cero, luego el rango siempre es menor que 3.

   rang(A)=2: para que el rango sea 2 tiene que haber algún menor de orden 2 distinto de cero. Calculando los menores:

   $$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & a \end{vmatrix}=a-2\neq 0\to a\neq 2,\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ a & 3 \end{vmatrix}=6-3a\neq 0\to a\neq 2$$

   $$\begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & 2+a \end{vmatrix}=-a+2\neq 0\to a\neq 2$$

   Luego siempre que a≠2 el rango de A será 2.

   $\forall$ a∈R-{2}→ rang(A)=2

   b) Cuando a=2

   $A(a=2)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, → rang(A(a=2))=1. (las tres filas son proporcionales)

2. Rango de A^*

$$A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & a & 3 & 2 \\ 2 & 2+a & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Tenemos que buscar un menor de orden 3 no nulo para que sea de rango 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 2 & 2+a & 3 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ a & 3 & 2 \\ 2+a & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

No hay ningún menor de orden 3 no nulo (la tercera fila es suma de las dos primeras), con lo que el rango es menor que 3 para cualquier valor de a.

Veamos si hay algún menor de orden 2 no nulo:

$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ =3≠0 independientemente del valor de a.

Luego el rango de A^* es siempre 2, independientemente del valor de a.

	a=2	a∈R-{2}
rang(A)	1	2
rang(A^*)	2	2
	INC	C.I.

<u>Conclusión:</u>

∀ a∈R-{2}→ Sistema Compatible indeterminado (1 parámetro libre)

a=2 → Sistema incompatible (sin soluciones)

b) Solución cuando a=0: el sistema es compatible indeterminado,

$$\left.\begin{matrix} x+2y+3z=1 \\ x+3z=2 \\ 2x+2y+6z=3 \end{matrix}\right\}(S)$$ **,** tenemos sólo dos ecuaciones independientes y un parámetro libre.

Si cogemos las 2 primeras ecuaciones y la z como parámetro libre el sistema es el siguiente:

$$\left.\begin{matrix} x+2y=1-3z \\ x=2-3z \end{matrix}\right\}(S') \ A'=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ |A'|=-2\neq 0 \ rang(A')=2 \ \ y \ por \ \text{tan}to \ (S')\equiv(S)$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1-3z & 2 \\ 2-3z & 0 \end{vmatrix}}{-2}=\frac{-4+6z}{-2}=2-3z, \ y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-3z \\ 1 & 2-3z \end{vmatrix}}{-2}=\frac{1}{-2}$$

Junio 2004. Prueba B.

PR-1.- Se considera el sistema $\begin{cases} x+y+z=\lambda \\ x+y+\lambda z=1 \\ x+\lambda y+z=1 \end{cases}$.

a) Discútase según los valores del parámetro λ.

b) Resuélvase para $\lambda=-3$.

c) Resuélvase para $\lambda=1$

Solución:

a) $\left.\begin{matrix} x+y+z=\lambda \\ x+y+\lambda z=1 \\ x+\lambda y+z=1 \end{matrix}\right\}(S)\ A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}\quad A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Veamos el rango de A y de A^*:

1. Rango de A

   a) rang(A)=3→ $|A|=-\lambda^2+2\lambda-1\neq 0$ → $\lambda\neq 1$

      $\forall\lambda\in R-\{1\}$, rang(A)=3

   b) Cuando λ=1:

      $A(\lambda=1)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0$ → rang(A(λ=0))=1

2. Rango de A^*

   a) rang(A^*)=3 siempre que $a\in R-\{1\}$.

   b) Para λ=1 de $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

      $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0$ → rang(A^*(λ=0))=1

Veamos la siguiente tabla para discutir el sistema según el valor de a:

	λ=1	$\lambda\in R-\{1\}$
rang(A)	1	3
rang(A^*)	1	3
	Com In	C.D.

Conclusión:

$\forall\ \lambda \in R-\{-1\} \rightarrow$ Sistema Compatible determinado (1 solución)

$\lambda=0 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)

----

b) Solución cuando $\lambda=-3$: El sistema es compatible determinado. Resolvemos por Cramer. Solución: x=-1, y=-1, z=-1

c) Solución cuando $\lambda=1$: El sistema es compatible indeterminado con 2 parámetros libres. Sólo 1 ecuación independiente, tomaremos y, z como parámetros libres.

Solución: x=1-y-z

Junio 2007. Prueba B.

PR-1- Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7\\2\\-2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}$

a) Hallar la matriz AB^T donde B^T indica la matriz traspuesta de B. ¿Es inversible?

b) Hallar el rango de A^TD

c) Calcular $M=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ que verifica la ecuación $(AB^T+C)\cdot M=E$

Solución

a) $A\cdot B^T=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&2&-2\\14&4&-4\\21&6&-6\end{pmatrix}$ No invertible pues $|A\cdot B^T|=0$ (dos columnas proporcionales)

b) $A^T\cdot D=\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}=0+4+6=10$. Es una matriz de 1x1, es decir un número, y como es distinto de cero el rango es uno.

rang($A^T\cdot D$)=1

c) $(AB^t+C)M=E \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix}7&2&-2\\14&5&-4\\21&6&-5\end{pmatrix}}_{R}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}$

rang(R)=rang(R*)=3 $\rightarrow$ S.C.D.

Resolviendo por Cramer x=-6/7; y=1; z=-3

Septiembre 2007. Prueba A.

PR-1.- Se considera el sistema $\begin{cases} x+y+az=4 \\ ax+y-z=0 \\ 2x+2y-z=2 \end{cases}$, donde a es un parámetro real.

a) Discutir el sistema en función del valor de a.

b) Resolver el sistema para a=1.

Solución

a) $\begin{cases} x+y+az=4 \\ ax+y-z=0 \\ 2x+2y-z=2 \end{cases}$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 4 \\ a & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Rango de A:

$|A|=2a^2-a-1=2(a-1)(a+1/2)$

- Si a∈R-{1,-1/2}→ rang(A)=3
- Si a=1 → $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2\neq 0$, rang(A)=2
- Si a=-1/2 → $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1/2 & 1 \end{vmatrix}=3/2\neq 0$, rang(A)=2

Rango de A*:

- Si a∈R-{1,-1/2}→ rang(A)=3
- Si a=1 → $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ La columna 1 y la columna 2 son iguales, luego no todo menor de orden 3 que esté formado por ambos es nulo. Veamos el que queda:

  $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0$ → rang(A^*)=2
- Si a=-1/2 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/2 & 4 \\ -1/2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ → $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}=-9\neq 0$ rang(A^*)=3

Organicemos la información en la siguiente tabla:

	a=-1/2	a=1	a∈R-{1,-1/2}
rang(A)	2	2	3
Rang(A^*)	3	2	3
	S.I	S.C.I	S.C.D.

Conclusión:

Si a=-0.5 el sistema no tiene solución

Si a=1 el sistema tiene infinitas soluciones con un parámetro libre

Para todo a∈R-{1,-1/2} una única solución

b) Si a=1 → rang(A)=rang(A^*)=2→ SCD. Tenemos que encontrar un sistema equivalente con dos ecuaciones y dos incógnitas, pasando la otra incógnita al término independiente. Como el rango del sistema equivalente ha de ser 2, tomamos el sistema cuyas filas sean las relativas al determinante no nulo de orden 2 que calculamos al estudiar el rango de A. Es decir las 2 primeras ecuaciones con y, z como incógnitas.

$$\begin{cases} y+z=4-x \ (1) \\ y-z=-x \ (2) \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

Podemos resolverlo fácilmente por reducción:

(1)+(2)→2y=4-2x→ y=2-x

(1)-(2) →2z=4 → z=2

Soluciones: $\begin{cases} x=t \\ y=2-t \qquad \forall t\in R \\ z=2 \end{cases}$

Otros Ejercicios

Problema 1. Sea el siguiente sistema:

$$\begin{cases} ax + ay + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ (a-2)x + (a+2)y + 3z = a \end{cases}$$

a) Discute según los valores del parámetro a (**2 puntos)**

b) Resuelve el sistema cuando sea posible **(1 punto)**

Solución

A=$\begin{pmatrix} a & a & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ a-2 & a+2 & 3 \end{pmatrix}$ A*=$\begin{pmatrix} a & a & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ a-2 & a+2 & 3 & a \end{pmatrix}$

- Estudio del rango de A → |A|=3·a-a-2+a^2-2·a-a+2-a^2-2·a+3·a=0 $\forall$**a**$\in$**R →|A|=0**

  Estudiemos si existe algún valor de a para el cual rang(A)≠2. Para que esto ocurra tiene que cumplirse que todos los menores de orden 2 sean nulos, es decir que se *anulen para el mismo valor de a:*

  $\begin{vmatrix} a & a \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2a = 0 \to a = 0$ $\begin{vmatrix} a & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = a + 1 = 0 \to a = -1$ como no existe un valor de a que anule todos los menores (de hecho no existe ninguno que anule estos dos menores) se cumple que **rang(A)=2** $\forall$**a**$\in$**R**

- Estudio el rango de A*: Veamos cuando los tres menores de orden 3 (distintos de |A|) se anulan. El rango será 2 si hay algún valor de a en el que se anulen los tres menores de orden 3:

  $$\begin{vmatrix} a & a & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ a-2 & a+2 & a \end{vmatrix} = a^2 + a^2 = 2a^2 = 0 \to a = 0$$

  $$\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ a-2 & a & 3 \end{vmatrix} = -a - a^2 = -a(a+1) = 0 \to a = 0, a = -1$$

  $$\begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ a & a+2 & 3 \end{vmatrix} = a - a = 0 \ \forall a \in R$$

  Si a=0 → rang(A*)=2, si a≠0 → rang(A*)=3

Resumamos los resultados en la siguiente tabla

	a=0	a∈R-{0}
rang(A)	2	2
rang(A*)	2	3
	C.I.	Inc

Conclusión: Si a=0 sistema compatible indeterminado con un parámetro libre; si a≠0 el sistema es incompatible, no tiene solución

b) Sólo tiene solución si a=0. Resulta que sólo hay dos ecuaciones independientes y con un parámetro libre:

$$(S)\begin{cases} z=0 \\ -x+y+z=0 \\ -2x+2y+3z=0 \end{cases} \rightarrow \quad (S')\begin{cases} z=0 \\ -x+y+z=0 \end{cases} \quad rang(A')=2 \rightarrow S\equiv S'$$

Solución z=0 , x=y

Problema 2. Sea el siguiente sistema:

$$\begin{cases} ax+2y-z=3 \\ x+2y+az=x \\ 2x+4y+z=3 \end{cases}$$

a) Discute según los valores del parámetro a **(1.75ptos)**

b) Resuelve el sistema cuando a=1 y cuando a=2 **(1.25 ptos)**

ayuda: fíjate en el sistema antes de escribir A y A*

Solución

Ordenando la segunda ecuación:

$$A=\begin{pmatrix} a & 2 & -1 \\ 0 & 2 & a \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad A^*=\begin{pmatrix} a & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & a & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- <u>Estudio del rango de A</u> → $|A|=2\cdot a+4\cdot a+4-4\cdot a^2=-4\cdot a^2+6\cdot a+4=0$ → a=2, a=-1/2

  Luego :

  a) a=2 o a=-1/2 rang(A)=2

  b) a∈R-{2,-1/2}rang (A)=3

- <u>Estudio el rango de A^*</u>:

  Si a∈R-{2,-1/2}→ rang(A)=3

  a=2 → $A^*=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ → $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$ →

  rang(A^*)=2

  a=1/2→ $A^*=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ → $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 12 = -9 \neq 0$ → rang(A^*)=3

Resumamos los resultados en la siguiente tabla

	a=2	a=- ½	a∈R-{2,- ½ }
rang(A)	2	2	3
rang(A^*)	2	3	3
	C.I.	Inc	C. D.

Conclusión:

a=2 sistema compatible indeterminado con un parámetro libre

a=-1/2 incompatible, no solución

a∈R-{0,-1/2}sistema compatible determinado, una solución

b) <u>a=1</u> sistema compatible determinado:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2y + z = 0 \\ 2x + 4y + z = 3 \end{cases} \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad |A|=2+4+4-4=6$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{6}{6} = 1 \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-6}{6} = -1$$

x=1 y=1/2 z=-1

a=2 sistema compatible indeterminado con un parámetro libre y dos ecuaciones independientes

$$(S)\begin{cases}2x+2y-z=3\\ 2y+2z=0\\ 2x+4y+z=3\end{cases} \quad (S')\begin{cases}2x+2y-z=3\\ 2y+2z=0\end{cases}$$ rang(A')=2→(S)≡(S')

y=-z , x=3/2+3/2z

Problema 3. Sea el siguiente sistema:

$$\begin{cases}ax+(a-1)y+z=0\\ x+y+az=1\\ (a+1)x+ay+(a+1)z=a\end{cases}$$

a) Discute según los valores del parámetro a **(2ptos)**

b) Resuelve el sistema cuando sea compatible **(1 pto)**

Solución

a) A=$\begin{pmatrix}a & a-1 & 1\\ 1 & 1 & a\\ a+1 & a & a+1\end{pmatrix}$, A*=$\begin{pmatrix}a & a-1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & a & 1\\ a+1 & a & a+1 & a\end{pmatrix}$

- Estudiemos el rango de A:

  |A|=$a^2+a+a+a^3-a-a-1-a^3-a^2+1=0$, luego el rango de A no puede ser 3 para ningún valor de a, ya que el determinante siempre es cero

  Por otro lado, existe un menor de orden dos no nulo, para cualquier valor del parámetro:

  $\begin{vmatrix}a & a-1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$ → rang(A)=2 para cualquier valor de a.

- Estudiemos el rango de A*:

  Para que el rango de A* sea menor que 3 tienen que anularse los 4 menores, uno de ellos es |A|, que como hemos visto siempre es cero, veamos para que valores de a se anulan los otros menores.

  $$\begin{vmatrix}a & 0 & 1\\ 1 & 1 & a\\ a+1 & a & a+1\end{vmatrix}=-a^3+a^2+a-1=-(a-1)^2(a+1)=0 \rightarrow a=1, a=-1$$

$$\begin{vmatrix} a-1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ a & a+1 & a \end{vmatrix} = -a^3 - 2a^2 + 1 = (a-1)(a-(\frac{1+\sqrt{5}}{2}))(a-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})) = 0 \rightarrow a = 1, a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{vmatrix} a & a-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ a+1 & a1 & a+1 \end{vmatrix} = a\text{-}1=0 \rightarrow a=1$$

Para que el rango sea menor que 3 todos los menores de A^* han de ser cero, ésto sólo ocurre si a=1, ya que para a=-1 no se anula el 2º calculado, y para $a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ no se anulan ni el 1º, ni el 3º.

1. $\forall a \in R\text{-}\{1\} \rightarrow \text{rang}(A^*)=3$
2. a=1→ $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ → rang(A^*(a=1))=2

Resumamos los resultados en la siguiente tabla

	a=1	$a \in R\text{-}\{1\}$
rang(A)	2	2
rang(A^*)	2	3
	C.I.	Inc

***Concluisón**:*

- $\forall a \in R\text{-}\{1\}$el sistema incompatible y por tanto no tiene soluciones
- Si a=1 el sistema es compatible indeterminado, con infinitas soluciones con un parámetro libre.

b) $$\left.\begin{array}{l} (1)\ x+z=0 \\ (2)\ x+y+z=1 \\ (3)\ 2x+y+2z=1 \end{array}\right\}(S)$$

Como el rango es 2 y un parámetro libre, por tanto hay que eliminar una ecuación y poner un parámetro al otro lado del igual:

$\left.\begin{array}{l} (1)\ x=-z \\ (2)\ x+y=1-z \end{array}\right\}(S')$ → rang$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ = 2 →(S')≡(S). No hace falta utilizar Cramer, sustituyendo x por –z en (2), las soluciones son:

y=1 , x=-z

Problema 4. Sea el siguiente sistema

$$\begin{cases} ax+y-z=2 \\ x+ay=0 \\ x+y-z=a+2 \end{cases} :$$

a) Discute según los valores del parámetro a **(1.75ptos)**

b) Resuelve el sistema cuando a=0 y cuando a=2 **(1.25 ptos)**

Solución

a) $A=\begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $A^*=\begin{pmatrix} a & 1 & -1 & 2 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & a+2 \end{pmatrix}$

- Estudiemos el rango de A: $|A|=-a^2+a=0$ si a=0, a=1

  1. $\forall a\in R-\{a=0,a=1\}\rightarrow$rang(A)=3
  2. Para a=1:

     $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=1\neq 0\rightarrow$ rang(A(a=1)=2
  3. Para a=0:

     $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0\rightarrow$ rang(A(a=0)=2

- Estudiemos el rango de A*:

  1. Para $a\in R-\{1,0\}$ rang(A^*)=3, pues rang(A)=3.
  2. Para a=1

     $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, tenemos que el menor de orden 3: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=1\neq 0$ rang(A^*)=3
  3. Para a=0

     $A^*=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Todos los menores de de orden 3 son nulos:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \ , \ \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \ , \ \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ → ran(A^*)=2 pues

Resumamos los resultados en la siguiente tabla

	a=1	a=0	a∈R-{1,0}
rang(A)	2	2	3
rang(A^*)	3	2	3
	Inc	C.I.	C. D.

Conclusión:

- *∀a∈R-{1,0}, sistema compatible determinado,*
- *si a=1, sistema compatible indeterminado, y si a=0, sistema incompatible.*

b) a=0→ $\left.\begin{array}{l} (1)\ y - z = 2 \\ (2)\ x = 0 \\ (3)\ x + y - z = 2 \end{array}\right\}(S)$

tenemos que rang(A)=2,luego sólo hay dos ecuaciones independientes y un parámetro libre

$\left.\begin{array}{l} (1)\, y = z + 2 \\ (2)\, x = 0 \end{array}\right\}(S')\ rang\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2\ (S') \equiv (S)$.

Las soluciones son x=0, y=z+2

a=2→ $\left.\begin{array}{l} (1)\, 2x + y - z = 2 \\ (2)\ x + 2y = 0 \\ (3)\ x + y - z = 4 \end{array}\right\}(S)$ Compatible determinado, resolvemos por Cramer: |A|=-2

x=$\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = -2$, y=$\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = 1$, z=$\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{-2} = -5$

Problema5: Discútase el siguiente sistema y resuelvas cuando sea posible.

$$\left.\begin{array}{r} kx+k^2y+k^3z=k \\ x+ky+k^2z=k^2 \\ x+y+kz=k^3 \\ x+y+z=k^4 \end{array}\right\} (S) \quad A=\begin{pmatrix} k & k^2 & k^3 \\ 1 & k & k^2 \\ 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^*=\begin{pmatrix} k & k^2 & k^3 & k \\ 1 & k & k^2 & k^2 \\ 1 & 1 & k & k^3 \\ 1 & 1 & 1 & k^4 \end{pmatrix}$$

1. Rango de A^*

   a) rang(A^*)=4 → $|A^*|=k(k-1)^3(k+1)\neq 0$ → $k\neq 1,-1,0$

   Por lo tanto $\forall$ $k\in R-\{1,-1,0\}$ el rango de A^* es 4

   b) Veamos el rango para k=0. $A^*=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, tomando el menor:

   $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$ luego rang(A^*(k=0))=3

   c) Rango para k=-1 $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, tomando el menor:

   $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-4\neq 0$ → rang(A^*(k=-1))=3

   d) Rango para k=1 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ → rang(A^*(k=1))=1

2. Rango de A

   a) El rango máximo es 3, luego para $k\in R-\{1,-1,0\}$, donde el rango de A^* es 4, el sistema es incompatible. Veamos para los demás valores de k

   b) k=0 → A=$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ → $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$ rang(A(k=0)=3 k=-1→ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$ →rang(A(k=-1))=3

c) k=1 → $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ rang(A(k=1))=1

Resumamos los resultados en la siguiente tabla:

	k=0	k=-1	k=1	k∈R-{1,-1,0}
rang(A)	3	3	1	<4
Rang(A^*)	3	3	1	4
Sistema	C.D.	C.D	C.I.	INCOM

Conclusión:

- Si k=0, k=-1 el sistema tiene una única solución
- Si k=1 el sistema tiene infinitas soluciones con dos parámetros libres
- Si k∈R-{1,-1,0}no tiene solcuiones

b) Resolver si k=0:

$$\left.\begin{array}{l} 0x+0y+0z=0 \\ x=0 \\ x+y=0 \\ x+y+z=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ x+y=0 \\ x+y+z=0 \end{array}\right\}$$ → sistema homogéneo C.D. → x=y=z=0

Resolver si k=1: Como el rango es uno, nos quedamos con una ecuación y dos parámetros libres:

x=1-y-z → $\left.\begin{array}{l} x=1-t-s \\ y=t \\ z=s \end{array}\right\}$ ∀ t,s ∈R

Resolver si k=-1 → el rango de A es 3, luego nos quedamos con tres ecuaciones; cuando vimos el rango las ecuaciones eran la (1), la (3) y la (4).

$\left.\begin{array}{r} -x+y-z=-1 \\ x+y-z=-1 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}$ Por Cramer x=0, y=0, z=1

Hacer los siguientes problemas

Problema 6. Sea el siguiente sistema:

$$\begin{cases} mx + y + z = m^2 \\ x - y + z = 1 \\ 3x - y - z = 1 \\ 3x - y + z = 3m \end{cases}$$

a) Discute según los valores del parámetro m (**1.75pto)**

b) Resuelve el sistema si m=1. **(0.25 ptos)**

c) Resuelve el sistema si m=2 **(1 pto)**

Problema 7. Sea el siguiente sistema:

$$\begin{cases} ax+y-z=z \\ -x+ay+z=x \\ -3x+3y+z=y \end{cases}$$

a) Discute según los valores del parámetro a **(1.75ptos)**

b) Resuelve el sistema cuando sea posible (es decir no sea incompatible). **(1.25 ptos)**