Tema 4. Números Complejos

1. Números complejos.

1.1. Definición de números complejo

Cuando resolvíamos las ecuaciones de segundo grado y el discriminate era negativo (raíz negativa) decíamos que dicha ecuación no tenía soluciones reales. ¿pero es qué acaso puede haber otro tipo de soluciones?. En este tema veremos los números complejos, en este conjunto de números las raíces pares de índice negativo tienen solución.

Ejemplos:

1) $x^2+4=0 \rightarrow x=\pm\sqrt{-4}=\pm 2\sqrt{-1}$

2) $x^2-4x+5=0 \rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 5}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}=2\pm\sqrt{-1}$

Antes de definir el conjunto de los números complejos vamos a definir la ***unidad imaginaria, i:***

$$\mathbf{i=\sqrt{-1}} \quad \text{tal que} \quad \mathbf{i^2=-1}$$

De esta forma las soluciones a las ecuaciones 1 y 2 son:

1) $x=\pm 2i$
2) $x=2\pm i$

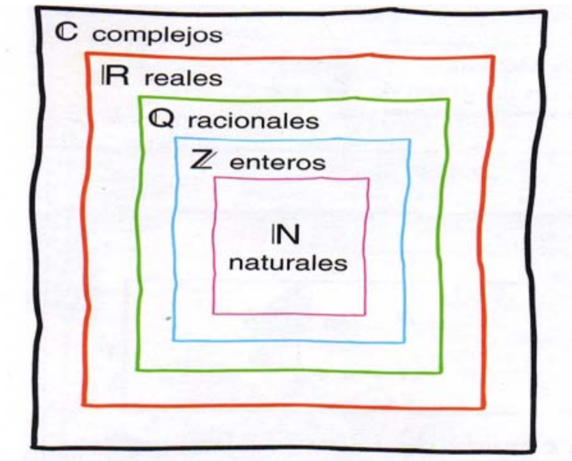
Números complejos ($\mathbb{C}$) son aquellos que se pueden escribir de la forma z=a+b·i, donde a y b son números reales e i es la unidad imaginaria. Esta forma de representar a los $\mathbb{C}$ se denomina ***forma binómica.***

Partes de los complejos z=a+b·i:

- Parte real Re(z)=a
- Parte imaginaria Im(z)=b

Nota: los números reales están incluidos en los complejos, son en los que la parte imaginaria es cero (b=0).

Los complejos que no tiene parte real se denominan ***imaginarios puros***. Por ejemplo z=5i, z=πi…



Ejercicio: escribe los siguientes números complejos en función de la unidad imaginaria:

a) $\sqrt{-3}=\sqrt{3}i$

b) $\sqrt{-16}=4\,i$

Ejercicio: resuelve las siguientes ecuaciones y factoriza los polinomios con números complejos:

a) $x^2-4x+13=0$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-52}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{-36}}{2}=\begin{cases}x=2+3i\\ x=2-3i\end{cases}$$

$x^2-4x+13=(x-(2+3i))\cdot(x-(2-3i))$

Comprobación:

$(x-(2+3i))\cdot(x-(2-3i))=x^2-(2-3i)x-(2+3i)x+(2+3i)(2-3i)=x^2-4x+(2^2-(3i)^2)=$

$=x^2-4x+(4-9(i)^2)=x^2+4x-(4+9)=x^2-4x+13$

b) $3x^2-3x+2=0$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9-24}}{6}=\frac{3\pm\sqrt{-15}}{6}=\begin{cases}x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}}{6}i\\ x=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{15}}{6}i\end{cases}$$

$$3x^3-3x+2=3\cdot\left(x-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}}{6}i\right)\right)\cdot\left(x-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{15}}{6}i\right)\right)$$

Comprobación:

$$3\cdot\left(x-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}}{6}i\right)\right)\cdot\left(x-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{15}}{6}i\right)\right)=3\left(x^2-x+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}}{6}i\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{15}}{6}i\right)\right)=$$

$$=3\cdot\left(x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{15}{36}i^2\right)=3\cdot\left(x^2-x+\frac{1}{4}+\frac{15}{36}\right)=3\cdot\left(x^2-x+\frac{24}{36}\right)=3x^2-3x+2$$

1.2.Conjugado y opuesto de números complejos

Veamos tres definiciones muy importantes:

Dos números complejos $z_1=a_1+b_1i$ y $z_2=a_2+b_2i$ son ***iguales*** si son iguales tanto la parte imaginaria como la real:

$$\mathbf{z_1=z_2\leftrightarrow a_1=a_2\ y\ b_1=b_2}$$

Ejemplo: hallar x e y sabiendo que z=z’, siendo z=3+xi y z’=y-5i. Como z=z’ entonces x=-5 e y=3

Dado un número complejo z=a+bi:

- llamamos ***opuesto*** de z al número complejo –z=-a-bi. Tal que se cumple que z+(-z)=0

- llamamos ***conjugado*** de z al complejo $\bar{z} = a - bi$. Cumpliéndose:

  · Re(z)=Re($\bar{z}$)

  · Im(z)=-Im($\bar{z}$)

Ejemplos:

z=3+15i → $\bar{z}$=3-15i

z=-12+πi → $\bar{z}$=-12-πi

Nota: z+$\bar{z}$=2·Re(z)

1.3. Representación gráfica de los complejos

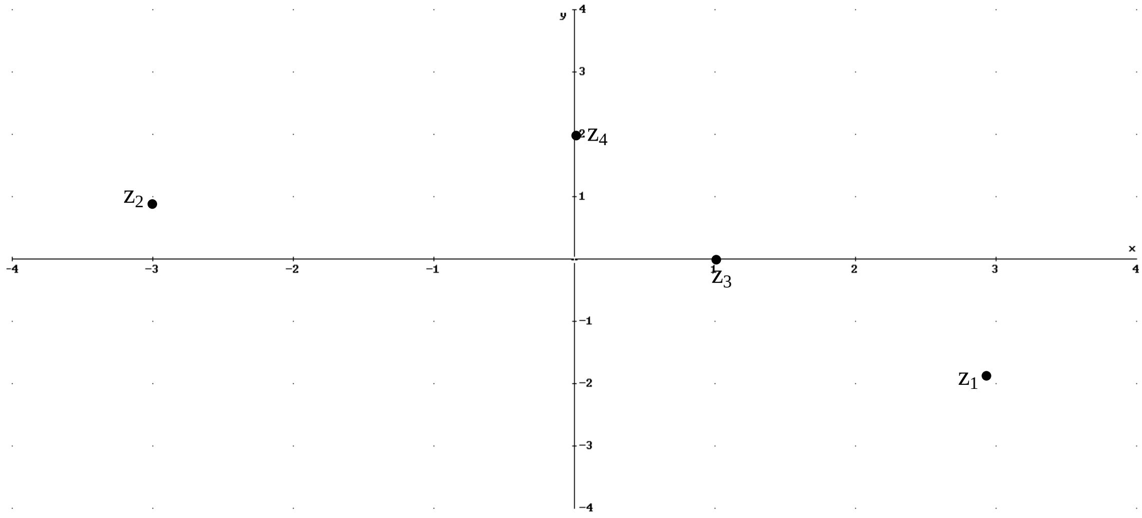
Los números complejos no se pueden representar en la recta real, para su representación es necesario dos dimensiones (una para la parte real y otra para la imaginaria). De esta forma los complejos se representan en un sistema cartesiano denominado ***plano complejo.***

En este plano complejo el complejo z=a+bi se representa tal que la parte real, a, estará en el eje de abcisas (eje x) denominado ***eje real*** y la parte imaginaria, b, en el eje de ordenadas (eje y) denominado ***eje imaginario.***

De esta forma el complejo z=a+bi es equivalente al punto P(a,b) que se llama ***afijo*** del complejo z.

Ejemplos:

Representar los complejos z_1=3-2i, z_2=-3+i, z_3=1, z_4=2i



2. Operaciones con complejos

Las operaciones con complejos se basan en las operaciones con números reales y en que $i \cdot i = i^2 = -1$. Veamos a partir de estas dos premisas las operaciones con complejos:

2.1.Suma y resta de complejos

La suma y la resta de números complejos se realiza sumando o restando las partes reales e imaginarias entre sí:

- Suma: $(a_1+b_1 \cdot i)+(a_2+b_2 \cdot i)= (a_1+ a_2)+(b_1+ b_2)\cdot i$
- Resta: $(a_1+b_1 \cdot i)-(a_2+b_2 i)= (a_1- a_2)+(b_1- b_2)\cdot i$

Ejemplo: $z=(6+2\cdot i)$, $z'=(-2+3\cdot i)$

$z+z'=(6+2\cdot i)+(-2+3\cdot i)=4+5\cdot i$

$z-z'=(6+2\cdot i)-(-2+3\cdot i)=8-i$

Nota: podemos calcular gráficamente la suma de z_1+z_2 como suma de los vectores con afijos de z_1 y de z_2

2.2. Producto de complejos

El producto de dos complejos se realiza como si fueran reales y a partir de saber que $i^2=-1$:

$z_1\cdot z_2=(a_1+b_1\cdot i)\cdot (a_2+b_2\cdot i)=a_1\cdot a_2+(a_1\cdot b_2)i+(a_2\cdot b_1)i+b_1\cdot b_2\cdot i^2=(a_1\cdot a_2- b_1\cdot b_2)+(a_2\cdot b_1+ a_1\cdot b_2)\cdot i$

Ejemplo: $z=(6+2\cdot i)$, $z'=(-2+3\cdot i)$

$z\cdot z'=(6+2\cdot i)\cdot(-2+3\cdot i)=(-12-6)+(18-4)\cdot i=-18+14\cdot i$

Nota: el producto de dos complejos conjugados es un número real igual al cuadrado de la distancia del afijo al centro: $z\cdot \overline{z} =(a+bi)(a-bi)=(a^2+b^2)+(ab-ab)\cdot i=(a^2+b^2)$

2.3. División de complejos

Para calcular la división de dos complejos multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador, así este será un número real:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Ejemplo:

$$\frac{1+2i}{3-4i}=\frac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=\frac{3+4i+6i-8}{25}=\frac{-5}{25}+\frac{10}{25}i=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$$

2.4.Potencia de números complejos

La potencia de un complejo $z=(a+bi)$ de exponente natural z^n se realiza multiplicando z consigo mismo n veces.

Ejemplo: $(2+3i)^3=(2+3i)(2+3i)(2+3i)=(-5+12i)\cdot(2+3i)=-46+9i$

2.5. Potencias de i

Como sabemos que i=$\sqrt{-1}$ podemos calcular el valor de i^n de la siguiente forma:

$i^0=1$	$i^4=i^2\cdot i^2=-1\cdot(-1)=1$	$i^8=1$	$i^{12}=1$
$i^1=i$	$i^5=i$	$i^9=i$	$i^{13}=i$
$i^2=-1$	$i^6=-1$	$i^{10}=-1$	$i^{14}=-1$
$i^3=i^2\cdot i=-i$	$i^7=-i$	$i^{11}=-i$	$i^{15}=-i$

Luego podemos expresarlo en función del resto de dividir n entre 4:

$$i^n=\begin{cases} 1 & n=4k\ (resto(n:4)=0) \\ i & n=4k+1\ (resto(n:4)=1) \\ -1 & n=4k+2\ (resto(n:4)=2) \\ -i & n=4k+3\ (resto(n:4)=3) \end{cases}$$

Ejercicio: realiza las siguientes operaciones

a) $(1+2i)^3=(1+2i)(1+2i)(1+2i)=(-3+4i)(1+2i)=-11-2i$

b) $\dfrac{-1-i}{-4+5i}=\dfrac{(-1-i)(-4-5i)}{(-4+5i)(-4-5i)}=\dfrac{4+5i+4i-5}{16+25}=\dfrac{-1}{41}+\dfrac{9}{41}i$

c) $\dfrac{(2-i)(3+i)}{-1+2i}-2i=\dfrac{7-i}{-1+2i}-2i=\dfrac{(7-i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)}-2i=\dfrac{-9-13i}{5}-2i=-\dfrac{9}{5}-\dfrac{23}{5}i$

d) $i^{2008}=i^0=1$ → resto(2008:4)=0)

e) $i+i^2+...+i^{20}=(i-1-i+1)\cdot 5=0$

Ejercicio: calcular x tal que se cumple:

a) Halla x para que $(x+3i)^2$ sea imaginario puro

$(x+3i)^2=(x+3i)(x+3i)=x^2-9+3xi+3xi=(x^2-9)+6xi$ → imaginario puro si $x^2-9=0$ → $x=\pm3$

b) Halla x para que $(x+3i)^2$ sea real

$(x+3i)^2=(x^2-9)+6xi$ →real si $6x=0$ → $x=0$

c) Halla x para que $\frac{2+xi}{1-xi}$ sea número imaginario

$\dfrac{2+xi}{1-xi}=\dfrac{(2+xi)\cdot(1+xi)}{(1-xi)\cdot(1+xi)}=\dfrac{2-x^2+3xi}{1+x^2}=\dfrac{2-x^2}{1+x^2}+\dfrac{3x}{1+x^2}i$ → imaginario $2-x^2=0$→$x=\pm\sqrt{2}$

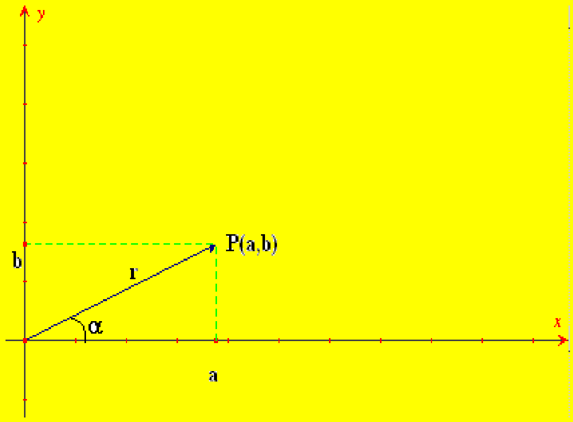
d) Halla x para que $\frac{2+xi}{1-xi}$ sea número real

$\dfrac{2+xi}{1-xi}=\dfrac{2-x^2}{1+x^2}+\dfrac{3x}{1+x^2}i$ →real x=0

3. Complejos en forma polar

Como hemos visto en el primer punto el complejo z=(a+bi) se puede relacionar con el vector $\vec{v}$=(a,b). La forma polar cosiste en definir el complejo a partir del módulo y el ángulo que forma dicho vector con el sentido positivo del eje OX.

Un complejo en forma polar formado por el módulo y el argumento:



- ***Módulo*** de z (r): es el módulo del vector $\overrightarrow{OP}$.Y por tanto $|z|= r = \sqrt{a^2+b^2}$

- ***Argumento*** de z (α): es el ángulo que forma el vector $\overrightarrow{OP}$ y el sentido positivo del eje OX:

arg(z)=α= $ar\cot g\left(\frac{b}{a}\right)$

El complejo z con módulo r y ángulo α en forma polar se escribe como z=r_α

Nota: darse cuenta que $ar\cot g\left(\frac{b}{a}\right)$ tiene dos soluciones en [0,360º), hay que dibujar el complejo para saber cuál de las dos soluciones es la real.

Ejemplo: escribir en forma polar z=3-4i

r=|z|= $\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

α=arg(z)= $ar\cot g\left(\frac{-4}{3}\right)=\begin{cases} 306{,}87^o \\ 126{,}87^o\,(no\ solucion)\end{cases}$ → z=$5_{306,87^o}$

Los **números reales** son:

- Positivos: el argumento es nulo α=0 → ejemplo: 7=7_{0^o}
- Negativos: el argumento es α=180º → ejemplo: -7=7_{180^o}

Los complejos imaginarios son:

- Positivos: el argumento es α=90º → ejemplo: 7i=7_{90^o}
- Negativos: el argumento es α=270º → ejemplo: -7i=7_{270^o}

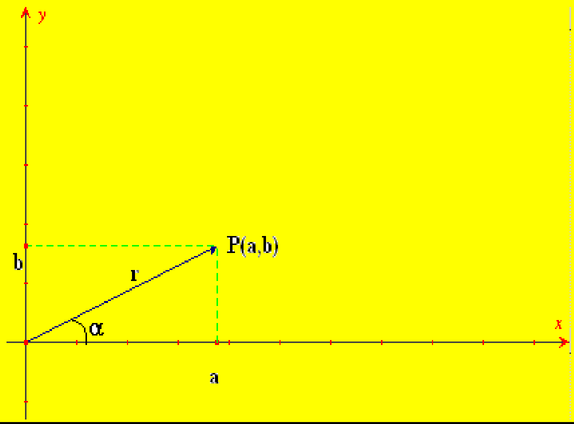
Ejercicio, expresar en forma polar:

a) z=2+i → r=$\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$, α= $ar\cot g\left(\frac{1}{2}\right)=\begin{cases} 26{,}56^o \\ 206{,}56^o\,(no\ solución)\end{cases}$ → z= $\sqrt{5}_{26,56^o}$

b) z=-1-$\sqrt{3}i$ → r=$\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}$, α= $ar\cot g\left(\sqrt{3}\right)=\begin{cases} 60^o\,(no\ solución) \\ 240^o\end{cases}$ → z=2_{240^o}

c) z=-3i → r=$\sqrt{0^2+(3)^2}=3$, α= $ar\cot g\left(-\frac{0}{3}\right)=\begin{cases} 90^o\,(no\ solución) \\ 270^o\end{cases}$ → z=3_{270^o}

3.1. Paso de forma polar a forma binómica. Expresión trigonométrica.



A partir de las funciones trigonométricas es sencillo pasar de forma polar a forma binómica:

a=Re(z)=r·cos(α)

b=Im(z)=r·sen(α)

El número complejo se puede poner de la siguiente forma ***(forma trigonométrica)***

z=r(cosα+i·senα)

Ejemplo: pasar a forma binómica $z=4_{60^o}$ → $z=4\cdot(\cos 60+i\,\text{sen}30)=(2+2\sqrt{3}\,i)$

Ejercicio: poner los siguientes complejos en forma binómica y trigonométrica los siguientes complejos:

a) $1_{120^o}=1\cdot(\cos 120+i\,\text{sen}120)=(-0.5+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$

b) $2_{\pi/3}=2\cdot(\cos(\pi/3)+i\,\text{sen}(\pi/3))=1+\sqrt{3}i$

c) $2_{3\pi/2}=2\cdot(\cos(3\pi/2)+i\,\text{sen}(3\pi/2))=-2i$

3.2. Operaciones en forma polar

Las mismas operaciones que hicimos con los complejos en forma binómica también podemos hacer en forma polar

Suma y resta: cuando tenemos una suma de complejos en forma polar lo recomendable es pasar los dos a forma polar a binómica sumar y luego volver a pasar a forma polar.

Producto: de dos complejos en forma polar es otro complejo tal que:

- El módulo es igual al producto de los dos módulos
- El argumento es igual a la suma de los argumentos

$r_\alpha\cdot s_\beta=(r\cdot s)_{\alpha+\beta}$

Cociente: de dos complejos en forma polar es otro complejo tal que:

- El módulo es igual al cociente de los dos módulos
- El argumento es igual a la resta de los dos argumentos

$$\frac{r_\alpha}{s_\beta}=\left(\frac{r}{s}\right)_{\alpha-\beta}$$

Potencia: de un complejo en forma polar es otro complejo tal que:

- El módulo es la potencia n-ésima del módulo de z
- El argumento es n veces el argumento del argumento de z

$(r_\alpha)^n=(r^n)_{n\alpha}$

Nota: cuando tenemos una potencia de un número complejo en forma binómica la forma más sencilla de calcular esta potencia es pasar el complejo a forma polar y luego elevar.

Nota: si z=r_α entonces $\overline{z}=r_{360-\alpha}$

Ejercicio: Operar y expresar el resultado en la misma forma

a) $3_{225^o}\cdot 5_{200^o}=15_{425^o}=15_{65^o}$

b) $2_{20^o}:4_{45^o}=0.5_{-25^o}=0.5_{335^o}$

c) $2_{30^o}-4_{330^o}=2\cdot(\cos 30+i\,sen 30)-4(\cos 330+i\,sen 330)=2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)-4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=-\sqrt{3}+3i$

r=$\sqrt{3+9}=\sqrt{12}$ → α=$ar\cot g\left(-\frac{3}{\sqrt{3}}\right)=\begin{cases}120^o\\300^o\,(no\ soluci\acute{o}n)\end{cases}$ → z=$\sqrt{12}_{120^o}$

d) $(1-i)^4$→ r=$\sqrt{2}$ α=$ar\cot g(-1)=\begin{cases}135^o\,(no\ soluci\acute{o}n)\\315^o\end{cases}$ $(1-i)^4=(\sqrt{2}_{315})^4=4_{1260^o}=4_{180^o}=$ $2\cdot(\cos 180^o+i\,se 180^o)=-4$

e) $-2\cdot i=2_{180^o}\cdot 1_{90}=2_{270^o}$

4. Raíces de números complejos

El cálculo de raíces de un número complejo en forma binómica es muy tedioso, por lo que en la práctica se hace por lo general se pasan a forma polar.

La raíz n-ésima de un número complejo tiene n soluciones $\sqrt[n]{r_\alpha}$. Los pasos son los siguientes:

- El módulo es la raíz n-esima del modulo del número dado
- El argumento es $\beta=\frac{\alpha+360k}{n}$ con k=0,1,2..n-1

$$\sqrt[n]{r_\alpha}=\left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{\alpha+360k}{n}}$$

Demostración: veamos que estos complejos son la solución de la raíz n-ésima, para esto elevamos la solución a n y veamos que es igual a z:

$$\left(\left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{\alpha+360k}{n}}\right)^n=\left(\sqrt[n]{r}\right)^n_{n\cdot\frac{\alpha+360k}{n}}=r_{\alpha+360k}=r_\alpha$$

Ejemplos: a) $\sqrt[3]{2+2i}$:

r=|z|=$\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}$; α=arg(z)=$arctg(1)=\begin{cases}45^o\\225^o\ (no\ soluci\acute{o}n)\end{cases}$ → z=$\sqrt{8}_{45^o}$

$$\sqrt[3]{2+2i}=\sqrt[3]{\sqrt{8}_{45^o}}=\sqrt[6]{8}_{\frac{45+360k}{3}}=\begin{cases}\sqrt[6]{8}_{15^o}\\\sqrt[6]{8}_{135^o}\\\sqrt[6]{8}_{255^o}\end{cases}$$

b) $\sqrt{4}=\sqrt{4_{0^\circ}}=2_{\frac{0+360k}{2}}\begin{cases}2_{0^\circ}=2\\2_{180^\circ}=-2\end{cases}$

c) $\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{27_{180^\circ}}=3_{\frac{180+360k}{3}}=\begin{cases}3_{60^\circ}\\3_{180^\circ}=-3\\3_{300^\circ}\end{cases}$

Nota: vemos que haciendo las raíces de números reales en las soluciones en el campo de los complejos las soluciones reales están incluidas en estas.

Ejercicio: calcular las siguientes raíces

a) $\sqrt{3_{150^\circ}}=\begin{cases}\sqrt{3}_{75}\\\sqrt{3}_{255^\circ}\end{cases}$

b) $\sqrt[4]{i}=\sqrt[4]{1_{90}}=\begin{cases}1_{22.5^\circ}\\1_{112.5^\circ}\\1_{202.5^\circ}\\1_{292.5^\circ}\end{cases}$

c) $\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{27_{0^\circ}}=\begin{cases}3_{0^\circ}=3\\3_{120^\circ}\\3_{240^\circ}\end{cases}$

d) $\sqrt[5]{-1+i}=\sqrt[5]{\sqrt{2}_{135^\circ}}=\begin{cases}\sqrt[10]{2}_{27}\\\sqrt[10]{2}_{99}\\\sqrt[10]{2}_{171}\\\sqrt[10]{2}_{243}\\\sqrt[10]{2}_{315}\end{cases}$

4.1. Representación de raíces de un número complejo

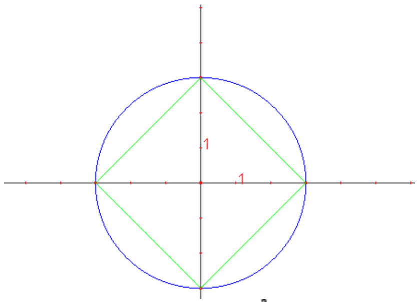
Cuando representamos las raíces n-ésimas de un número complejo se cumple que todas las soluciones:

- Tienen el mismo módulo (misma distancia del origen)
- Dos raíces consecutivas se diferencian en que el argumento es 360/n más que el anterior

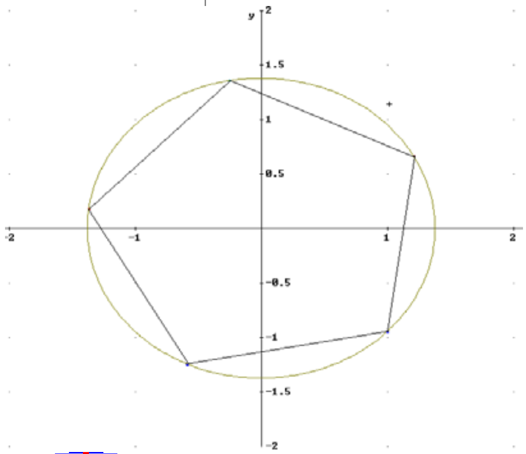
Con estas dos propiedades se cumplen que los afijos forman un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia de radio r=modulo raíz.

Ejemplos:

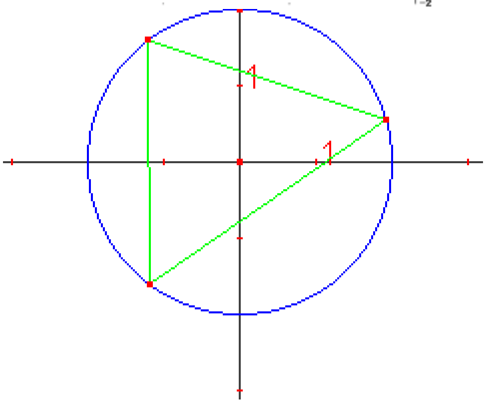
a) $\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{81_{0^\circ}}=\begin{cases}3_{0^\circ}=3\\ 3_{90^\circ}=3i\\ 3_{180^\circ}=-3\\ 3_{270^\circ}=-3i\end{cases}$



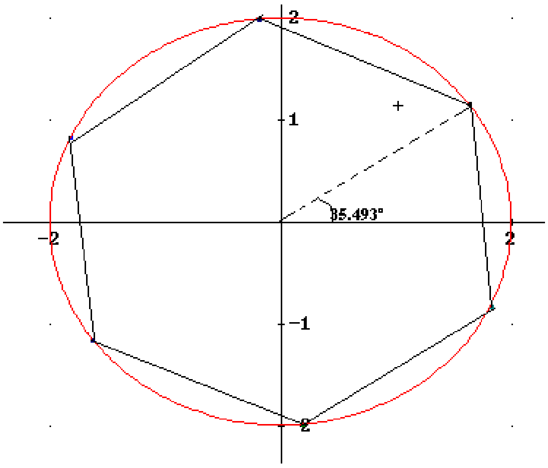
b) $\sqrt[5]{(-4+3i)}=\sqrt[5]{5_{143,13}}=\begin{cases}\sqrt[5]{5}_{\,28,6^\circ}\\ \sqrt[5]{5}_{\,100,6^\circ}\\ \sqrt[5]{5}_{\,172,6^\circ}\\ \sqrt[5]{5}_{\,244,6^\circ}\\ \sqrt[5]{5}_{\,316,6^\circ}\end{cases}$



c) $\sqrt[3]{8_{30^\circ}}=\begin{cases}2_{10^\circ}\\ 2_{130^\circ}\\ 2_{250^\circ}\end{cases}$



Ejercicio: calcular z y n sabiendo que las raíces n-ésimas de z sus soluciones son:



Sabemos que n=6, pues es hay 6 soluciones (hexágono). Calculemos $z=r_\alpha$:

$\sqrt[6]{r}=2\rightarrow r=2^6=64$

$\alpha=35.493\cdot 6=212.96^\circ$ $\qquad$ $\mathbf{z=64_{212.96^\circ}}$

Ejercicio: de un complejo z sabemos que su raíz cuarta tiene una de sus soluciones en el afijo A(3,2), calcular el resto de soluciones

$z_1=3+2i=\sqrt{13}_{33.69^{o}}$

$z_2=\sqrt{13}_{33.69^{o}+90^{o}}=\sqrt{13}_{123.69^{o}}$

$z_3=\sqrt{13}_{33.69^{o}+180^{o}}=\sqrt{13}_{213.69^{o}}$

$z_4=\sqrt{13}_{33.69^{o}+270^{o}}=\sqrt{13}_{303.69^{o}}$

$z=\left(\sqrt{13}_{33.69^{o}}\right)^4=169_{134.76^{o}}$

5. Ecuaciones con números complejos.

Cuando trabajábamos con polinomios dijimos que el número de raíces reales del polinomio (soluciones P(x)=0) eran a lo sumo igual al grado del polinomio. Pero y si consideramos las soluciones complejas ¿cuántas soluciones tiene?. Esto es lo que demostró Gauss en lo que hoy se llama teorema fundamental del álgebra:

Teorema fundamental del álgebra: todo polinomio de grado n con coeficientes reales o complejos tiene n raíces (contando el grado demultiplicidad).

$a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n=0$ → n soluciones

No siempre es sencillo calcular las n raíces. Los métodos usados para la resolución son los mismos que para soluciones reales. Veamos algún ejemplo:

- $z^2-4z+8=0$

  $$z=\frac{4\pm\sqrt{16-32}}{2}=2\pm 2i$$

- $z^3+4z^2+9z+36=0$

  Como es de grado 3 primero tendremos que buscar soluciones por Ruffini

  $z^3+4z^2+9z+36=(z+4)(z^2+9)=(z+4)(z+3i)(z-3i)$ → soluciones $z=-4$, $z=\pm 3i$

- $z^3+8i=0$

  $$z=\sqrt[3]{-8i}=\sqrt[3]{8_{270^{o}}}=\begin{cases}2_{90^{o}}=2i\\ 2_{210^{o}}\\ 2_{330^{o}}\end{cases}$$

Ejercicio : resolver las siguientes ecuaciones polinómicas:

a) $z^2+z+1=0$

$$z=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}=\begin{cases}\dfrac{-1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\\ \dfrac{-1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\end{cases}$$

b) $z^4+256=0$

$$z=\sqrt[4]{-256}=\sqrt[4]{256_{180}}=\begin{cases}4_{45^\circ}\\4_{135^\circ}\\4_{225^\circ}\\4_{315^\circ}\end{cases}$$

c) $z^3-6z^2+10z-8=0$

$z^3-6z^2+10z-8=(z-4)\cdot(z^2-2z+2)=(z-4)(z-(1+i))(z-(1-i))$

$z^2-2z+2=0 \rightarrow z=1\pm i$

d) $z^3+64i=0$

$$z^3=-64i \rightarrow z=\sqrt[3]{-64i}=\sqrt[3]{64_{270^\circ}}=\begin{cases}4_{90^\circ}\\4_{210^\circ}\\4_{330^\circ}\end{cases}$$

e) $z^6-28z^3+27=0$

$z^6-28z^3+27=0 \rightarrow z^3=t,\ z^6=t^2 \rightarrow t^2-28t+27=0$

$$t=\frac{28\pm\sqrt{676}}{2}=\frac{28\pm 26}{2}=\begin{cases}27\\1\end{cases}$$

$$z=\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{1_0}=\begin{cases}1_0=1\\1_{120^\circ}\\1_{240^\circ}\end{cases}$$

$$z=\sqrt[3]{27}=27_0=\begin{cases}3_0=3\\3_{120^\circ}\\3_{240^\circ}\end{cases}$$

5.1. Representación de ecuaciones en el campo de los complejos.

Dentro de las ecuaciones en el campo de los complejos centrémonos en aquellas que sus coeficientes son reales. Tendremos de esta forma que la ecuación a resolver es de la forma:

P(z)=0 con P(z) un polinomio.

Nota: La variable del polinomio se define z, en vez de x, para tener en cuenta que z puede tomar valores complejos (en cambio $x \in R$).

Por el teorema fundamental del álgebra el nº de soluciones es igual al grado del polinomio. Para ver la representación de las soluciones de la ecuación $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, es decir las raíces del polinomio ($P(z_i)=0$) recordemos cómo se factoriza el polinomio (tema 2). Los factores irreducibles en los que se descomponen un polinomio son de dos tipos:

- ✓ Polinomios de 1er grado del tipo $(z-x_i) \rightarrow x_i$ solución real.
- ✓ Polinomios de 2º grado sin soluciones reales (ax^2+bx+c, cuyo discriminante $\Delta=b^2-4ac<0$). Veamos las soluciones complejas de estos polinomios:

  $$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm i\Delta}{2a} = \begin{cases} z_1 = \dfrac{-b}{2a} + \dfrac{\Delta}{2a} i \\ \\ z_2 = \dfrac{-b}{2a} - \dfrac{\Delta}{2a} i \end{cases}$$ que son complejos conjugados, es decir $z_1 = \overline{z_2}$

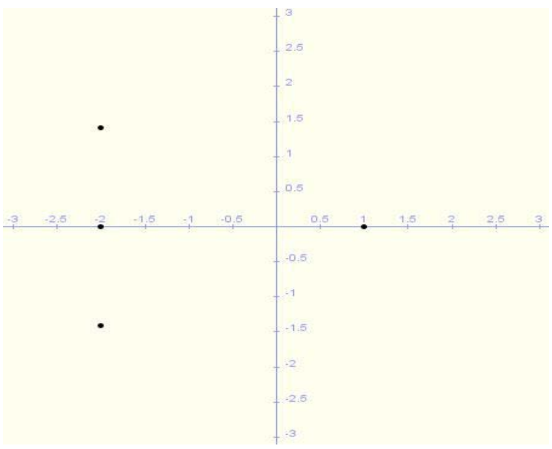
Conclusión: las soluciones en el campo de los complejos son:

- ✓ Números reales
- ✓ Las soluciones complejas vienen en parejas de complejos conjugados.

Ejemplo: representar las soluciones en el campo de los complejos de las siguientes ecuaciones con coeficientes reales:

a) $z^4+5z^3+8z^2-2z-12=0$. Factorizando $\rightarrow (z-1)\cdot(z+2)\cdot(z^2+4z+6)=0$

Soluciones: $z_1=1$, $z_2=-2$ (reales), $z = \frac{-4 \pm \sqrt{-8}}{2} = \begin{cases} z_3 = -2+\sqrt{2}i \\ z_4 = -2-\sqrt{2}i \end{cases}$ (complejos conjugados)

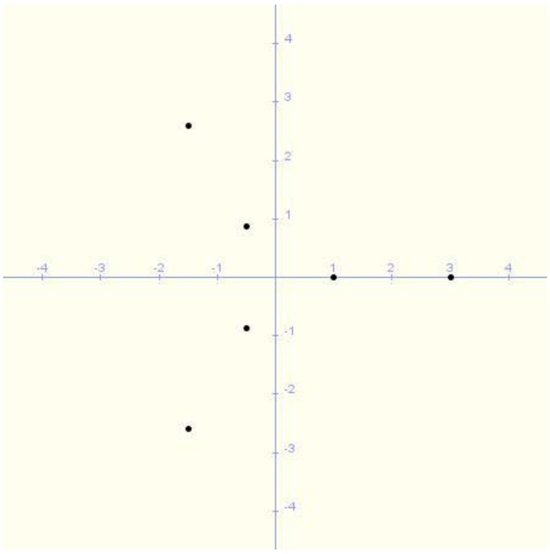


b) $z^6-28z^3+27=0$: Cambio de variable $z^3=t$, $z^6=t^2 \rightarrow t^2-28t+27=0$

$$t=\frac{28\pm\sqrt{676}}{2}=\frac{28\pm 26}{2}=\begin{cases}27\\1\end{cases}$$

$$z=\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{1_0}=\begin{cases}1_0=1\\1_{120^\circ}\\1_{240^\circ}\end{cases}$$

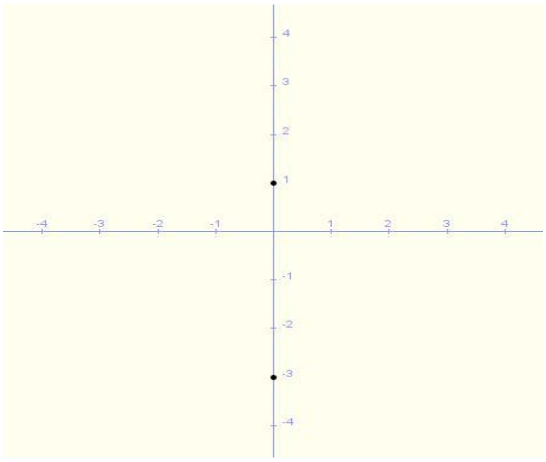
$$z=\sqrt[3]{27}=27_0=\begin{cases}3_0=3\\3_{120^\circ}\\3_{240^\circ}\end{cases}$$



Las ecuaciones en las que alguno de sus coeficientes no son reales no tienen que cumplir lo visto para aquellas con coeficientes reales, es decir puede tener soluciones que no son o reales o complejas conjugadas

Ejemplo:

$z^2+2iz+3=0 \rightarrow z=\frac{-2i\pm\sqrt{-4-12}}{2}=\frac{-2i\pm\sqrt{-16}}{2}=\begin{cases}z_1=-i+2i=i\\z_2=-i-2i=-3i\end{cases}$ no son conjugados



Ejercicios finales

1.- Expresa los siguientes números complejos en forma binómica

a) $\sqrt{-16}+3$ **b)** $\sqrt{-4}-2$ **c)** $\sqrt{-8}+\sqrt{2}$

Solución:

a) 3+4i b) -2+2i c) $\sqrt{2}+2i\sqrt{2}$

2.– Representa y obtén en forma polar los siguientes complejos

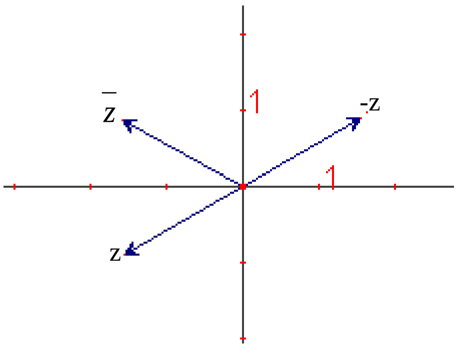
a) z=-1-$\sqrt{3}$i **b)** –z **c)** $\bar{z}$

Solución:

a) z=-1-$\sqrt{3}$i → r=$\sqrt{4}=2$, $\alpha = arct\left(\sqrt{3}\right)=\begin{cases}60^o \\ 240^o\end{cases}$ → z= 2_{240^o}

b) -z=1+$\sqrt{3}$i, → r=$\sqrt{4}=2$, $\alpha = arct\left(\sqrt{3}\right)=\begin{cases}60^o \\ 240^o\end{cases}$ → z= 2_{60^o}

c) $\bar{z}$=-1+$\sqrt{3}$i,→ r=$\sqrt{4}=2$, $\alpha = arct\left(-\sqrt{3}\right)=\begin{cases}300^o \\ 120^o\end{cases}$ → z= 2_{120^o}



3.- Calcular las siguientes potencias del número i:

a) i^{211} **b)** i^{-1} **c)** i^{-2} **d)** i^{-3} **e)** i^{-4}

Solución

a) resto(211:4)=3 → $i^3=-i$

b) $i^{-1}=\frac{1}{i}=\frac{i}{i\cdot i}=\frac{i}{-1}=-i$

c) $i^{-2}=\frac{1}{i^2}=-1$

d) $i^{-3}=\frac{1}{i^3}=\frac{1}{-i}=\frac{i}{-i\cdot i}=i$

e) $i^{-4}=\frac{1}{i^4}=\frac{1}{1}=1$

4.- Opera y simplifica al máximo:

a) $\frac{30(1-i)}{-4-2i}+(2-3i)$

$$\frac{30(1-i)}{-4-2i}+(2-3i)=\frac{-30+30i}{4+2i}+\frac{(2-3i)\cdot(4+2i)}{4+2i}=\frac{-30+30i+8+4i-12i+6}{4+2i}=$$
$$\frac{-16+22i}{4+2i}=\frac{(-16+22i)(4-2i)}{20}=\frac{-64+44}{20}+\frac{32i+88i}{20}=\frac{-20}{20}+\frac{120}{20}i=-1+6i$$

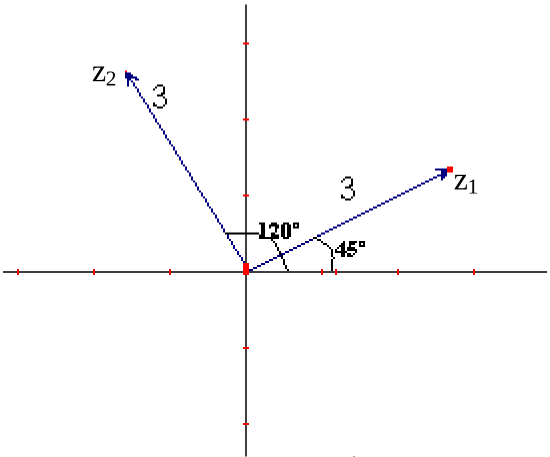
b) $2i-\frac{(2+3i)3}{-3+i}$

$$2i-\frac{(2+3i)3}{-3+i}=2i-\frac{(6+9i)(-3-i)}{10}=2i-\left(\frac{-18+9}{10}+\frac{-27i-6i}{10}\right)=2i+0{,}9+3{,}3i=0{,}9+5{,}3i$$

c) $\frac{(1+3i)^2-(2i)^2}{-3+4i}$

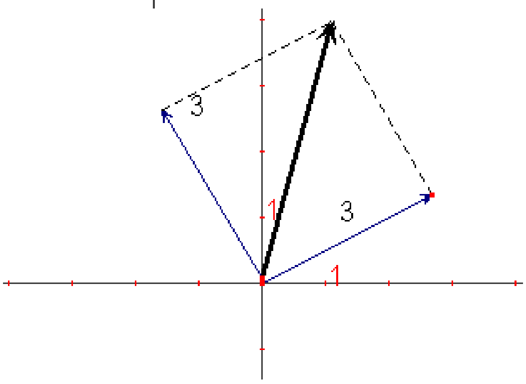
$$\frac{(1+3i)^2-(2i)^2}{-3+4i}=\frac{(1+3i)(1+3i)+4}{-3+4i}=\frac{-8+6i+4}{-3+4i}=\frac{(-4+6i)(-3-4i)}{25}=\frac{12+24}{25}+\frac{16i-18i}{25}=\frac{36}{25}-\frac{2}{25}i$$

5. - Sean z_1 y z_2 con lo siguientes afijos:

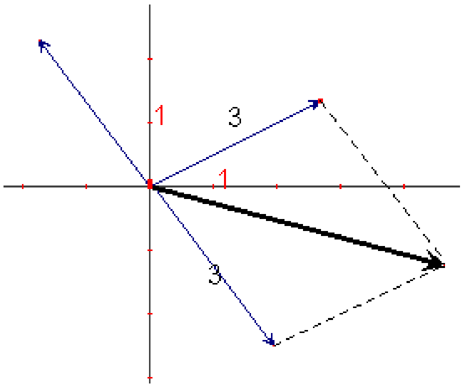


a) z_1+z_2
b) z_1-z_2
c) $z_1\cdot z_2$
d) $z_1:z_2$

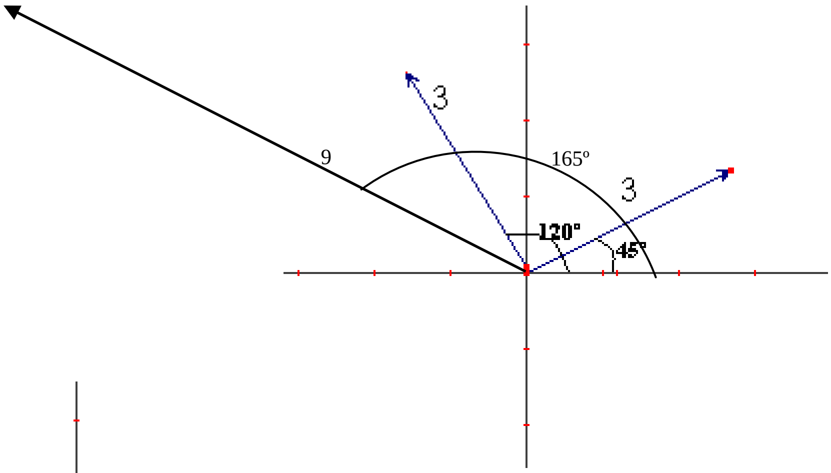
a)



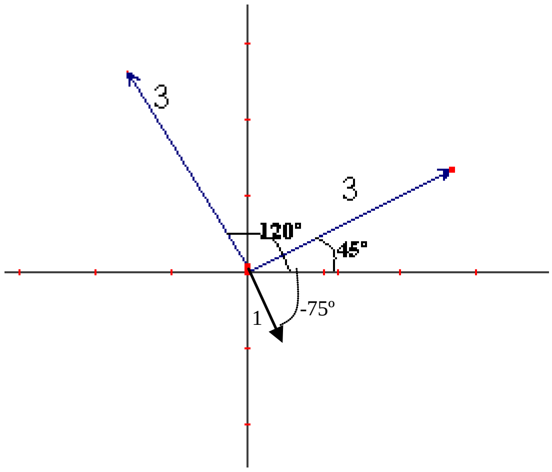
b)



c)



d)



6.- Calcula x para que se cumpla:

a) $\dfrac{7+11i}{x-2i}$ es real

b) $\dfrac{7+11i}{x-2i}$ es imaginario puro

Soluciones:

a) $\dfrac{7+11i}{x-2i}=\dfrac{(7+11i)(x+2i)}{x^2+4}=\dfrac{7x-22}{x^2+4}+\dfrac{14i+11xi}{x^2+4}$ → real si 14+11x=0 → x=-14/11

b) Imaginario si x=22/7

Otra forma a partir de notación polar :

7+11i → α=arctg(11/7)

x-2i → α=arctg(-2/x)

a) arctg(-2/x)=arctg(11/7) → -2/x=11/7 → x=-14/11

b) arctg(-2/x)=-90+57.53 → -2/x=-7/11 → x=-22/7

7.- Escribe en forma polar

a) (-3+4i) **b) $\sqrt{3}+i$** **c) -3i** **d) -3**

Solución

a) r $=\sqrt{9+16}=5$ $\propto = arcotg\left(-\frac{4}{3}\right)=\begin{matrix}306.87\\126.87\end{matrix}$ → $z=5_{126.9^\circ}$

b) r $=\sqrt{3+1}=2$ $\propto = arcotg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\begin{matrix}30\\210\end{matrix}$ → $z=2_{30^\circ}$

c) $-3i=3_{270^\circ}$

d) $-3=3_{180^\circ}$

8.- Escribe en forma polar y binómica los conjugados y opuestos de

a) $z=5_{120^\circ}$ **b) $z=3_{\pi/2}$** **c) $z=\sqrt{3}_{\pi/6}$**

Solución

a) $-z=5_{120^\circ+180^\circ}=5_{300^\circ}$ $\quad \bar{z}=5_{120+90^\circ}=5_{210^\circ}$

b) $-z=3_{\pi/2+\pi}=3_{3\pi/2}$ $\quad \bar{z}=3_{3\pi/2}$

c) $-z=\sqrt{3}_{\pi/6+\pi}=\sqrt{3}_{7\pi/6}$ $\quad \bar{z}=\sqrt{3}_{\pi/6+3\pi/2}=\sqrt{3}_{5\pi/6}$

9) Efectúa las siguientes operaciones expresando el resultado en forma polar

a) $4_{120^\circ}\cdot 2_{300}=8_{420^\circ}=8_{60^\circ}$

b) $\dfrac{4_{\pi/4}}{2_{90}}=2_{-45^\circ}=2_{315}$

c) $\left(\sqrt{4}_{200^\circ}\right)^6=4^3{}_{1200}=64_{120^\circ}$

d) $2_{45^\circ}-4_{315^\circ}=2(\cos 45+i\cdot sen45)-4(\cos 315+i\cdot sen315)=(-\sqrt{2}+3\sqrt{2}i)=\sqrt{20}_{108,4^\circ}$

e) $\dfrac{i^{302}}{i^{485}-i^{274}}=\dfrac{-1}{i+1}=\dfrac{-1(1-i)}{2}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$

10.- Utilizando el binomio de Newton y la potencia en forma polar calcular y comprobar que el resultado es el mismo: $(2-3\sqrt{2}i)^4$

$(2-3\sqrt{2}i)^4=1\cdot 2^4+4\cdot 2^3\cdot(-3\sqrt{2}i)+6\cdot 2^2\cdot(-3\sqrt{2}i)^2+4\cdot 2\cdot(-3\sqrt{2}i)^3+1\cdot(-3\sqrt{2}i)^4=$

$=16-96\sqrt{2}\cdot i-432+432\sqrt{2}i+324=-92+336\sqrt{2}i$

$(2-3\sqrt{2}i)=(\sqrt{22})_{295,24^\circ}$ → $((\sqrt{22})_{295,24^\circ})^4=484_{100,96^\circ}$

Comprobación $-92+336\sqrt{2}i=484_{100,96^\circ}$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

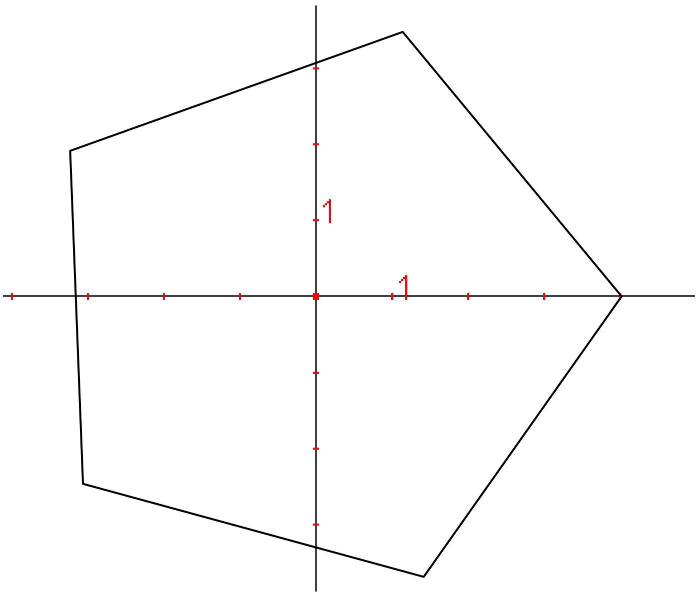
11.- Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt[3]{64_{120^\circ}} = \begin{cases} 4_{40^\circ} \\ 4_{160^\circ} \\ 4_{280^\circ} \end{cases}$ **b)** $\sqrt[4]{9_{220^\circ}} = \begin{cases} \sqrt{3}_{55^\circ} \\ \sqrt{3}_{145^\circ} \\ \sqrt{3}_{235^\circ} \\ \sqrt{3}_{325^\circ} \end{cases}$ **c)** $\sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{64_{180^\circ}} = \begin{cases} 2_{30^\circ} \\ 2_{90^\circ} = 2i \\ 2_{150^\circ} \\ 2_{210^\circ} \\ 2_{270^\circ} = -2i \\ 2_{330^\circ} \end{cases}$

d) $\sqrt[5]{1-\sqrt{3}i} = \sqrt[5]{2_{300}} = \begin{cases} \sqrt[5]{2}_{60^\circ} \\ \sqrt[5]{2}_{132^\circ} \\ \sqrt[5]{2}_{204^\circ} \\ \sqrt[5]{2}_{276^\circ} \\ \sqrt[5]{2}_{348^\circ} \end{cases}$ **e)** $\sqrt[4]{-i} = \sqrt[4]{1_{270^\circ}} = \begin{cases} 1_{67.5^\circ} \\ 1_{157,5^\circ} \\ 1_{247,5^\circ} \\ 1_{337,5^\circ} \end{cases}$

f) $\sqrt[4]{\frac{-1+i}{1+i}} = \sqrt[4]{\frac{\sqrt{12}_{135^\circ}}{\sqrt{2}_{45^\circ}}} = \sqrt[4]{1_{90}} = \begin{matrix} 1_{22,5^\circ} \\ 1_{112,5^\circ} \\ 1_{202,5^\circ} \\ 1_{292,5^\circ} \end{matrix}$

12.- En el gráfico se muestra las soluciones de las raíces de un número. Determínalas y descubre que número es.



Es una raíz quinta al haber 5 soluciones →una solución es 4_0, luego el resto son 4_{72^o}, 4_{144^o}, 4_{216^o}, 4_{288}

Calculemos z: $z=(4_0)^5=1024$

13.-Resuelve las siguientes ecuaciones en el campo de los complejos:

a) z^2-8iz+4i-19=0

b) z^4+1=0

c) z^4+3z^2+2=0

a) z^2-8iz+4i-19=0 →

$$z=\frac{8i+\sqrt{-64-16i+76}}{2}=4i+\sqrt{3-4i}=\begin{cases}4i+2-i=2+3i\\ 4i-2+i=-2+5i\end{cases}$$

b) $$z=\sqrt[4]{1}=\begin{cases}1_0=1\\ 1_{90^\circ}=i\\ 1_{180^\circ}=-1\\ 1_{270^\circ}=-i\end{cases}$$

c) t^2=z , t^4=z^2 → t^2+3t+2=0 → t=-1, t=-2 $\quad z=\sqrt{-1}=\begin{cases}i\\ -i\end{cases},\ z=\sqrt{-2}=\begin{cases}i\sqrt{2}\\ -i\sqrt{2}\end{cases}$

14.-Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Determinar los números complejos cuyo cuadrado sea igual a su conjugado

b) Encuentra los números complejos cuyo conjugado coincide con su opuesto

c) Determinar los números complejos cuyo conjugado es igual a su inverso

Solución

a) $z^2=\bar{z}$ → $(r_\alpha)^2=r_{360-\alpha}$ → $r^2{}_{2\alpha}=r_{360-\alpha}$

$r=1$

$$360-\alpha+360k=2\alpha\rightarrow\alpha=120+120k\begin{cases}k=-1\rightarrow 0^\circ\\ k=0\rightarrow 120^\circ\\ k=1\rightarrow 240^\circ\end{cases}$$

z_1=1, z_2=1_{120}, z_3=1_{240}

Comprobación:

1^2=1

$(1_{120^\circ})^2=1_{240}$

$(1_{240^\circ})^2=1_{480}=1_{120^\circ}$

b) $\bar{z}=-z$ llamamos $z=a+bi$, luego $\bar{z}=a-bi$; $-z=-a-bi$ → $\bar{z}=-z$ → a=-a, -b=-b→a=0, b∈R → z=bi, es decir los imaginarios puros

c) $\bar{z}=\frac{1}{z}\xrightarrow{z=r_\alpha} r_{360-\alpha}=\frac{1}{r_\alpha}\rightarrow r_{360-\alpha}=\left(\frac{1}{r}\right)_{-\alpha}\rightarrow\begin{cases} r=\frac{1}{r} \\ 360-\alpha=-\alpha\end{cases}$

$\begin{array}{l} r^2=1\rightarrow r=1 \\ y\ 360-\alpha\equiv\alpha\end{array}$. Luego todos los complejos con módulo 1 cumplen esta propiedad.

Veamos un ejemplo z=1_{10^o} → $\bar{z}=1_{350^o}$ $\frac{1}{z}=\frac{1}{1_{10^o}}=1_{-10}=1_{350}$

15.- La suma de un complejo y su conjugados es 16 y la suma de sus módulos es 20. Determinarlos:

z=a+bi y $\bar{z}=a-bi$

z+$\bar{z}$=2a=16 → a=8

$2\sqrt{a^2+b^2}=20\rightarrow\sqrt{64+b^2}=10\rightarrow b=6$

16.- Encuentra los complejos tales que su cubo es igual a su raíz cuadrada

z=r_α → $z^3=r^3_{3\alpha}$ y $\sqrt{z}=\begin{cases}\sqrt{r}_{\alpha/2} \\ \sqrt{r}_{\alpha/2+180}\end{cases}$

Veamos el módulo: $r^3=\sqrt{r}\rightarrow r^6=r\rightarrow r=0,\ r=1$

Veamos el ángulo:

a) $3\alpha=\frac{\alpha}{2}+360k\rightarrow\frac{5}{2}\alpha=360k\rightarrow\alpha=144k=\begin{cases}k=0\rightarrow\alpha=0^o \\ k=1\rightarrow\alpha=144^o \\ k=2\rightarrow\alpha=288^o\end{cases}$

b) $3\alpha=\frac{\alpha}{2}+180+360k\rightarrow\frac{5}{2}\alpha=180+360k\rightarrow\alpha=72+144k=\begin{cases}k=0\rightarrow\alpha=72^o \\ k=1\rightarrow\alpha=216^o\end{cases}$

Comprobación:

$z_1=0\rightarrow 0^3=0;\ \sqrt{0}=0$

$z_2=1_0\rightarrow(1_0)^3=1\rightarrow\sqrt{1_0}=\begin{cases}1 \\ -1\end{cases}$

$z_3=1_{144^o}\rightarrow(1_{144^o})^3=1_{72^o}\rightarrow\sqrt{1_{144}}=\begin{cases}1_{72} \\ 1_{252}\end{cases}$

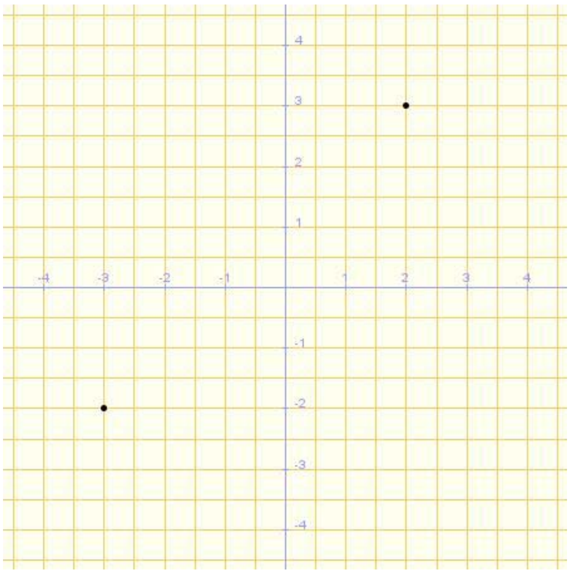
$z_4=1_{288^o}\rightarrow(1_{288^o})^3=1_{144^o}\rightarrow\sqrt{1_{288}}=\begin{cases}1_{144} \\ 1_{324}\end{cases}$

$z_5=1_{72^o}\rightarrow(1_{72^o})^3=1_{216^o}\rightarrow\sqrt{1_{72}}=\begin{cases}1_{36} \\ 1_{216}\end{cases}$

$z_6=1_{216^o}\rightarrow(1_{216^o})^3=1_{288^o}\rightarrow\sqrt{1_{216}}=\begin{cases}1_{108} \\ 1_{288}\end{cases}$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

17.- Encuentra el polinomio de 4º grado con coeficientes reales en los que sabemos que el coeficiente de mayor grado es 3 y dos de sus 4 raíces son:



$z_1=2+3i$, $z_2=-3-2i$.

Como en el enunciado nos dicen que el polinomio tiene coeficientes reales, se cumple que si alguna raíz es compleja, su complejo conjugado también es raíz. De esta forma

$z_3=\overline{z_1}=2-3i,\ z_4=\overline{z_2}=-3+2i$

$P(z)=3\cdot(z-(2+3i))\cdot(z-(2-3i))\cdot(z-(-3+2i))\cdot(z-(-3-2i))=3\cdot(z^2-4z+13)\cdot(z^2+6z+13)=$

$=3x^4+6x^3-24x^2-102x+117$