EXAMEN MATRICES Y SISTEMAS

Ejercicio 1

a) $A = (C_1, C_2, C_3) \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ $\quad \det(A) = \det(C_1, C_2, C_3) = 3$

$$\det(B) = \det(C_1 + C_2, 2C_1 + 3C_3, C_2) = \det(C_1, 2C_1 + 3C_3, C_2) +$$

$$\underbrace{\det(C_2, 2C_1 + 3C_3, C_2)}_{\text{2 columnas iguales}} \to 0 = \underbrace{\det(C_1, 2C_1, C_2)}_{\text{2 columnas iguales}} \to 0 + \det(C_1, 3C_3, C_2) =$$

$$= 3\det(C_1, C_3, C_2) = -3\det(C_1, C_2, C_3) = -3 \cdot 3 = -9$$

$$\boxed{|B^{-1}| = \frac{1}{|B|} = \frac{1}{-9}}$$

b) A es invertible ($\exists A^{-1}$) $\longleftrightarrow |A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 4+3a \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 3a - 4$$

$$a^2 - 3a - 4 = 0 \begin{cases} a = 4 \\ a = -1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Luego A invertible si } a \in \mathbb{R} - \{-1, 4\}}$

$$a = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

Si $a = 0$ $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad |A| = -4 \neq 0 \to \exists A^{-1}$

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \quad Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \to \boxed{A^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2:

a) $X \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$B\cdot X + B = B^2 + I \longrightarrow B\cdot X = B^2 + I - B$$

$$\underbrace{B^{-1}\cdot B}_{I}\cdot X = B^{-1}(B^2 + I - B) \rightarrow X = B^{-1}(B^2 + I - B)$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo B^{-1}:

$$|B| = -1 \neq 0 \rightarrow \exists B^{-1} \qquad B^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Adj(B^t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = X}$$

b) $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ $\quad BX = X\cdot B \quad$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ x+z & y+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & y \\ z+t & t \end{pmatrix} \rightarrow$$

$x = x+y \rightarrow y = 0$

$y = y \qquad x = t$

$x + \cancel{z} = \cancel{z} + t$

$y + \cancel{t} = \cancel{t} \qquad \forall z$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & x \end{pmatrix} \quad \forall x, z \in \mathbb{R}}$$

Ejercicio 3

a) $\left.\begin{aligned} x+ay+az&=4\\ ax+y-z&=0\\ 2x+2y-z&=2\end{aligned}\right\}$ $A^*=\begin{pmatrix}1&a&a&4\\a&1&-1&0\\2&2&-1&2\end{pmatrix}\in M_{4\times3}(\mathbb{R})$

$A=\begin{pmatrix}1&a&a\\a&1&-1\\2&2&-1\end{pmatrix}\in M_{3\times3}(\mathbb{R})$

Rango de $A\leq 3$

$$\begin{vmatrix}1&a&a\\a&1&-1\\2&2&-1\end{vmatrix}=-1+2a^2-2a-2a+2+a^2=3a^2-4a+1$$

$3a^2-4a+1=0 \longrightarrow a=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{6}=\frac{4\pm2}{6}$ $a=1$, $a=1/3$

- Si $a\in\mathbb{R}-\{1,1/3\}$ $Rg(A)=3$
- Si $a=1$ $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\2&2&-1\end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}=-2\neq0$ $Rg(A)=2$
- Si $a=1/3$ $A=\begin{pmatrix}1&1/3&1/3\\1/3&1&-1\\2&2&-1\end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix}1&-1\\2&-1\end{vmatrix}=1\neq0$ $Rg(A)=2$

Rango de $A^*\leq 3$

- Si $a\in\mathbb{R}-\{1,1/3\}$ $(Rg(A^*)\geq3)\rightarrow Rg(A^*)=3$
- Si $a=1$ $A^*=\begin{pmatrix}1&1&1&4\\1&1&-1&0\\2&2&-1&2\end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix}1&1&4\\1&-1&0\\2&-1&2\end{vmatrix}=-2-4+8-2=0$

$\begin{vmatrix}1&1&4\\1&1&0\\2&2&2\end{vmatrix}\underset{C_1=C_2}{=}0 \rightarrow Rg(A^*)\leq3 \rightarrow Rg(A^*)=2$ $\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}\neq0$

• Si $a = 1/3$ $\quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 & 4 \\ 1/3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1/3 & 1/3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \cancel{2/3} - 4 + 8 - \cancel{2/3} = 4 \neq 0 \quad Rg(A^*) = 3$$

T^a Rouché-Fröbenius

	$a=1$	$a=1/3$	$a \in \mathbb{R} - \{1, 1/3\}$
Rg (A)	2	2	3
Rg (A*)	2	3	3
Clasificación	SCI	SI	SCD
Nº soluciones	∞ sol	No sol	1 sol.

$n=3$

• Si $a = 1$ Sistema compatible indeterminado con 1 parámetro libre e ∞ soluciones

• Si $a = 1/3$ Sistema incompatible sin soluciones

• Si $a \in \mathbb{R} - \{1, 1/3\}$ Sistema compatible determinado con 1 solución

b) Si $a = 1 \rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 4 \\ x + y - z = 4 \end{array}\right\} \rightarrow$ $\begin{array}{r} y + z = 4 - x \\ + \quad y - z = 4 - x \\ \hline 2y = 8 - 2x \end{array}$

$z = 4 - x - y = \cancel{4} - x - \cancel{4} + x = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = 4 - x \\ z = 0 \end{array} \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

Ejercicio 4

$$\left.\begin{array}{l} x - ay + z = 1 \\ 2ax - 2y + 2z = 0 \end{array}\right\} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 & 1 \\ 2a & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ 2a & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

a)

Rango de $A \in M_{2\times3}(\mathbb{R})$ $\quad Rg(A) \leq 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2a & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2a \qquad 2 - 2a = 0 \quad a = 1$$

Si $a \neq 1$ $\quad Rg(A) = 2$

Si $a = 1$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad 2F_1 = F_2 \rightarrow Rg(A) = 1$

Rango de $A^* \in M_{2\times4}(\mathbb{R})$ $\quad Rg(A^*) \leq 2$

Si $a \neq 1$ $\quad Rg(A^*) = 2 \quad (Rg(A^*) \geq Rg(A))$

Si $a = 1$ $\quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad Rg(A^*) = 2$

Tª Rouché-Fröbenius

	Si $a=1$	Si $a \in \mathbb{R}-\{1\}$
$Rg(A)$	1	2
$Rg(A^*)$	2	2
Clasificación	SI	SCI
Nº soluciones	No sol	∞ soluciones

$n = 3$

Si $a = 1 \rightarrow$ Sistema incompatible (No soluciones)

Si $a \in \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow$ " compatible indeterminado (∞ soluciones) 1 p. libre

Si $x=1$ $y=1$

b) $\left.\begin{array}{l} 1-a+\cancel{z}=1 \\ 2a-\cancel{2}+2z=0 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} (1)\ -a+z=0 \\ (2)\ 2a+2z=2 \end{array}\right\}$

$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$A^*=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$n=2$ 2 incognitas
$m=2$ 2 ecuaciones

$|A|=-4\neq 0$ $Rg(A)=Rg(A^*)=2=n \rightarrow$ S.C.D.

Resolvemos por sustitución $z=a$ de (1)

$2a+2a=2 \longrightarrow \boxed{a=1/2} \longrightarrow z=1/2$

$\boxed{\text{Si } a=1/2}$ $\left.\begin{array}{l} x-\frac{1}{2}y+z=1 \\ x-2y+2z=0 \end{array}\right\}$ Solución $(1, 1, 1/2)$

EXAMEN MATEMÁTICAS II. MATRICES Y SISTEMAS

CALCULADORA: Se permitirá el uso de calculadoras no programables (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Cada uno de los ejercicios se puntuará sobre un máximo de 2.5 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

Ejercicio 1.

a) (Septiembre 2008 Prueba A C-1)- Sea A una matriz 3x3 de columnas C1 , C2 , C3 y determinante 3 (en ese orden). Sea B la matriz de columnas C1+C2, 2· C1+ 3·C3, C2 (en ese orden). Calcular el determinante de B^{-1} en función del de A . **(1.25 puntos)**

b) (Junio 2007 Prueba A C-1) Hallar para qué valores de a es invertible la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 4+3a \\ 1 & a \end{pmatrix}$ y calcular la inversa si a=0. **(1.25 puntos)**

Ejercicio 2.

a) (Septiembre 2007. Prueba A C-1) Sean X una matriz 2x2, I la matriz identidad 2x2 y $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Hallar X sabiendo que $B\cdot X+B=B^2+I$. **(1.25 puntos)**

b) (Junio 2006. Prueba A C-1) Hállense las matrices A cuadradas de orden 2 que conmuten con $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. **(1.25 puntos)**

Ejercicio 3. (Septiembre 2007. Prueba A.) Sea el sistema $\begin{cases} x+ay+az=4 \\ ax+y-z=0 \\ 2x+2y-z=2 \end{cases}$ donde a es un parámetro real.

a) Discutir el sistema en función del valor de a. **(1.5 puntos)**

b) Resolver el sistema para a=1. **(1 punto)**

Ejercicio 4. Sea el sistema dado por las ecuaciones $\begin{cases} x-ay+z=1 \\ 2ax-2y+2z=0 \end{cases}$ donde a es un parámetro real.

a) Discutir el sistema en función del valor de a. **(1.5 puntos)**

b) Encontrar para que valor de a el sistema tiene solución con x=1 e y=1 . **(1 punto)**