POTENCIAS DE MATRICES

Definición: la potencia de matrices, como la de números reales, es una operación relacionada con el producto:

$$\boxed{A^n = \overbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}^{n\ vces}}$$ con $A \in M_{nxn}$

Nota: Sólo se pueden aplicar la potenciación a las matrices cuadradas pues para multiplicar una matriz consigo mismo ha de tener mismo número de filas que de columnas.

Observación: la potencia de una matriz no coincide con los coeficientes elevados al exponente de la potencia: $\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}^p \neq \begin{pmatrix} a_{11}{}^p & \ldots & a_{1n}{}^p \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}{}^p & \ldots & a_{nn}{}^p \end{pmatrix}$

Ejercicios típicos: muchas veces las potencias de matrices sencillas siguen un patrón repetitivo de forma que podemos expresar la potencia n-esima en función de n. Para calcular este patrón basta con calcular las potencias de primeras de la matriz y buscar la relación con el exponente. Veamos algunos casos:

1) El más sencillo si **A=Id** (identidad) → A^n=A=Id. La demostración es sencilla no olvidemos que la matriz identidad multiplicada por cualquier otra matriz no la modifica (A·I=I·A=A). Así tendremos que $I^2=I\cdot I=I$, $I^3=I^2\cdot I=I\cdot I=I$….

2) Si **A es una matriz diagonal**, siempre podemos ponerla en función de la I por una constante, calculando la potencia de forma sencilla. Veamos un ejemplo sencillo , $A \in M_{2x2}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}; \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$$

luego $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. Se puede llegar a este resultado a partir de la matriz identidad de manera más fácil: $A^n = (3 \cdot I)^n = (3 \cdot I) \cdot (3I) \cdot \ldots . (3 \cdot I) = 3^n \cdot I^n = 3^n \cdot I = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$

3) En algunos casos la expresión de A^n depende de n de forma bastante sencilla y nos damos cuenta de su relación sin más que hacer las primeras potencias. Veamos un ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 15 & 1 \end{pmatrix} \ldots \rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 2^n - 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos que los coeficientes a_{44}=1 y a_{12}=0 siempre, y el coeficiente $a_{11}=2^n$ mientras $a_{21}=2^n$-1

3) En algunos casos las **potencias empiezan a repetirse**, esto ocurren cuando $A^p=I$, repitiéndose entonces cada vez que aumentemos la potencia en p unidades. Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$A^2=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

$$A^4=I\cdot A=A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^5=A^4\cdot A=A\cdot A=A^2=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$A^6=A^5\cdot A=A^2\cdot A=A^3=I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Vemos que cada vez que añadimos 3 unidades a la potencia el resultado vuelve a ser el mismo, así $A=A^4=A^7=A^{10}=\ldots$, $A^2=A^5=A^8=\ldots$, $A^3=A^6=A^9=A^{12}\ldots$ ¿Qué relación existe entre 1,5,7…, entre 2,5,8… y entre 3,6,9,…? Parece claro la diferencia entre dos de ellos consecutivos es 3, es decir todos tienen el mismo resto al dividir entre 3: resto(1/3)=resto(4/3)=resto(7/3)=1; resto(2/3)=resto(5/3)=resto(8/3)=2; resto(3/3)=resto(6/3)=resto(9/3)=0.

Conclusión:

$$A^n=\begin{cases} A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix} & si\ \ resto(n/3)=1\\ \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} & si\ \ resto(n/3)=2\\ I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} & si\ \ resto(n/3)=0\end{cases}$$

4) En el caso más complicado tenemos una mezcla de las opciones 2 y 3, es decir se repite pero la matriz no es exactamente igual sino que sigue un mismo patrón. Esto ocurre cuando una potencia de n es proporcional a la matriz identidad. Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$A^2=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}=-2\cdot Id$$

$$A^3=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -4 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^4=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -4 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=4\cdot Id$$

$$A^5=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 4 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -4\\ 8 & 0\end{pmatrix}$$

En este caso el patrón de las matrices de po

impares.

Para las potencias pares vemos que siempre es proporcional a la identidad, es decir escalar: para n=2 el valor escalar es -2, y para n=4 es 4, si seguimos para n=6 será -8…que son potencias de -2 → si n es par $A^n=(-2)^{n/2}\cdot I$

Para las potencias impares tenemos que la diagonal secundaria es nula ($a_{12}=a_{21}=0$) mientras que el coeficiente a_{12} sigue el siguiente patrón: n=1 → $a_{12}=-1$, n=3 → $a_{12}=2$, n=3→ $a_{12}=-4$…es decir $a_{12}=-(-2)^{\frac{n-1}{2}}$, de forma análoga $a_{21}=(-2)^{\frac{n+1}{2}}$

$$A^n=\begin{cases}\begin{pmatrix}(-2)^{n/2} & 0\\ 0 & (-2)^{n/2}\end{pmatrix} & si \quad n=par\\ \begin{pmatrix}0 & -(-2)^{\frac{n-1}{2}}\\ (-2)^{\frac{n+1}{2}} & 0\end{pmatrix} & si \quad n=impar\end{cases}$$