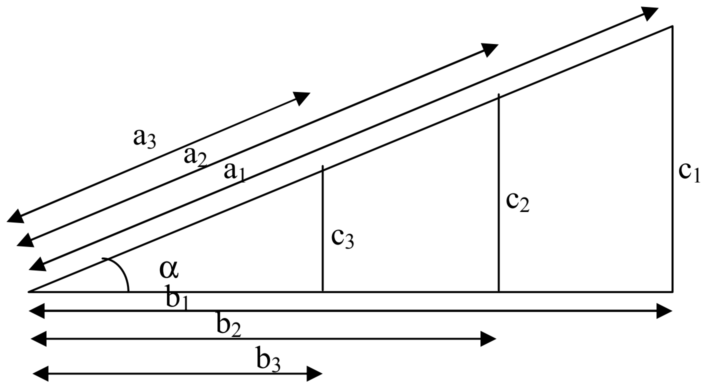
Trigonometría (I)

1. Razones trigonométricas en triángulos rectángulos. (Ángulos agudos)

Por criterios de semejanza se cumple que los triángulos rectángulos con un ángulo igual son semejantes, y por tanto sus lados proporcionales. De esta manera conociendo el valor de uno de los ángulos de un triángulo rectángulo, α, las razones de sus lados están fijadas. Estas razones es lo que llamamos razones trigonométricas del ángulo α. Veámoslo gráficamente



$$\frac{c_1}{a_1}=\frac{c_2}{a_2}=\frac{c_3}{a_3}=sen(\alpha)=\frac{cateto\,opuesto}{hipotenusa}$$

$$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\frac{b_3}{a_3}=\cos(\alpha)=\frac{cateto\,contiguo}{hipotenusa}$$

$$\frac{c_1}{b_1}=\frac{c_2}{b_2}=\frac{c_3}{b_3}=tg(\alpha)=\frac{cateto\,opuesto}{cateto\,contiguo}$$

Es importante darse cuenta que el valor de las razones trigonométricas depende del ángulo y no del triángulo.

Como sabemos a partir del teorema de Pitágoras el valor de la hipotenusa (a) de un triángulo es mayor que el de los dos catetos (b y c), por tanto se cumple que:

$0<sen(\alpha)<1$, $0<\cos(\alpha)<1$ cuando $\alpha\in(0,90º)$.

A partir de estas razones trigonométricas fundamentales podemos definir las siguientes:

$$\sec(\alpha)=\frac{1}{\cos(\alpha)}=\frac{hipotenusa}{cateto\,contiguo}$$

$$\cos ec(\alpha)=\frac{1}{sen(\alpha)}=\frac{hipotenusa}{cateto\,opuesto}$$

$$\cot g(\alpha)=\frac{1}{tg(\alpha)}=\frac{cateto\ contiguo}{cateto\ opuesto}$$

2. Relaciones trigonométricas fundamentales

Los valores de sen(α), cos(α) y tg(α) no son independientes, están relacionados entre sí, como veremos en este apartado. De hecho sabiendo que α∈(0º,90º) conociendo el valor de una de las tres razones podemos obtener las otras dos.

Relaciones fundamentales

Relación 1 → $tg(\alpha)=\dfrac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

Relación 2 → $sen^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$

Notación: $sen^2(\alpha)=(sen(\alpha))^2 \quad \cos^2(\alpha)=(\cos(\alpha))^2$

Relación 3 → $1+tg^2(\alpha)=\dfrac{1}{\cos^2(\alpha)}$

Relación 4 → $1+\cot g^2(\alpha)=\dfrac{1}{sen^2(\alpha)}$

Demostración:

1) $$\frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}=\frac{\dfrac{cat\ opue}{hip}}{\dfrac{cat\ cont}{hip}}=\frac{cat\ opue}{cat\ cont}=tg(\alpha)$$

2) $$sen^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=\left(\frac{cat\ op}{hip}\right)^2+\left(\frac{cat\ cont}{hip}\right)^2=\frac{\overbrace{cat\,op^2+cat\,cont^2}^{Pitagoras}}{hip^2}=\frac{hip^2}{hip^2}=1$$

3) $$1+tg^2(\alpha)=1+\frac{sen^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}=\frac{\cos^2(\alpha)+sen^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}=\frac{1}{\cos^2(\alpha)}$$

4) $$1+\cot g^2(\alpha)=1+\frac{\cos^2(\alpha)}{sen^2(\alpha)}=\frac{sen^2(\alpha)+\cos s^2(\alpha)}{sen^2(\alpha)}=\frac{1}{sen^2(\alpha)}$$

Ejercicio: calcular las restantes razones trigonométricas

1) sen(45)=$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos^2(45)+sen^2(45)=1$ → $\cos^2(45)+1/2=1$ → $\cos^2(45)=1/2$ →

$$\cos(45)=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\xrightarrow{como\ 45<90^{\circ}\ solo\ soluciones\ positivas}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg(45)=\frac{sen(45)}{\cos(45)}=\frac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=1$$

2) $tg(30)=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\left.\begin{array}{r} tg(30)=\frac{sen(30)}{cos(30)}=\frac{\sqrt{3}}{3} \\ sen^2(30)+cos^2(30)=1 \end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{r} \frac{y}{x}=\frac{\sqrt{3}}{3} \\ x^2+y^2=1 \end{array}\right\}\rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{3}x \rightarrow x^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2=1$$

$(1+1/3)x^2=1 \rightarrow x^2=3/4 \rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x=cos(\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (cuando $\alpha\in(0,90^o)$ razones trigonométricas son positivas)

$y=sen(\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{3}cos(\alpha)=1/2$

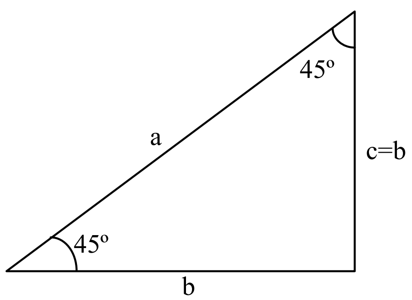
Otra forma: $1+tg^2(30)=\frac{1}{\cos^2(30)} \rightarrow 1+\frac{1}{3}=\frac{1}{\cos^2(30)} \rightarrow \cos(30)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$tg(30)=\frac{sen(30)}{\cos(30)} \rightarrow sen(30)=tg(30)\cdot\cos(30)=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}$$

3. Razones trigonométricas de 30º, 45º y 60º

Las razones trigonométricas de 30º, 45º y 60º son muy importantes, ya que se usan mucho. Además se caracterizan porque se pueden calcular a partir del teorema de Pitágoras. Vamos a calcularlas

a) Ángulo α=45º, si dibujamos un triángulo rectángulo con α=45º se caracteriza que es isósceles:



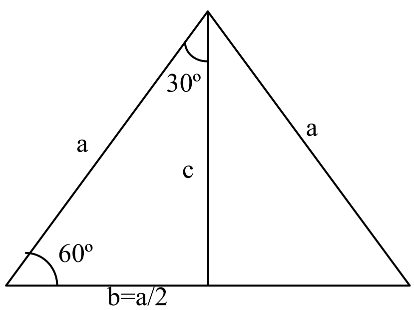
$a^2=b^2+b^2=2b^2 \rightarrow a=\sqrt{2}b$

$sen(45)=\frac{c}{a}=\frac{b}{\sqrt{2}b}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$cos(45)=\frac{b}{a}=\frac{b}{\sqrt{2}b}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$tg(45)=\frac{sen(45)}{\cos(45)}=1$

b) Ángulo α=30º y α=60º, este ángulo es el que se forma al dividir un triángulo equilátero en dos:



$c^2=a^2-(a/2)^2 \rightarrow c^2=3a^2/4 \rightarrow c=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

$sen(60^o)=cos(30)=\frac{c}{a}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$cos(60^o)=sen(30)=\frac{b}{a}=\frac{a/2}{a}=\frac{1}{2}$

$tg(60^o)=\frac{sen(60)}{\cos(60)}=\sqrt{3}$

$tg(30)=\frac{sen(30)}{\cos(30)}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. Resolución de triángulos rectángulos.

Resolver un triángulo rectángulo es obtener a partir de los datos conocidos todos los ángulos y lados de dicho triángulo. Para resolver un triángulo utilizaremos los siguientes teoremas:

1. Teorema de Pitágoras
2. Suma de ángulos es 180º
3. Razones trigonométricas

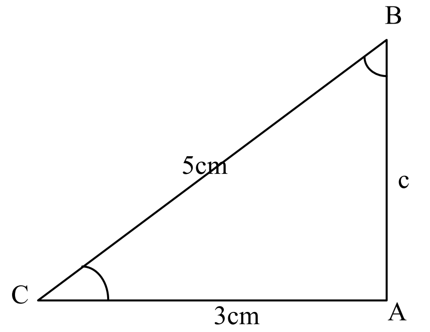
Todo triángulo rectángulo se puede calcular si conocemos dos datos, siempre que uno de ellos sea un lado. Vamos a ver dos casos

4.1. Conociendo dos lados

Nos faltaría conocer un lado y dos ángulos (ya que el otro ángulo es 90º). Pasos

a) El tercer lado se calcula por Pitágoras
b) Calculamos los otros dos ángulo a partir de las razones trigonométricas

Ejemplo: resolver el siguiente triángulo



c=$\sqrt{5^2-3^2}$=4cm

$\cos\hat{C}$=3/5 → $\hat{C}$=arcos(3/5)=53º7'48"

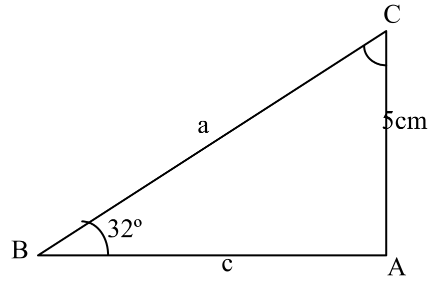
$\hat{B}=90º-\hat{C}=36º\,52'12''$

4.2. Conociendo un lado y un ángulo

Nos falta conocer otro ángulo y dos lados

a) Obtenemos el otro ángulo restando a 90º el que nos han dado
b) Obtendremos los otros dos lados a partir de las razones trigonométricas

Ejemplo: resolver el siguiente triángulo



$\hat{C}=90º-\hat{B}=58º$

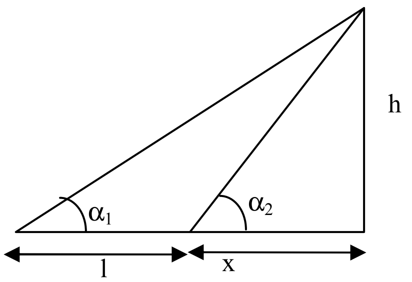
sen(32)=5/a → a=5/sen(32)≈9,4cm

tg(32)=5/c → c=5/tg(32) ≈8m

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

4.3. Cálculo altura con doble medida

Cuando queremos calcular la altura de una montaña, casa, etc. pero no somos capaces de acercarnos a la base, y por tanto no podemos calcular la distancia de un punto al objeto que deseamos medir tendremos que utilizar otro método. Veamos como con dos medidas indirectas podemos obtener la altura.



Donde conocemos l, α_1, α_2

$$\left.\begin{array}{l} tg(\alpha_1)=h/(l+x) \\ tg(\alpha_2)=h/x \end{array}\right\}$$

es un sistema con dos ecuaciones y dos incógnitas.

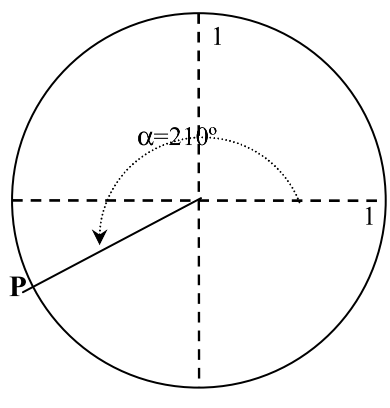
5. Razones trigonométricas de ángulo cualquiera.

Hasta ahora habíamos definido las razones trigonométricas en triángulos rectángulos, de tal forma que los ángulos, no recto, eran siempre menores a 90º. En este apartado vamos a extender las definiciones para cualquier ángulo (0º$\leq \alpha < 360°$)

Definición: la circunferencia goniométrica es una circunferencia de radio unidad en donde los ángulos se sitúan de la siguiente forma

- vértice en el centro
- el radio horizontal es el eje OX y el vertical OY
- un lado del ángulo situado en lado positivo del eje OX
- el otro lado formando ángulo α en el sentido contrario a las agujas del reloj.

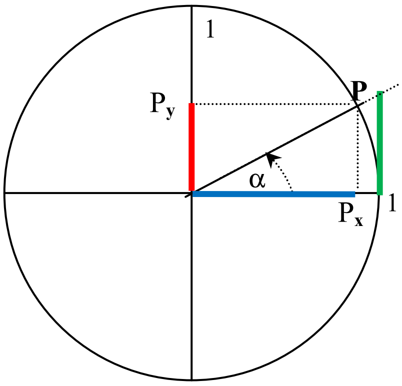
Ejemplo: situamos α=210º en la circunferencia goniométrica:



Definición de razones trigonométricas en la circunferencia (0º$\leq \alpha \leq 360°$):

- sen(α)=coordenada vertical del punto P=P_y
- cos(α)=coordenada horizontal del punto P=P_x
- tg(α)=$\frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{Py}{Px}$

Veamos gráficamente los valores de sen(α), cos(α) y tg(α)



Explicación de la tangente: tenemos que $tg(\alpha)=P_y/P_x$. Se cumple que el triángulo rectángulo de catetos P_y y P_x es semejante al que tiene de lado horizontal 1 (radio circunferencia) y vertical la línea verde (pongamos que su tamaño es x). Al ser semejantes $tg(\alpha)=P_y/P_x=x/1=x$=línea verde.

5.1. Signo de las razones trigonométricas en los distintos cuadrantes

En este apartado vamos a ver el signo de las razones trigonométricas según el valor del ángulo, α. Para entender esta tabla simplemente hay que recordar la definición del seno y el coseno y ver la posición de P para estos valores de α. El signo de la tangente se deduce de tg(α)=sen(α)/cos(α)

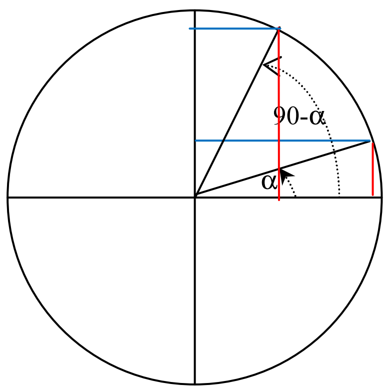
	sen(α)	cos(α)	tg(α)
0º<α<90º (cuadrante I)	+	+	+
90º<α<180º (cuadrante II)	+	-	-
180º<α<270º (cuadrante III)	-	-	+
270º<α<360º (cuadrante IV)	-	+	-

6. Reducción de un ángulo al primer cuadrante.

6.1. Ángulos complementarios

Definición: dos ángulos α y α_2 se dicen complementarios si suman 90º ($\alpha+\alpha_2=90º$). De esta forma llamaremos a $\alpha_2=90-\alpha$.

Veamos las relaciones entre las razones trigonométricas de los ángulos complementarios, para esto apoyémonos en la circunferencia goniométrica:



sen(α)=cos(90-α)

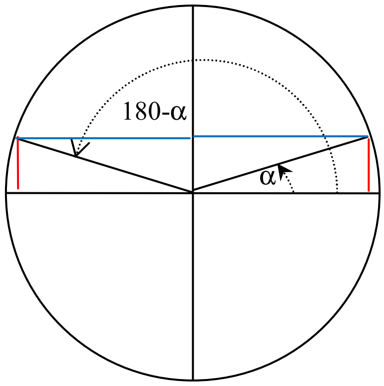
cos(α)=sen(90-α)

tg(α)=1/tg(90-α)

6.2. Ángulos suplementarios

Definición: dos ángulos α y α_2 se dicen suplementarios si suman 180º ($\alpha+\alpha_2=180º$). De esta forma llamaremos a $\alpha_2=180-\alpha$.

Veamos las relaciones entre las razones trigonométricas de los ángulos suplementarios, para esto apoyémonos en la circunferencia goniométrica.



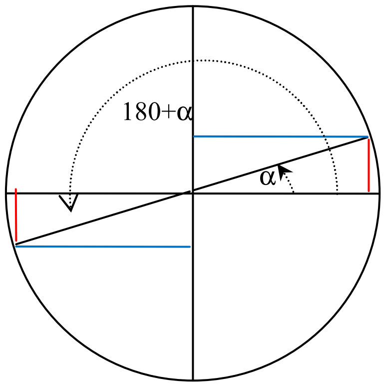
$\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(180-\alpha)$

$\cos(\alpha) = -\cos(180-\alpha)$

$\text{tg}(\alpha) = -\text{tg}(180-\alpha)$

6.3. Ángulos que difieren 180º

En este apartado vamos a ver las relaciones entre las razones trigonométricas de los ángulos que difieren 180º (α, $\alpha+180º$), para esto apoyémonos en la circunferencia goniométrica.



$\text{sen}(\alpha) = -\text{sen}(180+\alpha)$

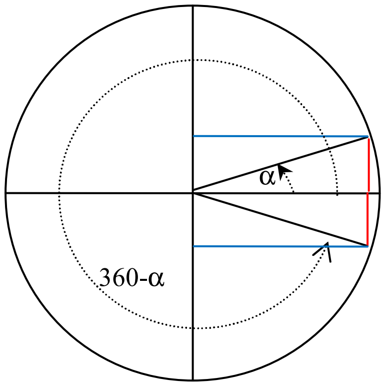
$\cos(\alpha) = -\cos(180+\alpha)$

$\text{tg}(\alpha) = \text{tg}(180+\alpha)$

6.4. Ángulos opuestos o que suman 360º

En este apartado vamos a ver las relaciones entre las razones trigonométricas de los ángulos que suman 360º (α, $360º-\alpha$), para esto apoyémonos en la circunferencia goniométrica.

Nota: en la calculadora los ángulos del IV cuadrante aparecen con signo negativo, es decir el giro en sentido horario de los ángulos se pueden considerar negativos. *Ejemplos:* 320º=-40º, 300º=-60º



sen(α) = -sen(360-α)

cos(α) = cos(360-α)

tg(α) = -tg(360-α)

Ejercicio: calcular el valor de las siguientes razones trigonométricas sin utilizar la calculadora:

1) α=120º →α=180-60. Son ángulos 120º y 60º son suplementarios, apliquemos las relaciones vistas en el apartado 6.2

sen(120º) = sen(60º)= $\frac{\sqrt{3}}{2}$

cos(120º) = -cos(60º)= -$\frac{1}{2}$

tg(120º) = -tg(60º)= - $\sqrt{3}$

2) α=240º → α=180º+60º. Los ángulos 240º y 60º se diferencian en 180º, apliquemos las relaciones vistas el apartado 6.3.

sen(240º) = -sen(60º)=- $\frac{\sqrt{3}}{2}$

cos(240º) = -cos(60º)= -$\frac{1}{2}$

tg(240º) = tg(60)= $\sqrt{3}$

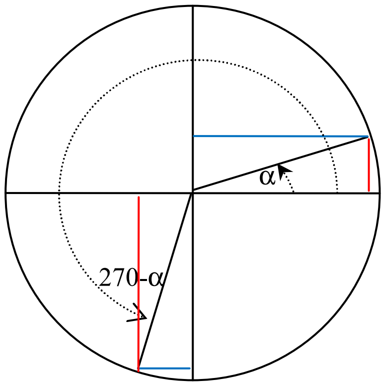
3) α=300º=-60º → α=360º-60º. Los ángulos 300º y 60º suman 360º, apliquemos las relaciones vistas en el apartado 6.5.

sen(300º) = -sen(60º)= -$\frac{\sqrt{3}}{2}$

cos(300º) = cos(60º) = $\frac{1}{2}$

tg(300º) = -tg(60º) = -$\sqrt{3}$

4) α=260º, sabiendo que sen(10º)≈0,17, cos(10º)≈0.98, tg(10º)≈0.18, podemos relacionar este ángulo con 270º de la siguiente forma α=260º=270º-10º. Veamos con la circunferencia goniométrica como relacionarlos:



sen(270-α)=-cos(α)

cos(270-α)=-sen(α)

tg(α)=1/tg(270º-α)

A partir de esto podemos ver el valor de las razones trigonométricas de 260º

sen(260º)=-cos(10º)≈-0.98

cos(260º)=-sen(10º)≈-0.17

tg(260º)=1/tg(10º) ≈5.6

Ejercicio: calcular los ángulos que cumplen:

a) sen(α)=0.25

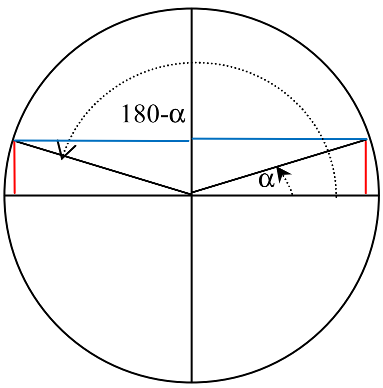
b) cos(α)=-0.3

c) sen(α)=-0.1

d) cos(α)=0.7 y sen(α)<0

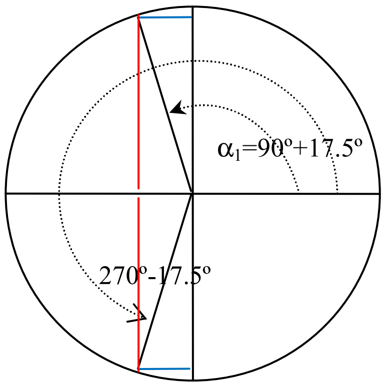
Solución:

a) sen(α)=0.25 → α=arcsen(0.25)=14.5º (calculadora). Si dibujamos el ángulo obtenemos el otro ángulo que cumple que el seno vale 0.25



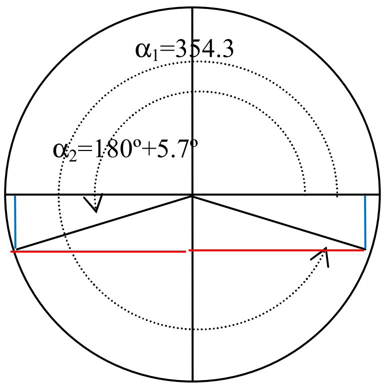
La otra solución es α_2=180º-α_1=165.5º

b) $\cos(\alpha)=-0.3 \rightarrow \alpha_1=107.5^\circ$ (calculadora). Si dibujamos el ángulo obtenemos el otro ángulo que cumple que el coseno vale -0.3



La otra solución es $\alpha_2=270^\circ-17.5^\circ=252.5^\circ$

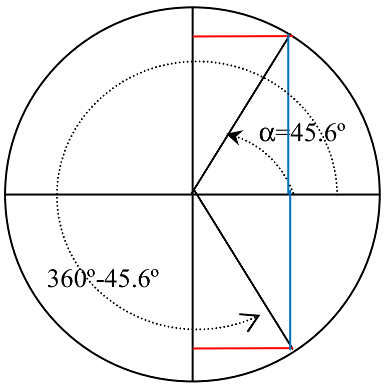
c) $\text{sen}(\alpha)=-0.1 \rightarrow \alpha_1=-5.7^\circ$(calculadora) $\alpha_1=354.3^\circ$. Si dibujamos el ángulo obtenemos el otro ángulo que cumple que el seno vale -0.1



La otra solución es $\alpha_2=180^\circ+5.7^\circ=185.7^\circ$

d) $\cos(\alpha)=0.7$ y $\text{sen}(\alpha)<0 \rightarrow \alpha_1=45.6^\circ$, pero el $\text{sen}(\alpha_1)>0$ (cuadrante I), luego no es ángulo que buscamos. Veamos a partir de la circunferencia goniométrica otro ángulo,α_2, que cumpla que su coseno es también 0.7 pero el seno sea negativo.

Nota: Aunque 45.6º es muy próximo a 45º, a la hora de dibujarlo lo haremos más cerca de 90º a fin de que podamos distinguir el tamaño del seno y coseno que en 45º son iguales.



El ángulo $\alpha_2=360^\circ-45.6^\circ=314.4^\circ$ cumple que $\cos(\alpha_2)=0.7$ pero ahora si $\text{sen}(\alpha_2)<0$. Lugo la solución es $\alpha=314.4^\circ$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

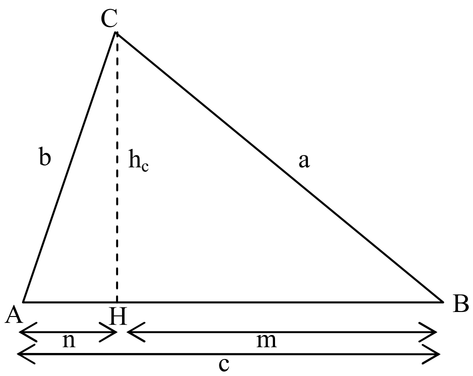
7. Teorema del seno y del coseno

Estos teoremas se utilizan para resolver triángulos no rectángulos, en los que no podemos aplicar ni el teorema de Pitágoras, ni las razones trigonométricas.

Es posible resolver los triángulos sin necesidad de conocer los teoremas del seno y del coseno, trazando una de sus alturas descomponemos el triángulo en dos triángulos rectángulos y podremos aplicar el teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas. Si bien resulta más sencillo y metódico aplicar los teoremas del seno y del coseno

7.1. Teorema del seno

Dado un triángulo ABC, al cual trazamos una de sus alturas, por ejemplo la del vértice C, cortando en el lado c en el punto H y dividiendo el triángulo en dos rectángulos AHC y BHC:



Calculemos la altura h_c a partir de los triángulos rectángulos y de la razón seno:

$$\left.\begin{array}{l} sen\,\hat{A} = \dfrac{h_c}{b} \\ sen\,\hat{B} = \dfrac{h_c}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow a \cdot sen\hat{B} = b \cdot sen\hat{A} \;\; \Rightarrow \frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}}$$

Si trazamos la altura del vértice A obtendríamos de forma análoga la siguiente relación:

$$\frac{c}{sen\hat{C}} = \frac{b}{sen\hat{B}}$$

Teniendo en cuenta las expresiones anteriores, obtendremos las relaciones que se conocen como el teorema del seno.

Teorema del seno: en todo triángulo los lados son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos:

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}}$$

Nota: el cociente de estas relaciones es igual a 2R, siendo R el radio de la circunferencia circunscrita: $\dfrac{a}{sen\hat{A}} = \dfrac{b}{sen\hat{B}}\dfrac{c}{sen\hat{C}} = 2R$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

7.2. Teorema del coseno

Apliquemos Pitágoras en el triángulo CBH:

$$\left.\begin{array}{l} CBH: a^2 = h_c^{\,2} + m^2 \rightarrow a^2 = h_c^{\,2} + (c-n)^2 \\ CHA: b^2 = h_c^{\,2} + n^2 \rightarrow h_c^{\,2} = b^2 - n^2 \end{array}\right\} \rightarrow a^2 = b^2 - n^2 + c^2 - 2cn + n^2 \rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2cn$$

Aplicando el coseno del triángulo ACH :

$$\cos \hat{A} = \frac{n}{b} \rightarrow n = b \cdot \cos \hat{A}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior, obtendremos una de las ecuaciones del teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$

Podemos llegar a expresiones análogas trazando las otras dos alturas, correspondientes a los vértices A y B.

Teorema del coseno: las relaciones entre los tres lados y los ángulos de cualquier triángulo son:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$

8. Resolución de triángulos no rectángulos

Resolver un triángulo cualquiera es determinar todos sus elementos, es decir, sus tres lados y ángulos.

Para resolverlo aplicaremos los siguientes teoremas:

- Teorema del seno
- Teorema del coseno
- La suma de los ángulo del triángulo es 180º ($\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180º$)

Un triángulo queda determinado siempre que conozcamos 3 de sus 6 elementos, siempre que no sean sus 3 ángulos.

Para evitar que los errores se propaguen es recomendable utilizar los datos que nos dan inicialmente, y no los que hemos ido calculando.

No siempre un triángulo se puede resolver, es decir con los datos dados nos dan soluciones imposibles. También a veces con los datos dados tendremos dos soluciones. El caso más problemático es cuando se conocen dos lado y uno de los ángulos que no formen los dos lados.

Por lo general el teorema del coseno se utiliza cuando se conocen más lados que ángulos.

8.1. Conocido dos lados y uno de los dos ángulos que no forma estos lados.

Este es el problema más complejo, pues puede ocurrir tres cosas:

a) No tenga solución

b) Dos soluciones

c) Una solución (es triángulo rectángulo)

Ejemplo

1) a=15cm, b=20cm, $\hat{A}$=40º (dos soluciones)

Opción 1

Teorema del coseno ($a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\hat{A}$)→ $225=400+c^2-40\cdot c\cdot\cos(40)$

$c^2-30{,}64\cdot c+175=0$ → c= $\begin{cases} c_1 = 7{,}6cm \\ c_2 = 23{,}05cm \end{cases}$

a) Si $c=c_1=7.6$, apliquemos teorema del seno($\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{c}{sen\hat{C}}$)→ $\frac{15}{sen40} = \frac{7.6}{sen\hat{C}}$

$\hat{C}_1 = arcsen\left(\frac{7.6\cdot sen40}{15}\right) = 19º$ → $\hat{B}_1 = 121º$

b) Si $c=c_1=23.5$, apliquemos teorema del seno($\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{c}{sen\hat{C}}$)→ $\frac{15}{sen40} = \frac{23.5.}{sen\hat{C}}$

$\hat{C}_2 = arcsen\left(\frac{23{,}05\cdot sen40}{15}\right) = 81º$

Opción 2

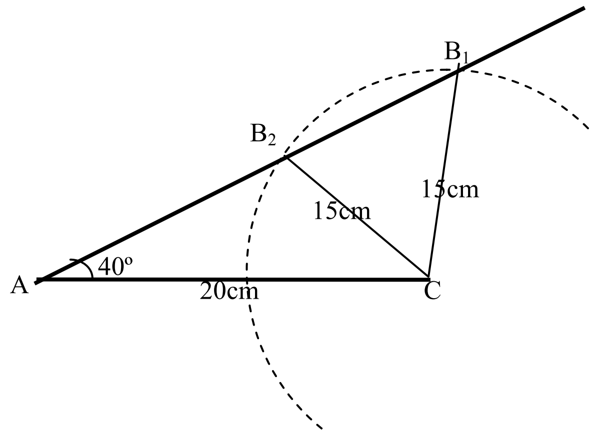
Teorema del seno ($\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}}$)→ $\frac{15}{sen40} = \frac{20}{sen\hat{B}}$ → $\hat{B} = arcsen\left(\frac{20\cdot sen40}{15}\right) = \begin{cases} \hat{B}_1 = 59º \\ \hat{B}_2 = 121º \end{cases}$

Las dos son soluciones son posibles pues $\hat{A}+\hat{B}<180º$

a) Si $\hat{B}_1 = 59º$: $\hat{C}_1 = 81º$, y para calcular c aplicamos teorema del coseno:
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos(\hat{C}_1) \rightarrow c_1 = 7{,}6cm$

b) Si $\hat{B}_2 = 121º$: $\hat{C}_2 = 19º$, y para calcular c aplicamos teorema del coseno:
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos(\hat{C}_2) \rightarrow c_2 = 23.05cm$

Gráficamente



2) a=10cm, b=20cm, $\hat{A}$=75º (0 soluciones)

Opción 1

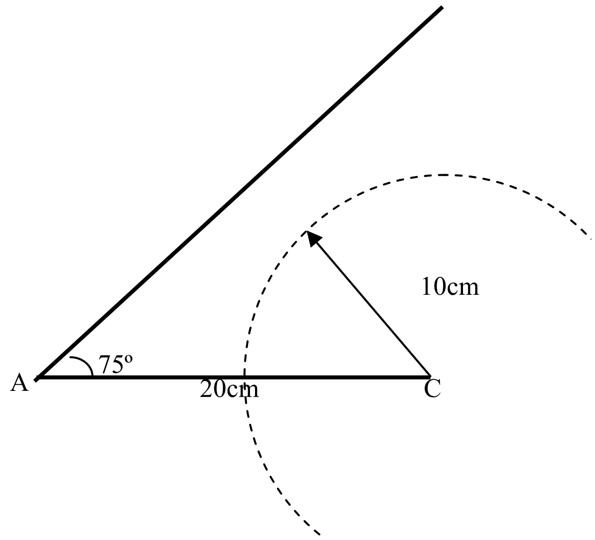
Teorema del coseno ($a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\hat{A}$)→ $100=400+c^2-40\cdot c\cdot\cos(75º)$

$c^2-10,35\cdot c+300=0$ → c=no solución real

Opción 2

Teorema del seno ($\frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{b}{sen\hat{B}}$)→ $\frac{10}{sen75}=\frac{20}{sen\hat{B}}$ → $\hat{B}=arcsen\left(\frac{20\cdot sen75}{10}\right)=no\,sol$

Gráficamente



3) a=10cm, b=20cm, $\hat{A}$=30º (1 solución)

Opción 1

Teorema del coseno ($a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\hat{A}$) → $100=400+c^2-40\cdot c\cdot\cos(30º)$

$c^2-20\sqrt{3}c+300=0$ → $c=10\sqrt{3}$ (doble)

Si $c=10\sqrt{3}$, apliquemos teorema del seno($\frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{b}{sen\hat{B}}$)→ $\frac{10}{sen30}=\frac{20}{sen\hat{B}}$

$$\hat{B}=arcsen\left(\frac{20\cdot sen(30)}{10}\right)=90º \rightarrow \hat{C}=60º$$

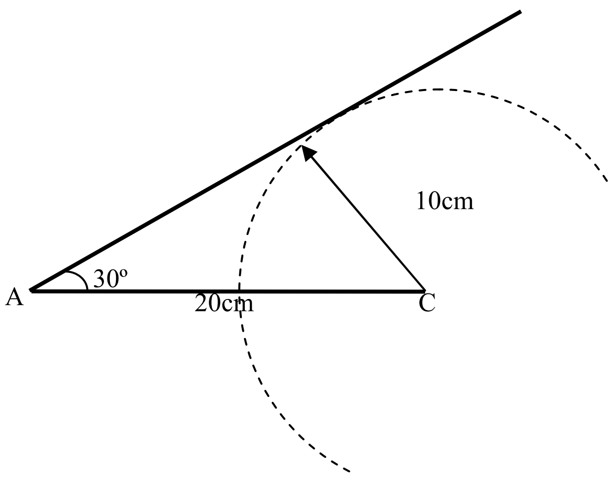
Opción 2

Teorema del seno ($\frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{b}{sen\hat{B}}$)→ $\frac{10}{sen30}=\frac{20}{sen\hat{B}}$ → $\hat{B}=arcsen\left(\frac{20\cdot sen30}{10}\right)=90º$

$\hat{C}=60º$.

Teorema del coseno para calcular c: $c^2=b^2+a^2-2ab\cdot\cos(\hat{C})$ → $c=10\sqrt{3}$

Gráficamente



8.2 Conocido los tres lados

Puede ocurrir:

1. Una única solución
2. Ninguna solución: esto ocurre cuando un lado es mayor o igual que la suma de los otros dos, o menor o igual que la resta de los otros dos.

Ejemplo 1: a=2cm,b=4cm, c=5cm.

Apliquemos el teorema del coseno para obtener alguno de los ángulos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$ → 4=16+25-40·cos($\hat{A}$) → $\cos(\hat{A}) = \frac{37}{40} \rightarrow \hat{A} = 22{,}3º$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$ → 16=4+25-20·cos($\hat{B}$) → $\cos(\hat{B}) = \frac{13}{20} \rightarrow \hat{B} = 49{,}6º$

$\hat{C} = 180° - \hat{B} - \hat{A} = 108{,}1°$

Ejemplo 2: a=2cm,b=4cm, c=7cm.

Apliquemos el teorema del coseno para obtener alguno de los ángulos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$ → 4=16+49-56·cos($\hat{A}$) → $\cos(\hat{A}) = \frac{61}{56} \rightarrow \textit{No solución}$

8.3. Conocido dos lados y el ángulo que forman.

Siempre una solución

Ejemplo: $\hat{C} = 60º$, *a=20cm, b=10cm*

Teorema del coseno → $c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos(\hat{C})$ → $c^2=400+100-400\cdot\cos(60)$ → $c=\sqrt{300}$cm

Teorema del seno → $\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{c}{sen\hat{C}} \rightarrow \frac{20}{sen\hat{A}} = \frac{\sqrt{300}}{sen(60)} \rightarrow \hat{A} = 90$ → $\hat{B} = 30º$

8.4. Conocidos dos ángulos y un lado

Siempre una única solución.

Ejemplo: $\hat{C} = 60º$, $\hat{A} = 80º$ *a=10m*

$\hat{B} = 180 - 60 - 80 = 40º$

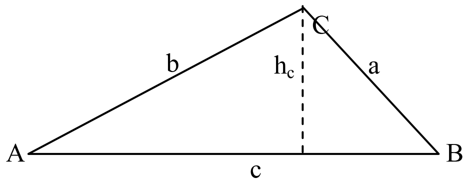
Teorema del seno: $\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{c}{sen\hat{C}} \rightarrow \frac{10}{sen 80} = \frac{c}{sen(60)} \rightarrow c = 8{,}8m$

Teorema del seno: $\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} \rightarrow \frac{10}{sen 80} = \frac{b}{sen(60)} \rightarrow b = 6{,}5m$

9. Área de un triángulo

En este apartado vamos a poner el área de cualquier triángulo en función de los lados y los ángulos. Sabemos de cursos anteriores que el área es: $A_{\text{triángulo}} = \frac{base \cdot altura}{2}$

La idea es poner la altura en función de los lados y los ángulos, vemos como:



A$_{\text{triángulo}}$= $\frac{c\cdot h_c}{2}=\frac{1}{2}\cdot c\cdot b\cdot sen(\hat{A})$

De igual forma repitiendo el proceso para el resto de alturas tenemos que el área del triángulo es en función de los lados y los ángulos son:

$$A_{\text{triángulo}}= =\frac{1}{2}\cdot c\cdot b\cdot sen\left(\hat{A}\right)=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot sen\left(\hat{C}\right)=\frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot sen(\hat{B})$$

Ejercicios finales:

Relación entre las razones trigonométricas

1) Calcular sin hacer uso de la calculadora las demás razones trigonométricas

a. sen(α)=0.2 (cuadrante II)
b. cos(α)=-0.3 (cuadrante III)
c. tg(α)=2 (cuadrante I)

Solución

a. $sen^2(\alpha)+cos^2(\alpha)=1 \rightarrow 0.2^2+cos^2(\alpha)=1 \rightarrow cos^2(\alpha)=0.96 \rightarrow cos(\alpha)=\pm\sqrt{0.96}$

la solución es $cos(\alpha)=-\sqrt{0.96}$ al ser del cuadrante II

$tg(\alpha)=sen(\alpha)/cos(\alpha) \rightarrow tg(\alpha)=-0.2/\sqrt{0.96}$

b. $sen^2(\alpha)+cos^2(\alpha)=1 \rightarrow sen^2(\alpha)+(-0.3)^2=1 \rightarrow sen^2(\alpha)=0.91 \rightarrow sen(\alpha)=\pm\sqrt{0.91}$

la solución es $sen(\alpha)=-\sqrt{0.91}$ al ser del cuadrante III

$tg(\alpha)=sen(\alpha)/cos(\alpha) \rightarrow tg(\alpha)=\sqrt{0.91}/0.3$

c. $$\left.\begin{array}{r}\operatorname{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1\\ tg(\alpha)=\dfrac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}\operatorname{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1\\ 2=\dfrac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}\operatorname{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1\\ 2\cos(\alpha)=sen(\alpha)\end{array}\right\}$$

Tenemos un sistema con dos ecuaciones y dos incógnitas fácilmente resoluble sustituyendo en la primera ecuación sen(α)=2cos(α):

$(2cos(\alpha))^2+cos^2(\alpha)=1 \rightarrow 5cos^2(\alpha)=1 \rightarrow cos^2(\alpha)=1/5 \rightarrow cos(\alpha)=\pm 1/\sqrt{5}$

la solución es $cos(\alpha)=1/\sqrt{5}$ ya que es del cuadrante I $\rightarrow sen(\alpha)=2/\sqrt{5}$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

2) Comprueba que son ciertas las siguientes igualdades:

a. $\dfrac{1+tg^2(\alpha)}{1+\cot g^2(\alpha)}=tg^2(\alpha)$

Solución: $\dfrac{1+tg^2(\alpha)}{1+\cot g^2(\alpha)}=\dfrac{1+tg^2(\alpha)}{1+\dfrac{1}{tg^2(\alpha)}}=\dfrac{1+tg^2(\alpha)}{\dfrac{1+tg^2(\alpha)}{tg^2(\alpha)}}=tg^2(\alpha)$

b. $\dfrac{\cos^2(\alpha)}{1+sen(\alpha)}=1-sen(\alpha)$

Solución: $\dfrac{\cos^2(\alpha)}{1+sen(\alpha)}=\dfrac{1-sen^2(\alpha)}{1+sen(\alpha)}=\dfrac{(1-sen(\alpha))(1+sen(\alpha))}{(1+sen(\alpha))}=1-sen(\alpha)$

c. $\sec^2(x)+\text{cosec}^2(x)=\sec^2(x)\cdot\text{cosec}^2(x)$

Solución: $\sec^2(x)+\text{cosec}^2(x)=\dfrac{1}{\cos^2(x)}+\dfrac{1}{sen^2(x)}=\dfrac{sen^2(x)+\cos^2(x)}{\cos^2(x)\cdot sen^2(x)}=$

$=\dfrac{1}{\cos^2(x)\cdot sen^2(x)}=\left(\dfrac{1}{\cos(x)}\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{sen(x)}\right)^2=\sec^2(x)\cdot\cos ec^2(x)$

3) Simplifica las siguientes expresiones

a. $(sen(x)+cos(x))^2+(sen(x)-cos(x))^2$

Solución: $(sen(x)+cos(x))^2+(sen(x)-cos(x))^2=$

$=sen^2(x)+cos^2(x)+2\cdot sen(x)\cdot cos(x)+sen^2(x)+cos^2(x)-2\cdot sen(x)\cdot cos(x)=$

$=2\cdot(sen^2(x)+cos^2(x))=2\cdot 1=2$

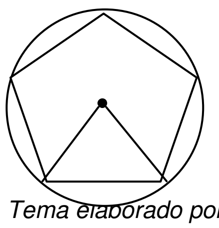
b. $\dfrac{sen^3(x)+sen(x)\cdot\cos^2(x)}{sen(x)}$

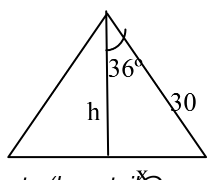
Solución: $\dfrac{sen^3(x)+sen(x)\cdot\cos^2(x)}{sen(x)}=\dfrac{sen(x)\cdot(sen^2(x)+\cos^2(x))}{sen(x)}=\dfrac{sen(x)}{sen(x)}=1$

<u>Problemas de geometría</u>

4) Calcular el perímetro de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 30cm de radio. Calcular su área

Ángulo del pentágono → α=360º/5=72º





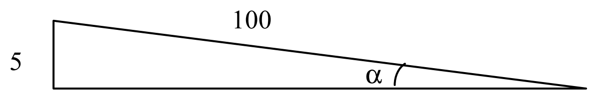
Lado pentágono=2x → sen(36º)=x/30 → x=30·sen(36º)=17.6cm

Perímetro=10·x=176cm

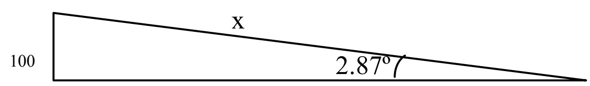
Apotema=h→ cos(36º)=x/30 → x=30·cos(36º)=24.3cm

área=$\dfrac{p \cdot ap}{2}=\dfrac{176 \cdot 24.3}{2}=2138.4 \cdot cm^2$

5) En un tramo de carretera la inclinación es del 5% (sube 5m en 100m). Calcular el ángulo que forma con la horizontal la carretera. Sabemos que hemos subido 100m, ¿Cuánto hemos andado por la carretera?

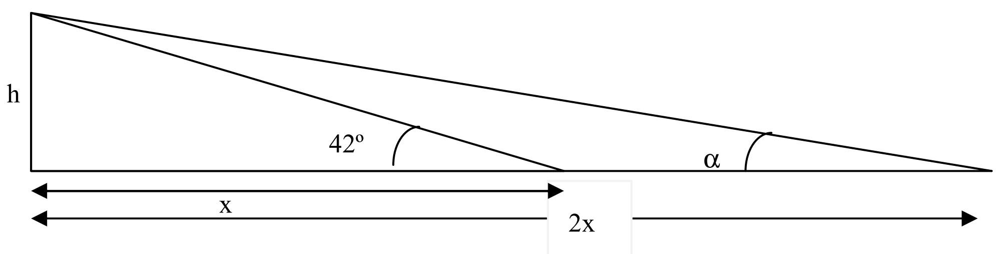


sen(α)=$\frac{5}{100}=0.05$→ α=arcsen(0.05)=2.87º



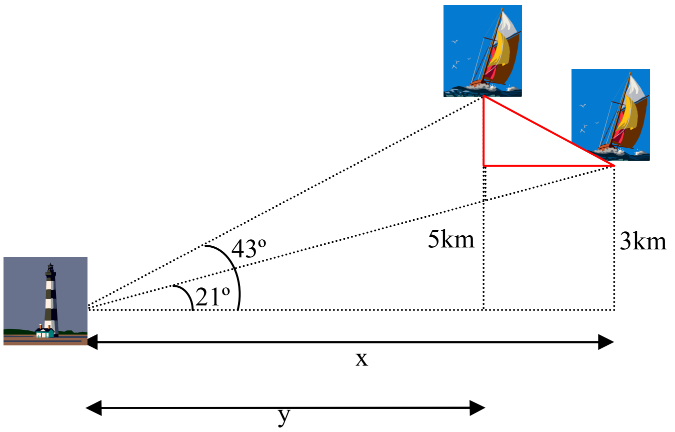
sen(α)=0.05=100/x → x=2000m

6) Desde un cierto punto del suelo se ve un árbol bajo un ángulo de 42º ¿bajo qué ángulo se ve colocándose al doble de distancia?



tg(42º)=0.9=h/x → tg(α)=h/2x=0.45 → α=arctg(0.45)=24,2º

7) Desde un faro F se ve un barco A con ángulo de 43º con la costa, y el barco B con 21º. El barco B está a 3km de la costa y el A a 5km. Calcular distancia entre los barcos.



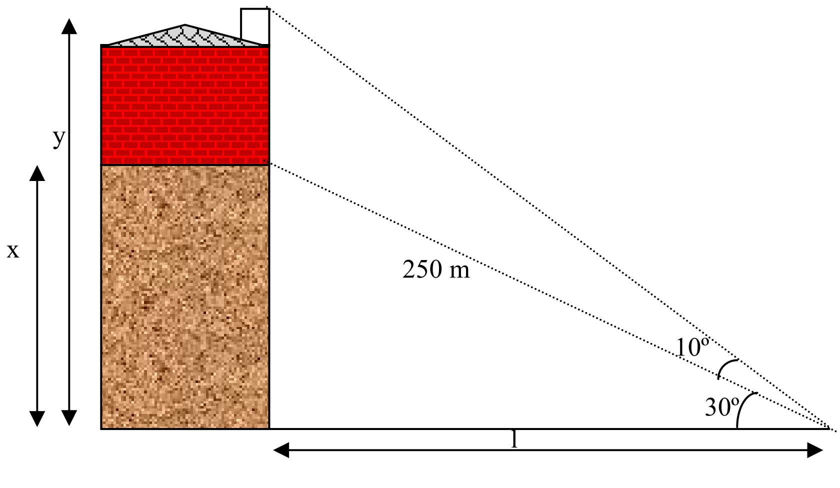
Podemos calcular la distancia si conocemos los catetos del triángulo rojo. Uno de los dos catetos mide 5km-3km=2km. El otro es y-x. Calculémoslo:

tg(21)=3/x → x=3/tg(21)=7.82km

tg(43º)=5/y → y=5/tg(43º)=5.4km

Así la distancia entre los dos barcos definida por la hipotenusa de un triángulo con catetos de 2km y de (x-y)=2.42km→ d=$\sqrt{2^2+(2.42)^2}\ =3.14km$

8) Calcular la altura del edificio:



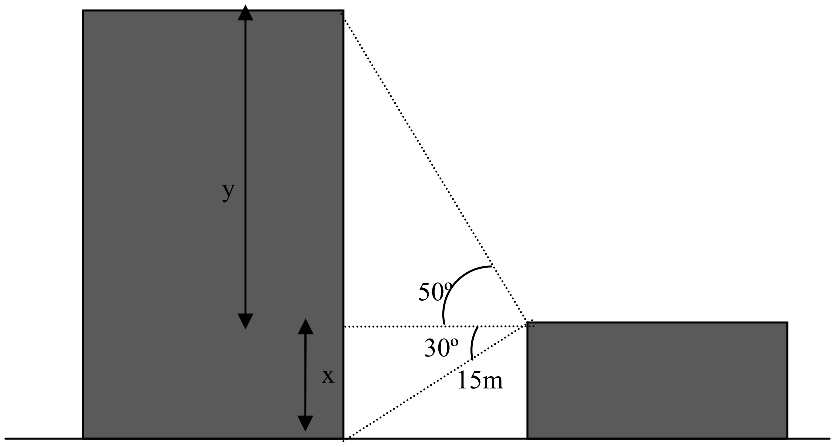
sen(30º)=x/250 → x=250·sen(30º)=125m

cos(30º)=l/250 → l= 250·cos(30º)=216.5m

tg(40º)=y/l → y=216.5m·tg(40º)=181.2m

h_{casa}=y-x=56.2m

9) Calcular la altura de la torre grande a partir del siguiente dibujo



$x=15\cdot sen(30º)=7.5m$

$l=15\cdot cos(30º)=13m$

$tg(50º)=y/l \rightarrow y=l\cdot tg(50º)=15.5m$

$altura=y+x=23m$

Ecuaciones.

10) Resolver las siguientes ecuaciones

a. $sen^2(x)-sen(x)=0$
b. $cos(x)+sen^2(x)=1$
c. $3tg^2(x)=sec^2(x)$
d. $sen(2x)=0.5$

Solución

a. $sen(x)=y \rightarrow y^2-y=0$, $y(y-1)=0 \rightarrow y=0, y=1$.

Si $y=0 \rightarrow sen(x)=0 \rightarrow x=arcsen(0)=\begin{cases} 0º+360k \\ 180º+360k \end{cases}$

Si $y=1 \rightarrow sen(x)=1 \rightarrow x=arcsen(1)=90º+360k$

b. Tenemos expresar la ecuación sólo en función del seno o del coseno, para esto utilizamos $sen^2(x)+cos^2(x)=1 \rightarrow sen^2(x)=1-cos^2(x)$

$cos(x)+sen^2(x)=1 \rightarrow cos(x)+1-cos^2(x)=1 \rightarrow cos(x)-cos^2(x)=0$

Llamando $y=cos(x)$ la ecuación será:

$y-y^2=0 \rightarrow y(y-1)=0$ $y=0, y=1$.

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Si y=0 → cos(x)=0 → x=arccos(0)= $\begin{cases} 90^o+360k \\ 270^o+360k \end{cases}$

Si y=1 → cos(x)=1 → x=arccos(1)= 0^o+360k

c. $3tg^2(x)=sec^2(x)$ →

$$3\cdot\frac{sen^2(x)}{\cos^2(x)}=\frac{1}{\cos^2(x)}\rightarrow sen^2(x)=\frac{1}{3}\rightarrow sen(x)=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\rightarrow$$

$$x=arcsen\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\begin{cases} 35{,}26^o+360k \\ 180^o-35{,}26^o=144.74^o+360k \end{cases}$$

$$x=arcsen\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\begin{cases} 360^o-35{,}26^o=324{,}74^o+360k \\ 180^o+35{,}26^o=215.26^o+360k \end{cases}$$

d. sen(2x)=0.5 → 2x=arcsen(0.5)= $\begin{cases} 30^o+360k \\ 150^o+360k \end{cases}$ →

Si 2·x=30º+360k → x= $\begin{cases} k=0\rightarrow 15^o+360k \\ k=1\rightarrow 195^o+360k \end{cases}$

Si 2·x=150º+360k → x= $\begin{cases} k=0\rightarrow 75^o+360k \\ k=1\rightarrow 255^o+360k \end{cases}$

Teorema del seno y del coseno. Resolución triángulos no rectángulos

11) Resolver los siguientes triángulos

a) $\hat{A}$=45º, b=50m, a=40m

b) $\hat{C}$=30º, a=5cm, b=3cm

c) $\hat{A}$=45º, $\hat{C}$=60º, b=20m

d) $\hat{C}$ = 45º, b=10m, c=6m

e) a=5cm, b=4cm, c=4cm

a) $\hat{A}$=45º, b=50m, a=40m

Este es el caso en el que puede haber dos soluciones. Veámoslo:

Teorema del seno:

$$\frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{b}{sen\hat{B}}\rightarrow\frac{40}{sen(45^o)}=\frac{50}{sen(\hat{B})}\rightarrow sen(\hat{B})=0{,}884\rightarrow\hat{B}=\begin{cases}\hat{B}_1=62{,}11^o \\ \hat{B}_2=117{,}89^o\end{cases}$$

Los dos ángulos son soluciones, pues la suma con $\hat{A}+\hat{B}<180^o$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Solución 1 : $\hat{B}_1 = 62{,}11^o$ → $\hat{C}_1 = 72{,}89^o$

Calculemos c por el teorema del seno ($\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{c}{sen\hat{C}}$)→ $\frac{40}{sen45} = \frac{c}{sen72.89^o}$ →c=54m

Solución 2 : $\hat{B}_2 = 117{,}89^o$ → $\hat{C}_2 = 17{,}11^o$

Calculemos c por el teorema del seno ($\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{c}{sen\hat{C}}$)→ $\frac{40}{sen45} = \frac{c}{sen17{,}11^o}$ →c=16,6m

b) $\hat{C}$=30º, a=5cm, b=3cm

Este problema sólo puede tener una solución:

Apliquemos el teorema del coseno para calcular c:

$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos(\hat{C})=25+9-30\cdot\cos(30)=8{,}02cm^2$ → c=2,84cm

Teorema del seno para calcular $\hat{A}$: $\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{c}{sen\hat{C}} \to \frac{5}{sen\hat{A}} = \frac{2{,}84}{sen30} \to \hat{A} = \begin{cases} \hat{A}_1 = 62^o \\ \hat{A}_2 = 118^o \end{cases}$

Las dos soluciones parecen válidas, luego lo comprobaremos:

Solución 1:

$\hat{C}$=30º, $\hat{A}$=62º, $\hat{B}$=88º a=5cm, b=3cm, c=2,84cm.

Solución 2:

$\hat{C}$=30º, $\hat{A}$=118º, $\hat{B}$=32º a=5cm, b=3cm, c=2,84cm.

En este caso la solución 1 no es válida,pues cuanto mayor sea el lado mayor el ángulo. Y en la solución 1 vemos como a es el mayor lado y $\hat{A}$ no es el mayor ángulo.

c) $\hat{A}$=45º, $\hat{C}$=60º, b=20m

Podemos fácilmente calcular el otro ángulo $\hat{B} = 180 - 60 - 45$=75º

Utilicemos el teorema del seno para calcular los 2 lados que faltan:

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}} \to \begin{cases} \frac{a}{sen45} = \frac{20}{sen75} \to a = 14{,}6m \\ \frac{20}{sen75} = \frac{c}{sen60} \to c = 17.9m \end{cases}$$

d) $\hat{C} = 45$º, b=10m, c=6m

Utilicemos el teorema del seno para calcular el ángulo $\hat{B}$

$\frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}} \to \frac{10}{sen\hat{B}} = \frac{6}{sen45^o} \to sen\hat{B} = 1{,}17$ → No solución

e) a=5cm, b=4cm, c=4cm

Por el teorema del coseno obtendremos el ángulo deseado:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A} \rightarrow 25 = 16 + 16 - 32 \cdot \cos(\hat{A}) \rightarrow \hat{A} = 77{,}36^{\circ}$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B} \rightarrow 16 = 25 + 16 - 40 \cdot \cos \hat{B} \rightarrow \hat{B} = 51{,}32^{\circ}$

$\hat{C} = 180 - \hat{A} - \hat{B} = 51{,}32^{\circ}$