CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN DE LA PRUEBA: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones.

Problemas

1. Representar las siguientes funciones estudiando crecimiento, curvatura, asíntotas, simetría, máximos y mínimos y puntos de inflexión. **(2 puntos cada una).**

a. f(x)=$\frac{x^2}{x-1}$

b. g(x)=cos(x)+2·sen(x) en [0,2π].

c. h(x)=ln(x^2+1)

Solución

a) f(x)= $\frac{x^2}{x-1}$

- Dom(f(x))=R-{1}
- Asíntotas:

AV: x=1 → $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{0} = \begin{matrix} \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \infty \end{matrix}$

AH: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. No tiene

AO: y=mx+n → $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ $\quad n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = 1$

y=x+1

- Simetría: no tiene f(-x)=$\frac{x^2}{-x-1} \neq f(x)\ y - f(x)$
- Crecimiento y puntos relativos: f(x)=$\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$=0 → x=0 y x=2

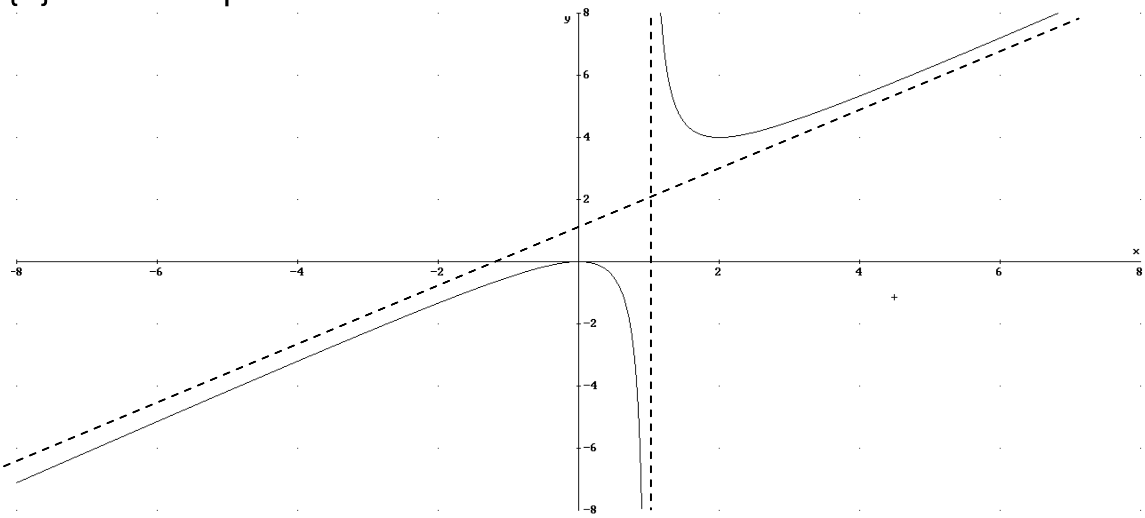
	(-∞,0)	0	(0,1)	1	(1,2)	2	(2,∞)
Sig(f'(x))	+	0	-		-	0	+
mono	Crece	M	Decrece		Decrece	m	crece

Creciente en (-∞,0)∪(2,∞) y Decrece en (1,2)∪(0,1)
Máximo: M(0,0) y Mínimo: m(2,4)

- Curvatura y puntos inflexión: f''(x)=$\frac{2}{(x-1)^3}$=0 →no solucion

	$(-\infty,1)$	1	$(1,\infty)$
Sig(f''(x))	-		+
Curvatura	$\cap$		$\cup$

La función es cóncava hacia las y positivas en su dominio=R-{1}. No tiene puntos de inflexión



b) g(x)=cos(x)+2sen(x).

- Dom(g(x))=[0,2π]
- Simetría: No tiene g(-x)=cos(-x)+2sen(-x)=cos(x)-2sen(x)≠ ≠f(x) y -f(x).
- Crecimiento y puntos relativos:

g'(x)=-sen(x)+2cos(x)=0 → sen(x)=2cos(x)→

sen^2(x)=4cos^2(x) → 1=5·cos^2(x) → cos(x)=±$\sqrt{2}$

$$x=\begin{cases} 63.4^{\circ}=1.1\,rad \rightarrow \textit{Si solucion} \\ 296.4^{\circ}=5{,}2\ rad \rightarrow \textit{No solucion} \\ 116.5^{\circ}=2\ rad \rightarrow \textit{No solucion} \\ 243{,}5^{\circ}=4.2\ rad \rightarrow \textit{Si solucion} \end{cases}$$

	[0,1.1)	1.1	(1.1,4.2)	4.2	(4.2,2π]
Sig(f'(x)	+	0	-	0	+
Monotonía	Crece	Max	Decrece	Min	Crece

Crece en [0,1.1)∪(4.2,2π] y decrece en (1.1,4.2)
Máximo: M(1.1, 2.2); Mínimo: m(4.2,-2.2)

- Curvatura y puntos de inflexión:

  g''(x)=-cos(x)-2sen(x)=0 → cos(x)=-2sen(x)→

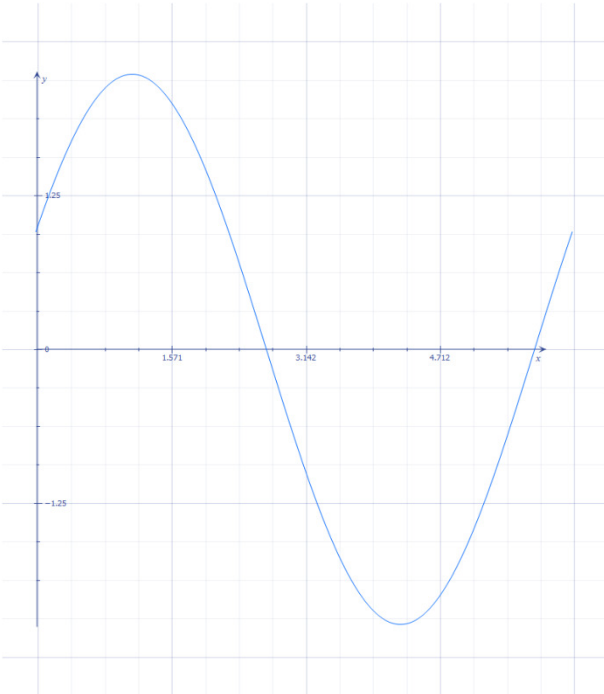
  $\cos^2(x)=4\cdot \text{sen}^2(x)$→ sen(x))= $\pm\sqrt{2}$

$$x=\begin{cases} 26.6^{o}=0.46\,rad \rightarrow No\,solucion \\ 153.4^{o}=2.7\ \ rad \rightarrow Si\,solucion \\ 333.4^{o}=5.8\ \ rad \rightarrow Si\,solucion \\ 206{,}6^{o}=3.6\ \ rad \rightarrow No\,solucion \end{cases}$$

	[0,2.7)	2.7	(2.7,5.8)	5.8	(5.8,2π]
Sig(f''(x)	-	0	+	0	-
Curvatura	∩	PI	∪	PI	∩

Concava (∪) en (2.7, 5.8) y convexa(∩) en [0,2.7)∪(5.8,2π]

Puntos de inflexión: PI(2.7, 0) y PI(5.8,0)



c) $h(x)=\ln(1+x^2)$

- Dom(h(x))=R pues $1+x^2>0$
- Simetría: simetría par: h(-x)=ln(1+x2)=h(x)
- Asíntotas:
- AV: no tiene
- AH: no tiene: $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$
- AO: no tiene: y=mx+n: m= $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ (*no AO*)
- Monotonía y puntos relativos: $h'(x)=\frac{2x}{1+x^2}=0\to x=0$

	$(-\infty,0)$	0	$(0,\infty)$
Sig(f'(x))	-	0	+
Monotonía	Decrece	Mínimo	Crece

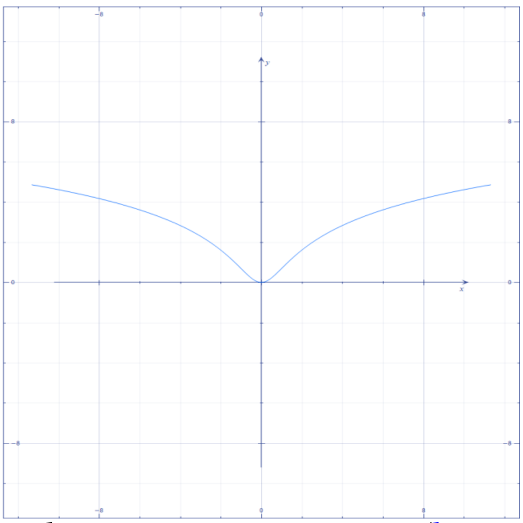
Crece en R^+ y decrece en R^-. Tiene un mínimo en m(0,0)

- Curvatura: h''(x)=$\frac{2-4x^2}{(1+x^2)^2}$=0→ x=$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

	$(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2})$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2},\infty)$
Sig(f'(x))	-	0	+	0	-
Monotonía	$\cap$	PI	$\cup$	PI	$\cap$

La función es cóncava en $(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ y convexa en $(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2})\cup(\frac{\sqrt{2}}{2},\infty)$

Tiene dos puntos de inflexión PI($-\frac{\sqrt{2}}{2}$,ln(1.5)) y PI($\frac{\sqrt{2}}{2}$,ln(1.5))



2. Calcular el valor de k de la función $f(x)=k\cdot e^{k[sen(x)+cos(x)]}$ para que la recta tangente a la función en x=0 sea aquella con menor ordenada en el origen. Calcular dicha recta. **(2 puntos)**

Solución

Calculemos la recta tangente a f(x) en x=0:

El punto de la recta: $P(0,f(0)) \rightarrow P(0,ke^k)$

La pendiente: $f'(x)=k\cdot e^{k[sen(x)+cos(x)]}\cdot k\cdot(cos(x)-sen(x))$, $m=f'(0)=k^2\cdot e^k$

Recta: $y=y_0+m(x-x_0) \rightarrow y=ke^k+k^2e^k(x-0)=k\cdot e^k+k^2e^kx$

Luego la ordenada en el origen es la función a optimizar: $g(k)= k\cdot e^k$

Calculemos el mínimo de g(k):

- $g'(k)=e^k+k\cdot e^k=e^k(1+k)=0 \rightarrow k=-1$
- Veamos que es mínimo: $g''(k)=e^k+e^k+k\cdot e^k$ en k=-1 $g''(-1)=e^{-1}>0$. Mínimo.

Veamos la recta sabiendo que $k=-1 \rightarrow r: y=-e^{-1}+e^{-1}\cdot x$

Cuestiones

1. Calcular el siguiente limite $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2^{sen(x)})}{e^x-1}$ **(1 punto)**

Solución

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2^{sen(x)})}{e^x-1}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2^{sen(x)}\cdot\ln(2)\cdot\cos(x)}{2^{sen(x)}}}{e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2)\cdot\cos(x)}{e^x}=\ln(2)$$

Aplicamos L'Hopital pues ln(2sen(x)) y ex-1 son continuas y derivables en x=0

2. Probar que la ecuación $x^{2009}=e^x-2$ tiene alguna solución **(1 punto)**

Si se cumple la ecuación: $f(x)=x^{2009}-e^x+2=0$. Aplicamos Bolzano:

a) f(x) continua en R
b) Busquemos un intervalo (a,b) tal que $f(a)\cdot f(b)<0$.
   En $x=0 \rightarrow f(0)=1>0$
   En $x=2 \rightarrow f(-2)<0$

Luego f(x) cumple Bolzano en [0,2] y por tanto existe al menos una $c\in(0,2)$: $f(c)=0$ y por tanto $c^{2009}=e^{c}-2$ y se cumple la ecuación.