Ejercicio 1 Dada la función $f(x)=2x^3+3x^2-12x$ estudiar puntos de corte, asíntotas, monotonía y puntos relativos, curvatura y puntos de inflexión. Representar **(2 puntos)**

$\mathrm{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$

Puntos de corte:

Eje oy $(x=0)$ $\rightarrow y = f(0) = 0$ $\quad (0,0)$

Eje ox $(y=0)$ $\rightarrow y = 0 = 2x^3+3x^2-12x$

$$x(2x^2+3x-12)=0 \begin{cases} x=0 \rightarrow (0,0) \\ 2x^2+3x-12=0 \end{cases}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+96}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{105}}{4} \begin{matrix} 1'81 \\ -3'31 \end{matrix}$$

$(1'81, 0)$ y $(-3'31, 0)$

Asintotes $\rightarrow$ las funciones polinomicas no tienen asintotas

$$\lim_{x\to\infty} 2x^3+3x^2-12x = \infty$$

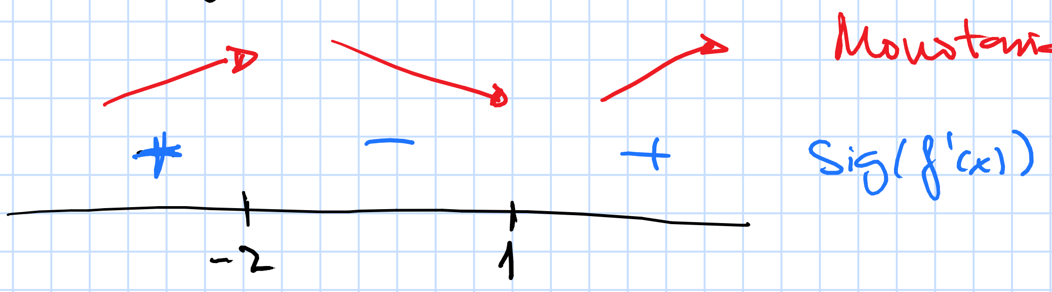
$$\lim_{x\to-\infty} 2x^3+3x^2-12x = -\infty$$

Monotonia y puntos relativos $\quad f'(x) = 6x^2+6x-12$

$6x^2+6x-12=0 \qquad x^2+x-2=0$

$$x = \frac{-1\pm\sqrt{1+4\cdot 2}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2} \begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix}$$

$$f'(x) = \begin{cases} >0 & \text{crece} \\ =0 & \text{P. relativo} \quad x=-2 \text{ y } x=1 \\ <0 & \text{decrece} \end{cases}$$



$f'(-5)>0 \qquad f'(0)=-12<0 \qquad f'(2)>0$

Creciente $= (-\infty,-2) \cup (1,\infty)$

Decreciente $= (-2,1)$

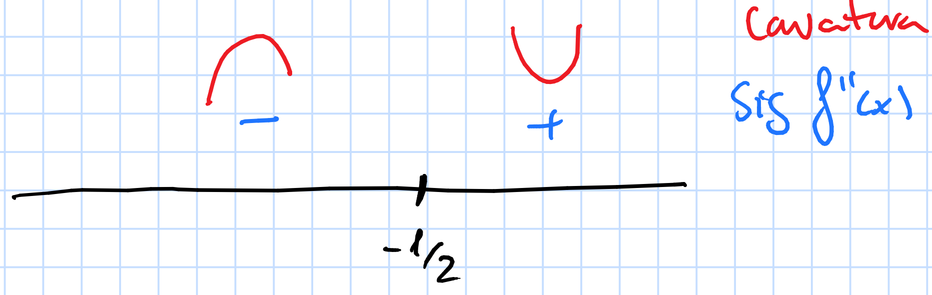
$$\text{P. relativos} \begin{cases} \text{Maximo } M(-2, f(-2)) = \boxed{(-2, 20)} \\ \text{minimo } m(1, f(1)) = \boxed{(1, -7)} \end{cases}$$

Curvatura y P. I. $\quad f'(x) = 6x^2+6x-12$

$f''(x) = 12x+6 \qquad f''(x)=0 \quad (\text{P.I.})$

$$f''(x) \begin{cases} >0 & \cup \text{ concava hacia las y positivas} \\ =0 & \text{P.I.} \\ <0 & \cap \text{ '' '' '' y negativas} \end{cases}$$

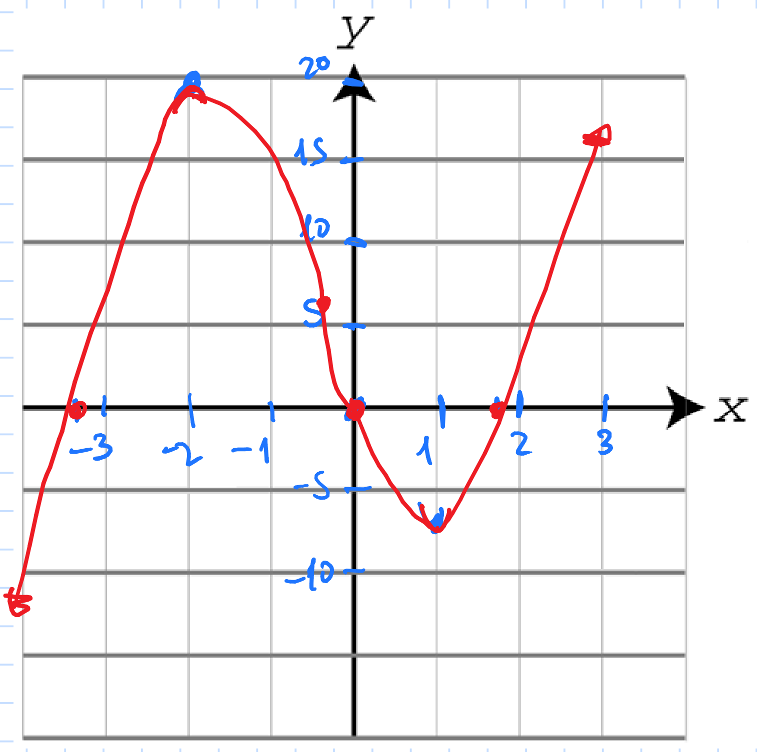
$f''(x)=0 \rightarrow 12x+6=0 \qquad x=-1/2$



$f''(-1) = -6 < 0 \qquad f''(0) = 6$

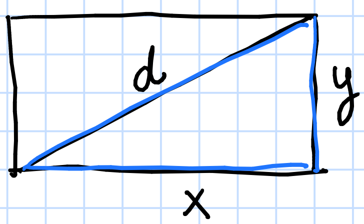
$\cup = (-1/2, \infty) \qquad \cap = (-\infty, -1/2)$

$\text{P.I.}\ (-1/2, f(-1/2)) = \boxed{(-1/2, 6'5) = \text{P.I.}}$ $\quad M(-2, 20)$ $\quad m(1,-7)$



Ejercicio 2 .De todos los rectángulos cuyo perímetro es 40 cm encontrar el que tiene la diagonal de menor longitud. **(2 puntos)**

diagonal → mínima



$d = \sqrt{x^2 + y^2}$ (Pitagoras),

$d = f(x, y)$ Mínimo

$p = 40$ cm

Ligadura → $2x + 2y = 40$ $\quad x + y = 20 \rightarrow y = 20 - x$

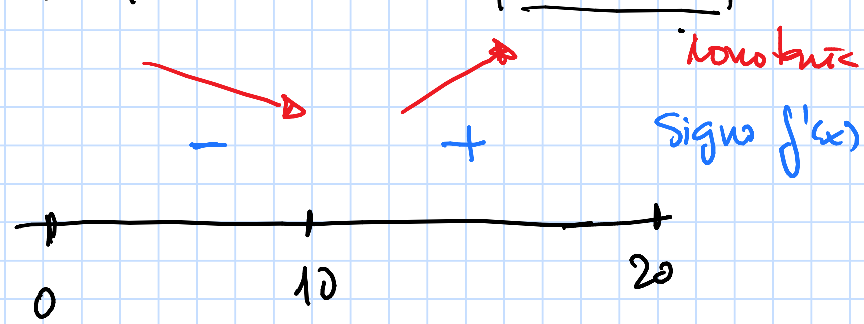
$$d = \sqrt{x^2 + (20-x)^2} = \sqrt{x^2 + 400 + x^2 - 40x} = \sqrt{2x^2 - 40x + 400}$$

Mínimo → Monotonía $\quad d = f(x) = \sqrt{\underline{2x^2 - 40x + 400}}$

$$f'(x) = \frac{4x - 40}{2\sqrt{2x^2 - 40x + 400}} = 0 \rightarrow 4x - 40 = 0$$

$$\boxed{x = 10 \text{ cm}}$$

Monotonía

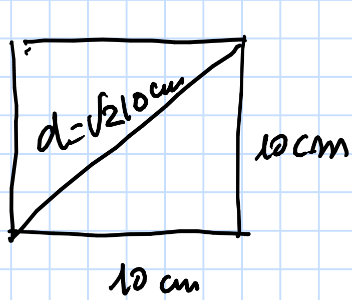


$f'(-1) < 0$

$f'(11) > 0$

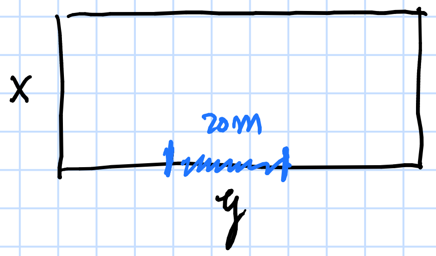
Mínimo $\quad x = 10$ cm

$y = 20 - x = 10$ cm



Ejercicio 3 .Se desea vallar un terreno rectangular usando 80 metros de una tela metálica pero dejando una abertura de 20 metros sin vallar en uno de los lados para colocar después una puerta. Calcular las dimensiones de la parcela rectangular de área máxima que puede vallarse de esa manera y el valor de dicha área. **(2 puntos)**

Optimizar Área (Máxima) $\rightarrow A = x \cdot y = f(x,y)$



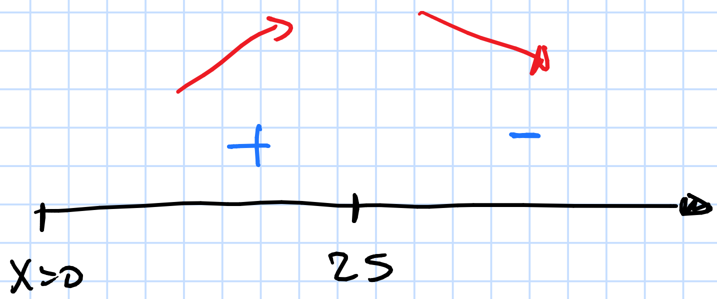
Ligadura : $2x + 2y - 20 = 80$

$2y = 100 - 2x \rightarrow y = 50 - x$

$A = f(x) = x \cdot (50 - x) = 50x - x^2$ (Maxima)

$A'(x) = f'(x) = 50 - 2x \qquad f'(x) = 0 \qquad x = 25\ m$

Monotonía

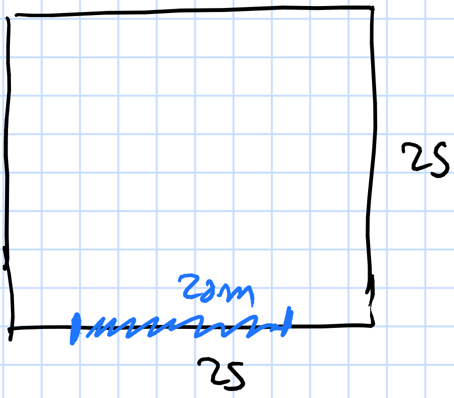


Sig $f'(x)$

$f'(10) = 40 > 0 \qquad f'(30) = -10 < 0$

Máximo $\rightarrow x = 25\ m \qquad y = 50 - 25 = 25\ m$

Área máxima $= 25^2 = 625\ m^2$



Ejercicio 4. Consideremos la función $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+2}$. Calcular el dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos. Esbozar su gráfica. **(2 puntos)**

Dominio $f(x) = \mathbb{R}$

$x^2+2=0 \quad x^2=-2 \quad x=\pm\sqrt{-2}\notin\mathbb{R}$

Asíntotas No verticales (Dom $=\mathbb{R}$)

Horizontal (A.H) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2+2}=\frac{\infty}{\infty}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$

$\boxed{y=1}$

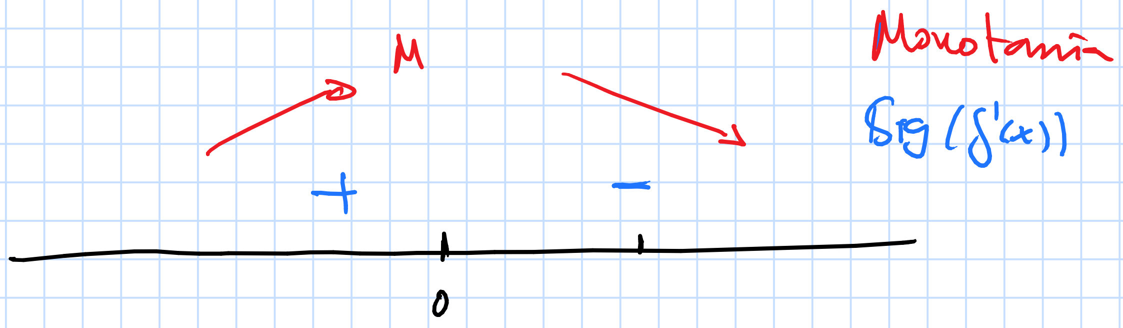
A. oblicua → No tiene (xq tiene AH)

Monotonía y Puntos relativos $\quad f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+2}$

$$f'(x)=\frac{2x(x^2+2)-(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+2)^2}=\frac{\cancel{2x^3}+4x-\cancel{2x^3}-2x}{(x^2+2)^2}=\frac{2x}{(x^2+2)^2}$$

$f'(x)\begin{cases} >0 & \text{crece} \\ =0 & \text{P. R.} \\ <0 & \text{decrece}\end{cases}$

$f'(x)=\frac{2x}{(x^2+2)^2}=0 \to 2x=0 \to x=0$



$f'(-1)=\frac{6}{9}>0$

Crecimiento $=(-\infty,0)$

decrecimiento $=(0,\infty)$

Máximo $(0,f(0))=(0,\frac{1}{2})$

$f'(1)=\frac{2}{9}>0$

Puntos de corte:

Eje oy $(x=0)$ $\quad y=f(0)=\frac{0^2+1}{0^2+2}=\frac{1}{2}$

$(0,\frac{1}{2})$

Eje ox $(y=0)$ $\quad 0=\frac{x^2+1}{x^2+2}\to x^2+1-$

No tiene