

## **Tema 13. Aplicaciones de las derivadas**

1. Monotonía. Crecimiento y decrecimiento de una función .....	2
2. Extremos relativos.....	3
3. Optimización .....	6
4. Curvatura.....	7
5. Puntos de Inflexión.....	8
6. Propiedades de las funciones derivables, L'Hopital .....	11

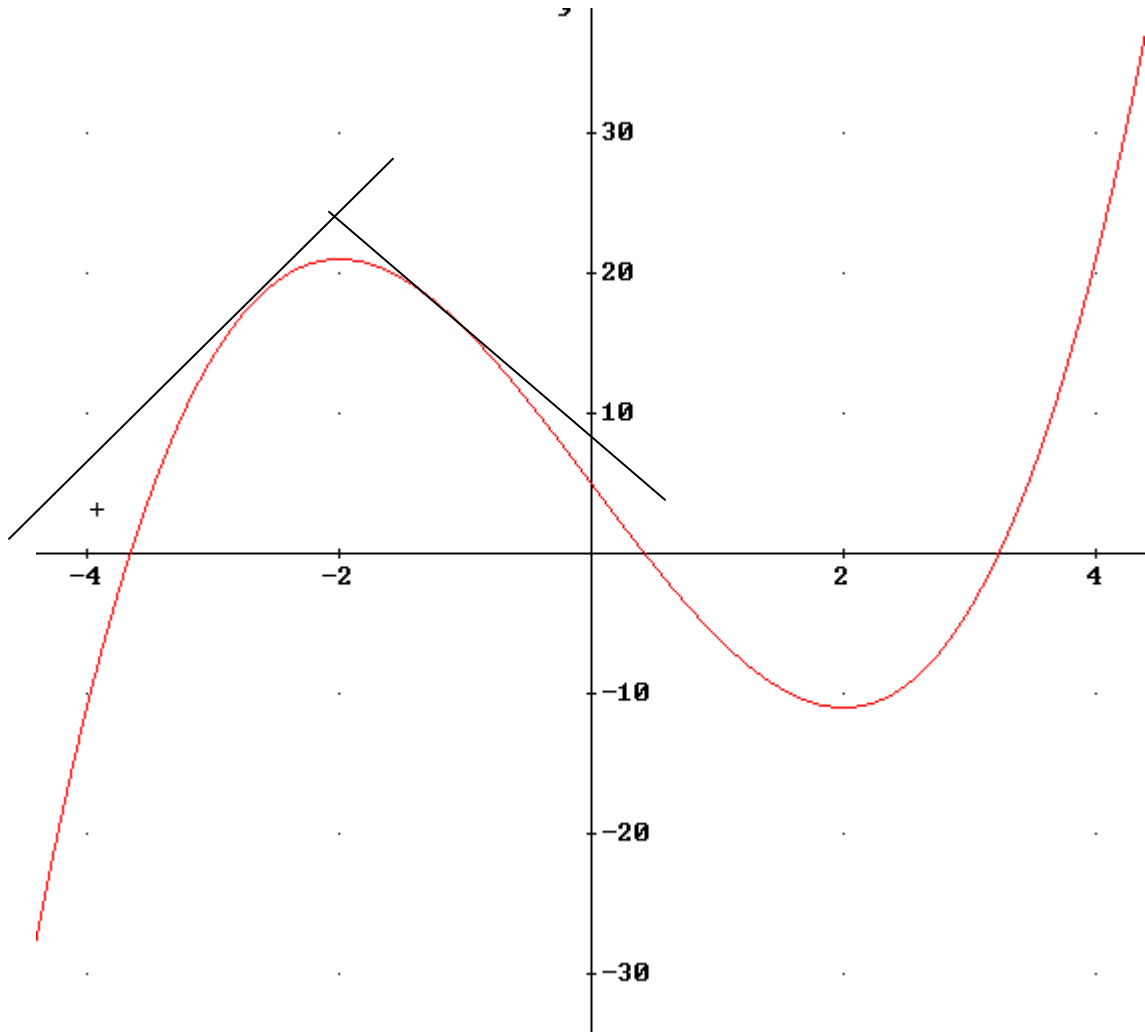
## 1. Monotonía. Crecimiento y decrecimiento de una función

En el tema anterior relacionamos las derivadas con la pendiente de las rectas tangentes a la gráfica descrita por la función, es decir,  $f'(x_0)$  es la pendiente de la recta tangente a la gráfica  $f(x)$  en  $x=x_0$ .

Vamos a relacionar el signo de  $m=f'(x_0)$  con el crecimiento o decrecimiento de la función; para esto nos valemos del siguiente ejemplo:

$$y=f(x)=x^3-12x+5$$

$$f'(x)=3x^2-12=3\cdot(x-2)\cdot(x+2)$$



	$(-\infty, -2)$	$-2$	$(-2, 2)$	$2$	$(2, \infty)$
<b>Signo <math>f'(x)</math></b>	+	0	-	0	+
<b>Crecimiento</b>					

Claramente vemos que cuando  $f'(x_0) > 0$  la recta tangente es creciente, pues la pendiente es positiva, y por lo tanto  $f(x)$  es creciente en  $x_0$ . De igual forma si  $f'(x_0) < 0$  la recta tangente es decreciente, pues su pendiente es negativa, y por lo tanto  $f(x)$  es decreciente en  $x_0$ .

**Conclusión:**

- a) Si  $f'(x_0) > 0$  la función  $f(x)$  es estrictamente creciente en  $x_0$
- b) Si  $f'(x_0) < 0$  la función  $f(x)$  es estrictamente decreciente en  $x_0$

## 2. Extremos relativos

Antes de relacionar los extremos relativos con la derivada definámoslos.

**Definición:** Extremo relativo de una función  $f(x)$  es todo punto  $x_0$  tal que, para todo entorno del punto  $E(x_0, r)$ , se cumple que la función en este intervalo crece y decrece. Según crezca antes o después de  $x_0$ , distinguimos dos tipos de extremos relativos:

- a) **Máximo relativo en  $x_0$ :** la función crece hasta  $x_0$  y decrece a partir de  $x_0$ .
- b) **Mínimo relativo en  $x_0$ :** la función decrece hasta  $x_0$  y crece a partir de  $x_0$ .

Está claro que si  $x_0$  es un extremo relativo de  $f(x)$ , en este punto la gráfica ni crece ni decrece, luego una condición necesaria es que  $f'(x_0) = 0$ , así la pendiente de la recta tangente es  $m = 0$ , siendo por tanto paralelo al eje  $x$ . Pero está no es la única condición. Es necesario, que además, se cumpla una segunda condición que además nos permite discernir si es máximo o mínimo relativo:

- Sea  $x_0$  un punto de una función en el que se cumple
  - a)  $f'(x_0) = 0$
  - b)  $f''(x_0) < 0$entonces  $(x_0, f(x_0))$  es **máximo relativo**
- Sea  $x_0$  un punto de una función en el que se cumple
  - a)  $f'(x_0) = 0$
  - b)  $f''(x_0) > 0$entonces  $(x_0, f(x_0))$  es **mínimo relativo**

En la práctica, si se cumple que  $f'(x_0) = 0$  y viendo el crecimiento de la función antes y después del punto podemos ver si es punto relativo y si es máximo o mínimo.

En el caso de que  $f'(x_0) = 0$  pero también  $f''(x_0) = 0$ , no podemos asegurar que este punto sea extremo relativo y hay que estudiar las derivadas de orden superior.




**Ejercicio 1:** Estudiar la monotonía, y los extremos relativos de las siguientes funciones:

a)  $y=f(x)=2x^3-15x^2+36x-12$

Veamos el signo de la derivada:  $f'(x)=6x^2-30x+36$

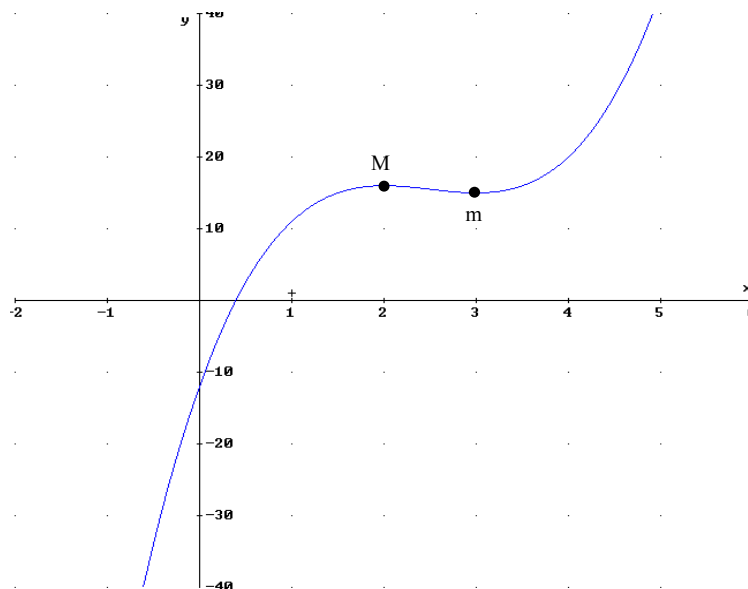
$f'(x)=0 \rightarrow x^2-5x+6=(x-2)\cdot(x-3)=0 \rightarrow x=2, x=3$

$f''(x)=12x-30$

	$(-\infty,2)$	2	$(2,3)$	3	$(3,\infty)$
<b>Signo <math>f'(x)</math></b>	+	0	-	0	+
<b>Crecimiento</b>		$(2,f(2))=(2,16)$		$(3,f(3))=(3,15)$	
		$f''(2)<0$ Máximo		$f''(3)>0$ Mínimo	

Máximo  $M(2,f(2))=(2,16)$

Mínimo  $m(3,f(3))=(3,15)$



b)  $y=x/\ln(x)$

Primero estudiemos el dominio. Veamos los puntos que no pertenecen al dominio

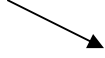


a)  $x>0$  (por el logaritmo neperiano)

b) Denominador es cero:  $\ln(x)=0 \rightarrow x=e^0=1$ , asíntota vertical

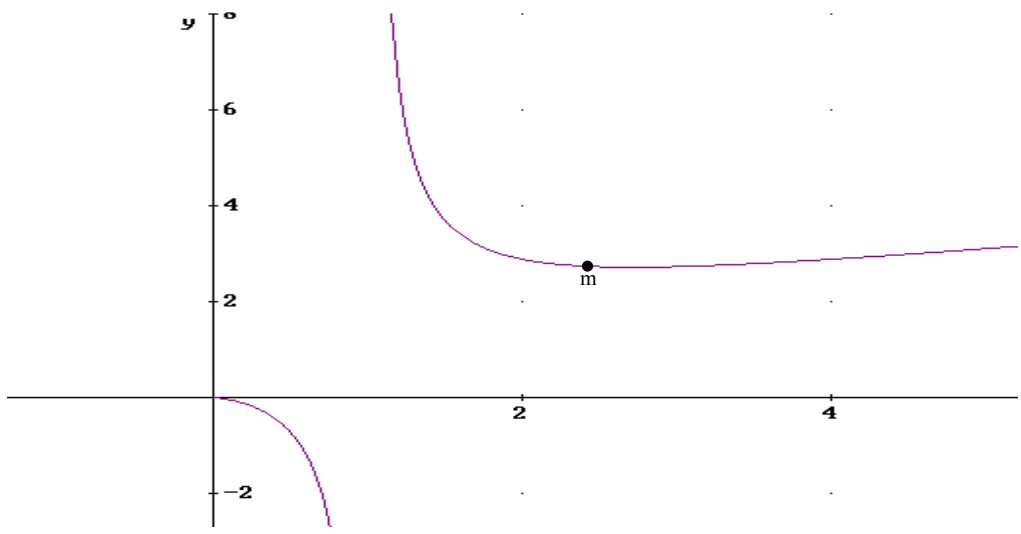
$\text{Dom}(f(x))=(0,\infty)-\{1\}$

$$f'(x) = \frac{\ln(x) - x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2(x)} = \frac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)} = 0 \rightarrow \ln(x) - 1 = 0 \rightarrow x = e^1$$

Además de los puntos donde se anula la primera derivada hay que añadir los puntos que no pertenecen al dominio, ya que en ellos puede cambiar el crecimiento. En este caso añadimos  $x=1$ .

	(0,1)	1	(1,e)	e	(e,∞)
<b>Signo <math>f'(x)</math></b>	-		-	0	+
<b>Crecimiento</b>		$\notin \text{Dom}(f(x))$		$(e, f(e)) = (e, e)$	
				$f''(e) = 1/e > 0$ Mínimo	

Mínimo  $m(e, f(e)) = (e, e)$



c)  $y = f(x) = \frac{x^2 - 8x + 12}{x - 4}$



Dominio =  $\mathbb{R} - \{4\}$

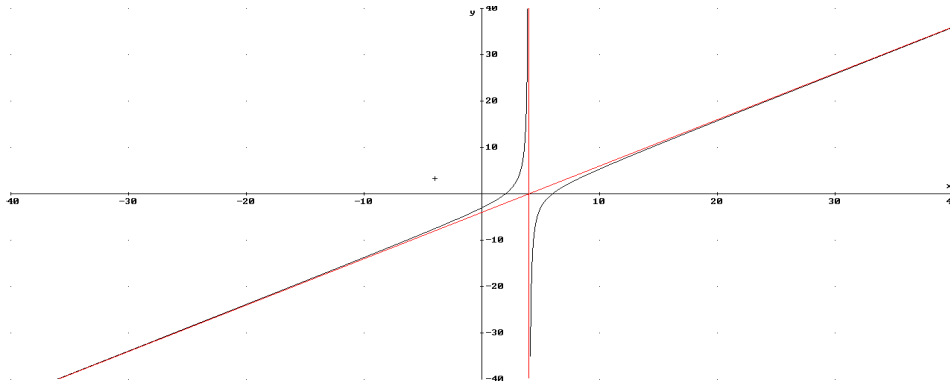
$f'(x) = \frac{x^2 - 8x + 20}{(x - 4)^2}$ ,

$f''(x) = \frac{8x - 32}{(x - 4)^4}$

Signo de  $f'(x)$ :  $x^2 - 8x + 20 = 0$  No solución  $\rightarrow$  no extremos relativos ( $f'(x) > 0$ )

Sólo tenemos que ver el crecimiento antes y después de  $x=4$ , que no pertenece al dominio:

	$(-\infty, 4)$	4	$(4, \infty)$
<b>Signo <math>f'(x)</math></b>	+	$\notin$ Dominio	+
<b>Crecimiento</b>			



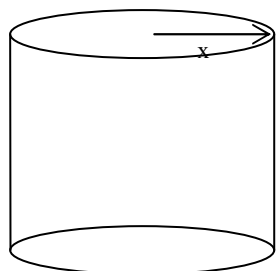
### 3. Optimización

En muchas situaciones se plantean problemas de optimización, es decir hacer que una función sea máxima o mínima para unas premisas impuestas.

Los casos de optimización que trabajaremos es cuando la función depende de una sola variable. Pasos a seguir para optimizar:

1. Expresar la función que deseamos optimizar en función todas variables.
2. Si la función tiene más de una variable relacionar las variables con los datos del problema y obtener una función de una sola variable.
3. Derivar la función, igualarla a cero y así obtener los puntos relativos
4. Comprobar, mediante la segunda derivada, si estos puntos son máximos o mínimos.

**Ejemplo:** Se quiere construir botes de enlatar de forma cilíndrica de 10 litros de capacidad. Calcular las dimensiones para que el gasto sea mínimo



$$V=10=\pi x^2 \cdot y \rightarrow y=10/(\pi x^2)$$

El gasto es proporcional a la superficie:

$$\text{Gasto}(x,y)=K \cdot \text{Superficie}=K(2 \cdot \pi x^2+2\pi x \cdot y) \rightarrow G(x)=K \cdot [2\pi x^2+2\pi x \cdot (10/\pi x^2)]=K[2\pi x^2+20/x]$$

$$G'(x)=K[4\pi x-20/x^2]=0$$

$$4\pi x-20/x^2=0 \rightarrow 4\pi x^3-20=0 \rightarrow r=x=\sqrt[3]{5/\pi} \text{ dm} \quad \rightarrow \quad h=y=\frac{10}{\pi \sqrt[3]{25\pi}} \text{ dm}$$

$$G''(x)=4\pi+40/x^3 \rightarrow G''(\sqrt[3]{5/\pi})>0 \text{ M\u00ednimo}$$

**Ejercicio 2:** Descomponer el número 48 en dos sumandos tal que el quintuplo del cuadrado del primero más el séxtuplo del cuadrado del segundo sea mínimo.

$$48=x+y \rightarrow y=48-x$$

$$f(x,y)=5y^2+6x^2$$

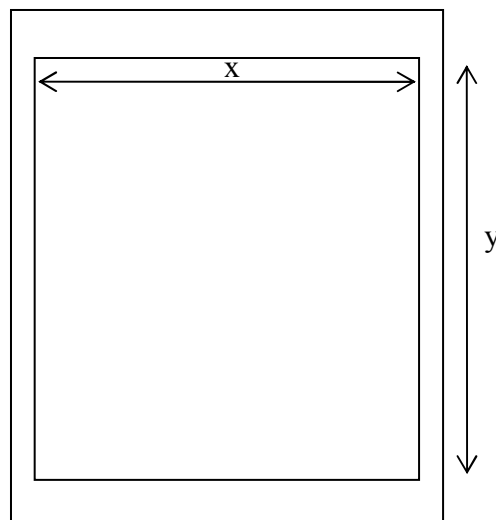
$$f(x)=5\cdot(48-x)^2+6\cdot x^2=11520-480x+11x^2$$

$$f'(x)=-480+22x=0$$

$$x=240/11, y=288/11$$

$$f''(x)=22 \quad f''(240/11)>0 \text{ Mínimo}$$

**Ejercicio 3:** Una hoja de papel debe contener 18 cm<sup>2</sup> de texto impreso, márgenes superior e inferior de 2 cm y laterales de 1 cm. Obtener las dimensiones que minimizan la superficie del papel



$$x\cdot y=18 \rightarrow y=18/x$$

$$\text{Area}(x,y)=(x+2)\cdot(y+4) \rightarrow A(x)=(x+2)\cdot(18/x+4)=18+4x+36/x+8=26+4x+36/x$$

$$A'(x)=4-36/x^2=0 \rightarrow x=3\text{cm} \quad y=6\text{cm}$$

$$A''(x)=72/x^3 \quad A''(3)>0 \text{ mínimo} \rightarrow \text{Dimensiones: } 5\text{cm} \times 10\text{cm}$$

#### 4. Curvatura

Veamos las definiciones de los dos tipos de curvaturas posibles en una función:

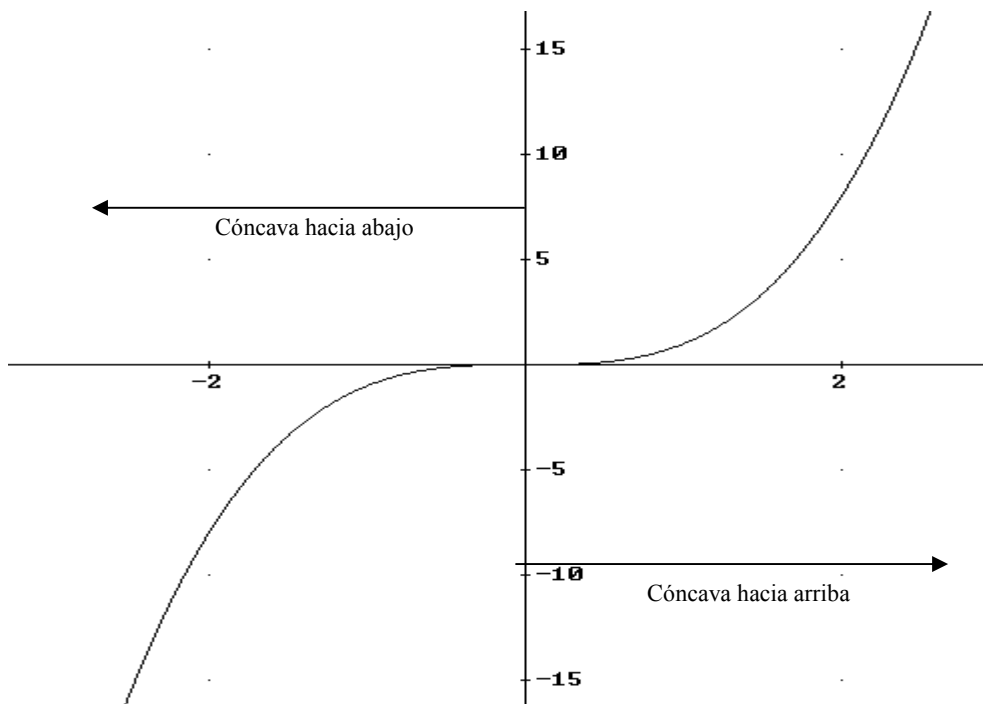
**Definición 1:** Una función es **cóncava hacia las y positivas o cóncava hacia arriba** en un punto  $P(x_0,y_0)$ , si la recta tangente en este punto está por debajo de los puntos próximos a P. Gráficamente tiene forma de  $\cup$

**Definición 2:** Una función es **cóncava hacia las y negativas o cóncava hacia abajo** en un punto  $P(x_0,y_0)$ , si la recta tangente en este punto está por encima de los puntos próximos a P. Gráficamente tiene forma de  $\cap$ .

Podemos saber si una función es cóncava hacia arriba o hacia abajo a partir de la segunda derivada:

- Si  $f''(x_0) > 0$ , entonces  $f(x)$  es **cóncava hacia arriba** en el punto  $(x_0, f(x_0))$ . (Recordar la curvatura de  $y=f(x)=x^2$  y como  $f''(x)=2 > 0$ )
- Si  $f''(x_0) < 0$ , entonces  $f(x)$  es **cóncava hacia abajo** en el punto  $(x_0, f(x_0))$ . (Recordar la curvatura de  $y=f(x)=-x^2$  y como  $f''(x)=-2 < 0$ )

**Ejemplo:**  $y=f(x)=x^3$   $f''(x)=6x$ , si  $x > 0$  cóncava hacia arriba y si  $x < 0$  hacia abajo



## 5. Puntos de Inflexión

Uno de los puntos más importantes a la hora de representar una función son los puntos de inflexión; veamos que es un punto de inflexión:

**Definición:** Se dice que  $f(x)$  tiene **punto de inflexión** en  $(x_0, f(x_0))$  si en ese punto cambia la curvatura de la función, es decir pasa de ser cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o al revés. En este punto la recta tangente a la función corta a la función.

Vamos a ver la relación entre los puntos de inflexión y las derivadas de la función, en el siguiente teorema:

Si  $f(x)$  cumple en  $x_0$  que la segunda derivada es nula ( $f''(x_0)=0$ ) y además la tercera derivada es distinta de cero ( $f'''(x_0) \neq 0$ ), entonces la función  $f(x)$  tiene un **punto de inflexión** en  $(x_0, f(x_0))$ .

En el caso de que tanto  $f''(x_0)=0$  como  $f'''(x_0)=0$ , tendremos que recurrir a las derivadas de orden superior, y ver el orden de la primera no nula en  $x_0$ .



**Ejemplo:** Estudia el crecimiento, puntos relativos, la curvatura y los puntos de inflexión de la función  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

Primero estudiemos el dominio  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{x+1 - (x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

Vemos que siempre es positiva para todo valor de x que pertenezca al dominio:

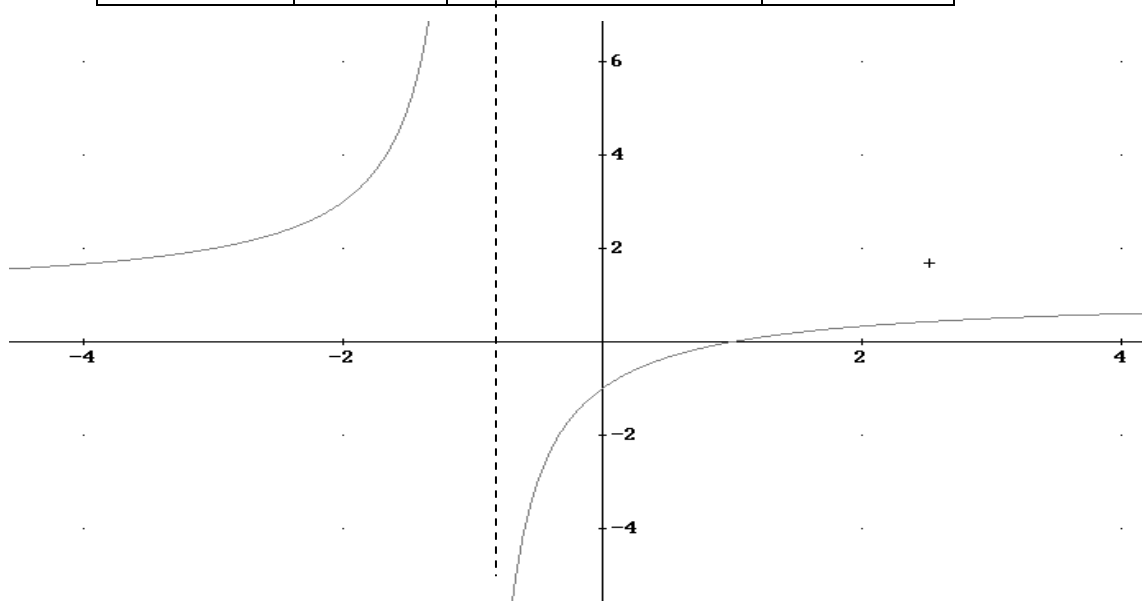
	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, \infty)$
<b>Signo <math>f'(x)</math></b>	+	No existe $-1 \notin \text{Dom}(f)$	+
<b>Crecimiento</b>	↗		↗
		No Punto relativo	

Calculemos ahora la curvatura y los puntos de inflexión

$$f''(x) = \frac{-4(x+1)}{(x+1)^4}$$

Como  $(x+1)^4$  es positivo, sólo tenemos que estudiar el signo de  $(x+1)$ , por eso no simplificamos la fracción. El signo de la segunda derivada es:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, \infty)$
<b>Signo <math>f''(x)</math></b>	+	No existe $-1 \notin \text{Dom}(f)$	-
<b>Cocavidad</b>	∪		∩
		No P.I.	






**Ejercicio 4:** Estudiar monotonía y curvatura de  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 2x + 1}$

Primero vemos el dominio de  $f(x)$ , como  $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ , entonces  $\rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$




$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2 - 2x + 1) - (2x - 2) \cdot x^2}{(x^2 - 2x + 1)^2} = \frac{2x - 2x^2}{(x^2 - 2x + 1)^2} = \frac{-2x \cdot (x - 1)}{(x^2 - 2x + 1)^2}$$

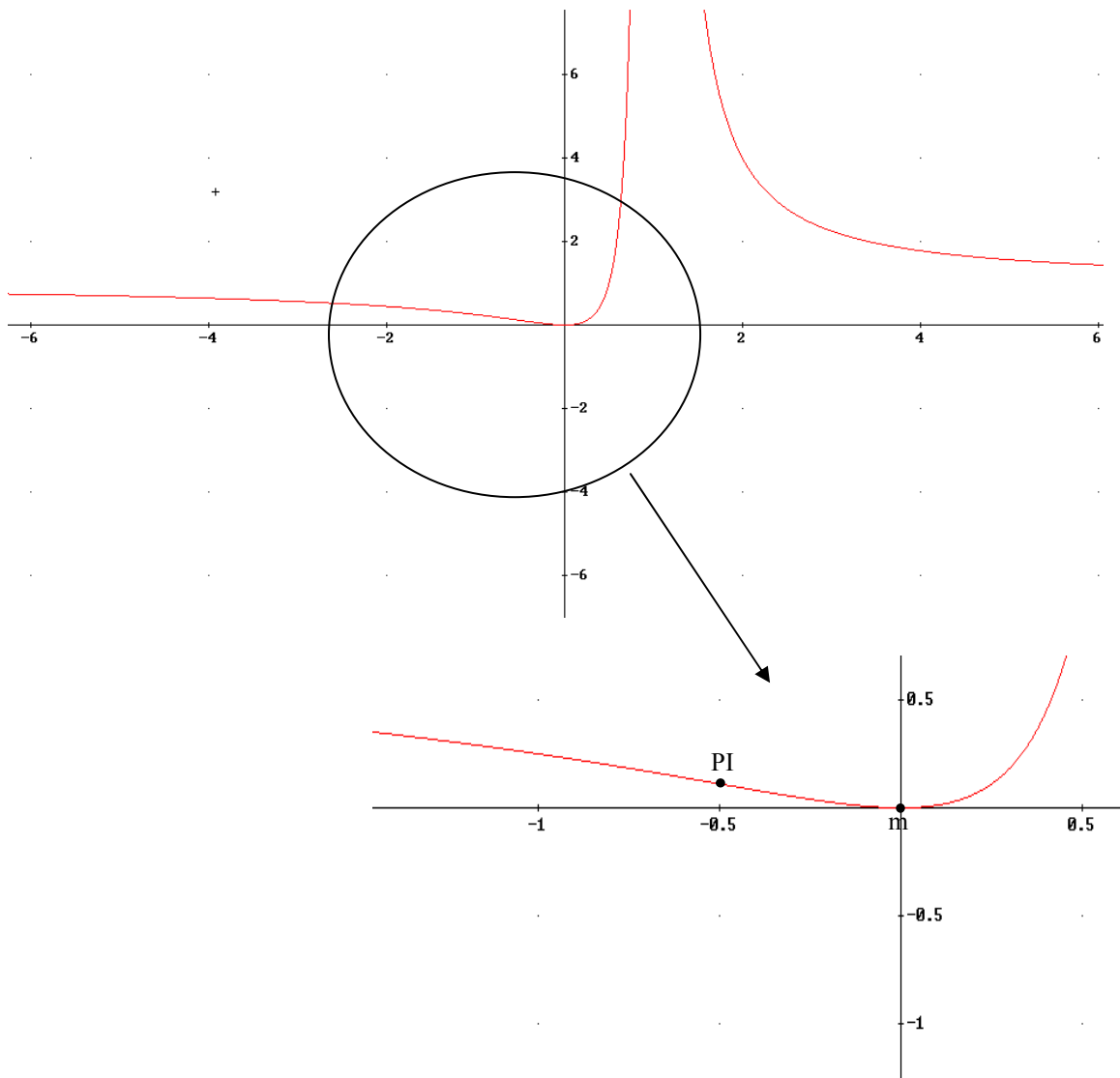
No simplificamos la fracción para que el signo del denominador sea siempre positivo (elevado a potencia par). El numerador se anula en  $x=0$  y  $x=1 \notin \text{Dom}(f)$

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
<b>Signo <math>f'(x)</math></b>	-	0	+	No existe	-
<b>Crecimiento</b>		$m(0, f(0)) = (0, 0)$		$1 \notin \text{Dom}(f)$	
		$f''(0) < 0$ Mínimo			

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2 - 4x) \cdot (x^2 - 2x + 1)^2 - 2 \cdot (x^2 - 2x + 1) \cdot (2x - 2) \cdot (2x - 2x^2)}{(x^2 - 2x + 1)^4} = \\ &= \frac{(x^2 - 2x + 1) \cdot [(2 - 4x)(x^2 - 2x + 1) + 8x^3 - 16x^2 + 8x]}{(x^2 - 2x + 1)^4} = \frac{(x^2 - 2x + 1)(-4x^3 + 6x^2 - 2)}{(x^2 - 2x + 1)^4} = \\ &= \frac{-2 \cdot (x^2 - 2x + 1)^2 \cdot (2x + 1)}{(x^2 - 2x + 1)^4} = \frac{-4 \cdot (x + 1/2)}{(x^2 - 2x + 1)^2} \end{aligned}$$

Se anula en  $x = -1/2$

	$(-\infty, -1/2)$	-1/2	$(-1/2, 1)$	1	$(1, \infty)$
<b>Signo <math>f''(x)</math></b>	-	0	+	No existe	+
<b>Concavidad</b>		$PI(-1/2, f(-1/2)) = (-0.5, 1/9)$		$1 \notin \text{Dom}(f)$	
		$f'''(-1/2) \neq 0$			



## 6. Propiedades de las funciones derivables, L'Hopital

Ya hemos visto en el tema anterior que hay límites que, para calcularlos, es necesario utilizar el teorema de L'Hopital, veamos en que consiste:

**Teorema:** Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  continuas y derivables en  $x_0$  que verifican:

a)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$

b)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$  entonces se cumple:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esta regla es válida para  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $+\infty$  o  $-\infty$ .

Esta regla se puede aplicar sucesivas veces si el límite sigue siendo  $\infty/\infty$  o  $0/0$

**Ejemplos:**

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = \frac{0}{0} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3}{x - \text{sen}(x)} = \frac{0}{0} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2}{1 - \cos(x)} = \frac{0}{0} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12x}{\text{sen}(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12}{\cos(x)} = 12$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^2 + 2} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0 \cdot \infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$$

e)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \text{tg}(x) &= 0 \cdot \infty = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\text{tg}(x)}{\frac{1}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2(x)}}{\frac{-1}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{\cos^2(x)} = \frac{0}{0} \stackrel{L'H}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{-2\text{sen}(x)\cos(x)} = \frac{0}{0} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-2}{-2(-\text{sen}^2(x) + \cos^2(x))} = 1 \end{aligned}$$

**Ejercicios PAU:** Sólo veremos los que están relacionados con la optimización y con L'Hopital.

**A) Optimización**

**Septiembre 2004. Prueba B.**

**PR2.- a)** Dada la función  $f(x)=1/x+\ln(x)$  definida en  $[1,e]$ , calcular la recta tangente con mayor pendiente. Escribir ecuación de dicha recta

La pendiente de las rectas tangentes viene dada por la derivada de  $f(x) \rightarrow$

$f'(x)=-1/x^2+1/x$ . Como tenemos que buscar el valor con mayor pendiente, la función a optimizar es  $f'(x)$ , que llamaremos  $g(x)$ ,  $g(x)=f'(x)$ . Optimicémosla

$$g'(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} = \frac{2-x}{x^3} = 0 \rightarrow 2-x=0 \rightarrow x=2 \in [1,e]$$

Veamos si es máxima o mínima:  $g''(x)=2/x^3-6/x^4$   $g''(2)=1/4-3/8 < 0$  **máximo**

La pendiente máxima es  $m_{\max}=g(2)=f'(2)=-1/4+1/2=1/4$ ; esta es la pendiente de la recta tangente en el punto  $P(2,f(2))=(2,1/2+\ln(2))$

La recta tangente es por tanto:  $y-(1/2+\ln(2))=1/4(x-2) \rightarrow y=0.25 \cdot x + \ln(2)$

**Junio 2006. Prueba A.**

**PR-2** Considérense las funciones  $f(x)=e^x$ ,  $g(x)=-e^{-x}$ . Para cada recta  $r$  perpendicular al eje  $OX$ , sean  $A$  y  $B$  los puntos de corte de dicha recta con las gráficas de  $f$  y  $g$ , respectivamente. Determínese la recta  $r$  para la cual el segmento  $AB$  es de longitud mínima.

Las rectas perpendiculares al eje  $OX$  son del tipo  $x=x_0$ . Corte con las gráficas

- a)  $f(x)=e^x \rightarrow A(x_0, e^{x_0})$
- b)  $g(x)=-e^{-x} \rightarrow B(x_0, -e^{-x_0})$

Longitud segmento  $AB \rightarrow d(A,B)=|\overrightarrow{AB}| = |(0, e^{x_0} + e^{-x_0})| = \sqrt{(e^{x_0} + e^{-x_0})^2} = e^{x_0} + e^{-x_0}$

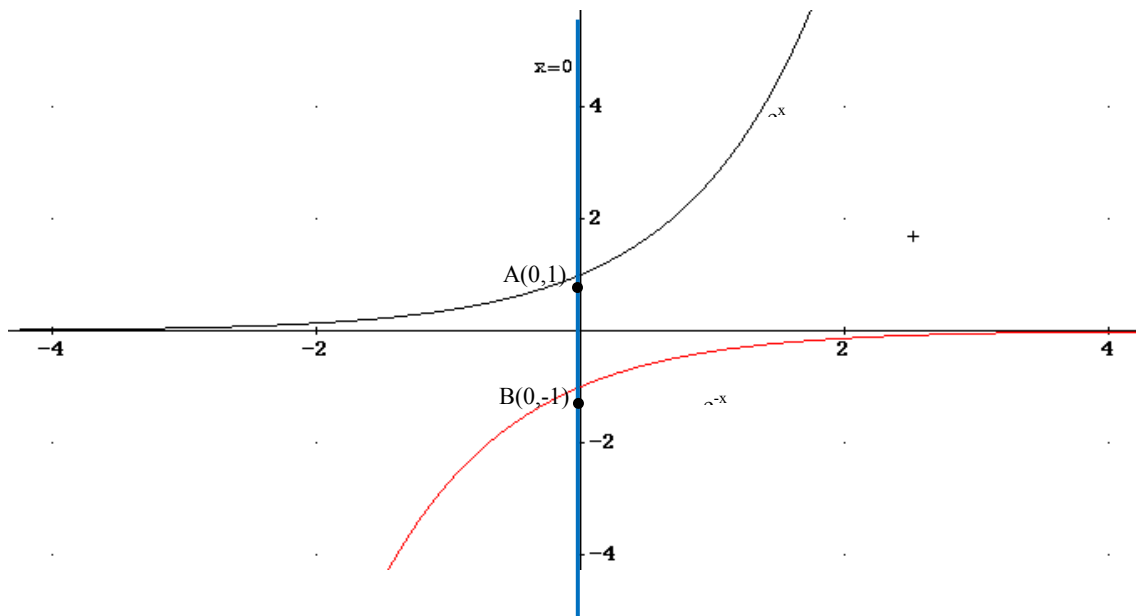
$d(x_0) = e^{x_0} + e^{-x_0}$ . Como tiene que ser distancia mínima, calculemos la derivada de  $d(x_0)$  e igualemos a cero

$d'(x_0) = e^{x_0} - e^{-x_0} = 0 \rightarrow e^{x_0} = e^{-x_0} \rightarrow x_0 = -x_0 \rightarrow x_0 = 0$ .

Veamos si es mínima o máxima  $d''(x) = e^x + e^{-x}$   $d''(0) = 2 > 0$  **Mínimo**

Por tanto la recta es  $x=0$ . Corta con  $f(x)$  en  $(0, e^0) = (0, 1)$  y con  $g(x)$  en  $(0, -e^0) = (0, -1)$

Así la recta que minimiza la distancia entre las dos funciones es  $x=0$



**Septiembre 2008. Prueba B**

**PR-2.** Hallar, de entre los puntos de la parábola de ecuación  $y=x^2-1$ , los que se encuentran a distancia mínima del punto  $A(-2, -1/2)$

Los puntos de la parábola son  $P(x, x^2-1)$ . La distancia entre  $P$  y  $A$  es:

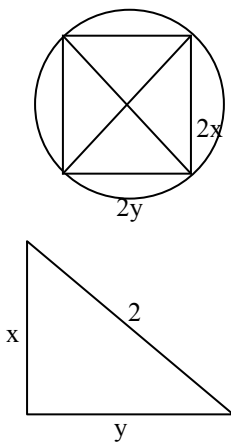
$$d(A, P) = |\overrightarrow{AP}| = \left( x + 2, x^2 - \frac{1}{2} \right) = \sqrt{(x + 2)^2 + \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + 4x + 4 + x^4 - x^2 + \frac{1}{4}}$$

$d(x) = \sqrt{x^4 + 4x + \frac{17}{4}}$  → Nota si buscamos el valor que minimice la distancia se cumplirá también que para ese valor  $d^2$  también será mínima:  $f(x) = (d(x))^2 = x^4 + 4x + \frac{17}{4}$

$$f'(x) = 4x^3 + 4 \rightarrow x = -1 \rightarrow \mathbf{P(-1,0)}$$

Veamos que es mínimo  $f''(x) = 12x^2$ ,  $f''(-1) = 12 > 0$ , es mínimo

**Ejercicio 5:** calcular el rectángulo de área máxima inscrita en una circunferencia de radio 2cm:



$$\text{Área}(x,y) = 4 \cdot x \cdot y \rightarrow A(y) = 4y \cdot \sqrt{4 - y^2}$$

$$x = \sqrt{4 - y^2}$$

$$A'(y) = 4 \cdot \sqrt{4 - y^2} - \frac{4y^2}{\sqrt{4 - y^2}} = 0 \rightarrow \frac{16 - 4y^2 - 4y^2}{\sqrt{4 - y^2}} = 0$$

$$y = \sqrt{2} \text{ cm} \rightarrow x = \sqrt{2} \text{ cm (cuadrado)}$$

Veamos que es máxima:  $A''(\sqrt{2}) < 0$ . Máximo

## B) L'Hopital

**PAU Septiembre 2006. Prueba A C-3.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x)) - 1 + \cos(x)}{x^2} &= \frac{0}{0} = \lim_{L'H \ x \rightarrow 0} \frac{-\frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)} - \text{sen}(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\text{tg}(x) - \text{sen}(x)}{2x} = \frac{0}{0} = \\ &= \lim_{L'H \ x \rightarrow 0} \frac{-(1 + \text{tg}^2(x)) - \cos(x)}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{aligned}$$

**PAU Junio 2006 (Prueba A) C-3.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(2x))}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{L'H \ x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \cdot \text{sen}(2x)}{\cos(2x)}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\text{tg}(2x)}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{L'H \ x \rightarrow 0} \frac{-2(1 + \text{tg}^2(2x))}{1} = -2$$

**PAU Junio 2006 (Prueba B)C-4. Calcular a y b para que el límite sea 1:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - \cos(x)}{\operatorname{sen}(x^2)} = \frac{0}{0} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2ax + b + \operatorname{sen}(x)}{2x \cdot \cos(x^2)} = \frac{b}{0} \quad (b = 0 \text{ para límite } \neq \infty) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2ax + \operatorname{sen}(x)}{2x \cdot \cos(x^2)} = \frac{0}{0} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2a + \cos(x)}{2 \cos(x^2) - 4x^2 \operatorname{sen}(x^2)} = \frac{2a + 1}{2} = 1 \rightarrow a = 1/2$$

**PAU Septiembre 2004 (Prueba A) C-3**

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg}(2x)}{\operatorname{tg}(6x)} = \frac{0}{0} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{2 \cdot (1 + \operatorname{tg}^2(2x))}{6 \cdot (1 + \operatorname{tg}^2(6x))} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{(1 + \operatorname{tg}^2(2x))}{3 \cdot (1 + \operatorname{tg}^2(6x))} = \frac{1}{3}$$

**PAU Junio 2004 (Prueba B) C-1**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x \cdot \operatorname{sen}(x)} \right) = \frac{0}{0} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{\operatorname{sen}(x) + x \cos(x)} = \frac{0}{0}$$

$$\stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x) + \cos(x) - x \operatorname{sen}(x)} = \frac{0}{2} = 0$$

**PAU Septiembre 2005 (Prueba A) C-4. Calcular  $\lambda$  para que el límite valga -1:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{\cos^2(\lambda x) - 1} = -1 \rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{\cos^2(\lambda x) - 1} = \frac{0}{0} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot x \cdot \cos(x^2)}{-2 \cdot \lambda \cdot \operatorname{sen}(\lambda x) \cdot \cos(\lambda x)} = \frac{0}{0} \rightarrow \lambda^2 = 1 \quad \lambda = \pm 1.$$

$$\stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \cos(x^2) - 4x^2 \operatorname{sen}(x^2)}{2 \cdot \lambda^2 - 4 \cdot \lambda^2 \cdot \cos^2(\lambda x)} = \frac{2}{-2\lambda^2} = -1$$

**PAU Septiembre 2005 (Prueba B) C-3**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) \cdot \operatorname{sen}(x) = \infty \cdot 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x \cos(x)} = \frac{0}{0}$$

$$\stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x)}{\cos(x) - x \operatorname{sen}(x)} = -\frac{0}{1} = 0$$

**PAU Junio 2005 (Prueba A) C-3**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(x)}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) + 1}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{e^x} = \frac{0}{\infty} = 0$$

**PAU Junio 2007 (Prueba A). C-2**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right) &= \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} = \frac{0}{0} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(1+x)\ln(1+x) + x} = \frac{0}{0} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+x) + \frac{1+x}{1+x} + 1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

**PAU Septiembre 2007 (Prueba B) C-4**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x})^2}{x^2} &= \frac{0}{0} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot (e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(e^{2x} - e^{-2x})}{2x} = \frac{0}{0} \stackrel{L'H}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cdot (e^{2x} + e^{-2x})}{2} = 4\end{aligned}$$

**PAU Junio 2008 (Prueba A). C-1:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(2x)}{x^3 + x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin(2x) \cdot \cos(2x) \cdot 2}{3x^2 + 2x} = \frac{0}{0} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cdot (2 \cdot \cos^2(2x) - 2 \cdot \sin^2(2x))}{6x + 2} = \frac{8}{2} = 4$$

**PAU Septiembre 2008 (Prueba B). C-3: Calcular a para que el límite sea 8**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1 - ax}{x^2} = \frac{0}{0} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot e^{ax} - a}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(e^{ax} - 1)}{2x} = \frac{0}{0} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 \cdot e^{ax}}{2} = \frac{a^2}{2} = 8$$

$$a = \pm 4$$