CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN DE LA PRUEBA: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones.

Problemas

Problema 1: Dado los siguientes tres planos: π_1:ax+y-z=2, π_2:x+ay=0, π_3:x+y-z=a+2

a) Estudia la posición relativa de los siguientes tres planos en función del parámetro a **(1.75 puntos)**

b) Para a=0 Obtén la intersección de los tres planos. **(0,75 puntos)**

Solución

a) Estudiemos el rango de M y M*:

$$M=\begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad M^*=\begin{pmatrix} a & 1 & -1 & 2 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & a+2 \end{pmatrix}$$

Rango de M:

El rango de M será 3 si $|M|=-a^2+a\neq 0 \rightarrow$ rang(M)=3 $\forall a\in R-\{a=0,a=1\}$

Veamos para a=1:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=1\neq 0 \rightarrow \text{rang(M(a=1)=2}$$

Veamos para a=0:

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0 \rightarrow \text{rang(M(a=0)=2}$$

Rango de M^*:

Para $a\in R-\{1,0\}$ rang(M^*)=3, pues rang(M)=3.

Veamos para a=1

$M^*=\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\1&1&0&0\\1&1&-1&3\end{pmatrix}$, tenemos que el menor de orden 3:

$\begin{vmatrix}1&-1&2\\1&0&0\\1&-1&3\end{vmatrix}=1\neq 0$ → ran(M^*)=3

Veamos para a=0

$M^*=\begin{pmatrix}0&1&-1&2\\1&0&0&0\\1&1&-1&2\end{pmatrix}$, tenemos que todos los menores de de orden 3 son nulos:

$\begin{vmatrix}0&1&2\\1&0&0\\1&1&2\end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix}0&-1&-1\\1&0&0\\1&-1&-1\end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix}1&-1&-1\\0&0&0\\1&-1&-1\end{vmatrix}=0$ → ran(M^*)=2 pues $\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=-1\neq 0$

Concluyendo:

	a=1	a=0	$a\in R-\{1,0\}$
rang(A)	2	2	3
rang(A^*)	3	2	3
	Inc	C.I.	C. D.

1) Veamos la posición relativa cuando **a=1** (ninguna solución):

π_1:x+y-z=2

π_2:x+y=0

π_3:x+y-z=3

Claramente se ve como π_1 y π_3 son paralelos→ 2 Planos paralelos y otro que corta a los dos

2) Veamos la posición relativa cuando **a=0** (∞ soluciones):

π_1:y-z=2

π_2:x=0

π_3:x+y-z=2

Ningún plano es contenido uno en el otro, luego los tres planos cortan en una recta.

3) a∈R-{1,0} C. Determinado, luego se cortan en un punto

b) Si a=0 se cortan en una recta. Para calcular la recta hay que tomar sólo dos de los tres planos: r: $\begin{cases} y-z=2 \\ x=0 \end{cases}$

P.2: a) Calcular la recta perpendicular a la recta r_1: $\begin{cases} 2x-3y+z=1 \\ -y+3z=-4 \end{cases}$ y r_2: $\begin{cases} x-z=1 \\ -y+z=-4 \end{cases}$ que pase por el punto P(1,1,2). **(1.25 punto)**

b) Calcular los puntos Q de la recta r_2 para que el vector PQ perpendicular a r_1 **(1.25 punto)**

Solución:

a) Calculemos los vectores directores de las dos rectas:

r_1: Vista ya en el P1→ r_1: $\begin{cases} x=\frac{13}{2}+4\lambda \\ y=4+3\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$ → v_1=(4,3,1)

r_2: x=1+z; y=4+z → r_2: $\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=4+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$ → v_2=(1,1,1)

Si la recta es perpendicular a ambas rectas su vector director será $\vec{v}=\vec{v}_1\times\vec{v}_2$ =(2,-3,1).

Como pasa por el punto P(1,1,2) la recta buscada será

r:(x,y,z)=(1+2λ,1-3λ,2+λ)

b) Q(1+λ,4+λ,λ) → $\overline{PQ}=(\lambda,\ 3+\lambda,\ \lambda-2)$

$\overline{PQ}\cdot\overline{v_r}=4\lambda+9+3\lambda+\lambda-2=8\lambda+7=0$ → $\lambda=-7/8$ → $Q\left(\frac{-1}{8},\frac{25}{8},-\frac{7}{8}\right)$

Problema 3. Sea el siguiente sistema:

$$\begin{cases} ax+y-z=z \\ -x+ay+z=x \\ -3x+3y+z=y \end{cases}$$

a) Discute según los valores del parámetro a **(1.5ptos)**

b) Resuelve el sistema cuando sea posible (es decir no sea incompatible). **(1 pto)**

a) Es un sistema homogéneo→ A=$\begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ -2 & a & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $A^*=\begin{pmatrix} a & 1 & -2 & 0 \\ -2 & a & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ se cumple que rang(A)=rang(A^*), es decir siempre compatible. Veamos cuando determinado y cuando indeterminado:

Calculo del rango de A y de A^*:

1. rang(A)=rang(A^*)=3→|A|≠0.|A|=a^2-8a+7=(a-7)(a-1)→∀a∈R-{7,1}
2. rang(A)= rang(A^*)=2. solo puede ser para a=7 y/o a=1. veamos si para estos valores de a encontramos algún menor no nulo: $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$ → rang(A)=2 si a=1 y a=7

	a=1,a=7	A∈R-{1,7}
rang(A)	2	3

rang(A*)	2	3
	C.I (1 parametro libre)	C.D.

b) Si a∈R-{1,7} tenemos que es compatible determinado y al ser homogeneo la solución es la trivial **x=y=z=0**

Si a=1 podemos eliminar una de las 3 ecuaciones y obtener un sistema equivalente, siempre que el nuevo sistema (S') cumpla que rang(A')=2.

$$(S')\left.\begin{array}{r} x+y=2z \\ -3x+2y=-z \end{array}\right\} A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad |A'|=5\ rang(A')=2 \rightarrow (S')\equiv(S)$$

Resolvemos por Cramer:

x=$\dfrac{\begin{vmatrix} 2z & 1 \\ -z & 2 \end{vmatrix}}{5}=\dfrac{5z}{5}=z$, y=$\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2z \\ -3 & -z \end{vmatrix}}{5}=\dfrac{5z}{5}=z$. Luego cuando x=y=z es solución del sistema cuando a=1

Si a=7 podemos eliminar una de las 3 ecuaciones y obtener un sistema equivalente, siempre que el nuevo sistema (S') cumpla que rang(A')=2.

$$(S')\left.\begin{array}{r} 7x+y=2z \\ -3x+2y=-z \end{array}\right\} A'=\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad |A'|=17\ rang(A')=2 \rightarrow (S')\equiv(S)$$

Resolvemos por Cramer:

x=$\dfrac{\begin{vmatrix} 2z & 1 \\ -z & 2 \end{vmatrix}}{5}=\dfrac{5z}{17}$, y=$\dfrac{\begin{vmatrix} 7 & 2z \\ -3 & -z \end{vmatrix}}{5}=\dfrac{-z}{17}$. Luego cuando x=5z/17, y=-z/17 es solución del sistema cuando a=7

Problema 4. a) Resuelve la siguiente ecuación matricial: **(1.25 puntos)**

AX·A^{-1}-A= Id

Con A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) Sean las matrices $A=(C_1,C_2,C_3)$ y $B=(C_1',C_2',C_3')$ dos matrices cuadradas de dimensión 3, tal que $|A|=1$, $|B|=3$. Calcular: **(1.25 puntos)**

a) $|C|=\det(C_1+C_2,C_2,C_1)$

b) $|D|=\det(2C_1',-C_3',C_2')$

c) $|C\cdot D|$

Solución:

a)

$A\cdot X\cdot A^{-1}-A= Id \rightarrow A\cdot X\cdot A^{-1}= Id+A \xrightarrow{multip\ por\ la\ izq\ por\ A^{-1}} A^{-1}\cdot A\cdot X\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot(Id+A) \rightarrow X\cdot A^{-1}=A^{-1}+Id \xrightarrow{multip\ por\ la\ der\ por\ A} X\cdot A^{-1}\cdot A=(A^{-1}+Id)\cdot A \rightarrow X=Id+A$

X= Id+A=$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

b) $|C|=\det(C_1+C_2,C_2,C_1)=\det(C_1,C_2,C_1)+\det(C_2,C_2,C_1)=0$

$|D|=\det(2C_1',-C_3',C_2')=-2\det(C_1',C_3',C_2')=2\det(C_1',C_2',C_3')=6$

$|C\cdot D|=|C|\cdot|D|=6\cdot 0=0$